Физический смысл мощности D , учитывающей различие между величинами P и S , будет зависеть от вида цепи и ее режима. Мощность D назовем сопровождающей мощностью. Для двухполюсника $D = Q$ при установившемся синусоидальном режиме и $D = \sqrt{Q^2 + T_u^2}$ при периодическом несинусоидальном режиме, где T_u — мощность искажения.

Целью настоящей работы является установление факторов, влияющих на величину сопровождающей мощности и выяснение связей между этой мощностью и другими известными видами мощностей.

Изложение произведем в следующем порядке. Сначала кратко рассмотрим используемые далее математические понятия и операции. Затем получим выражения эффективных значений систем периодических токов и напряжений и рассмотрим способы их символического изображения и, наконец, выведем соответствующие выражения для различных видов мощности сначала для синусоидального, а потом периодического несинусоидального режима.

2. Некоторые математические понятия и операции

Назовем n — мерным вектором $\bar{A}$ систему из n чисел, расположенных в определенном порядке и будем записывать это так:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где A_k — компоненты вектора. Если эти компоненты суть комплексные числа $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_n$, то вектор будем обозначать через $\bar{A}$. При замене $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_n$ на сопряженные комплексы $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_n$ соответствующий вектор примет вид $\hat{\bar{A}}$.

Длину (абсолютную величину) вектора определим, как корень квадратный из суммы квадратов абсолютных значений его компонент, то есть

$$|\bar{A}| = \sqrt{|A_1|^2 + |A_2|^2 + \dots + |A_n|^2}. \quad (2.2)$$

Заметим, что длины векторов $\bar{A}$ и $\hat{\bar{A}}$ одинаковы, то есть $|\bar{A}| = |\hat{\bar{A}}|$. Приведем еще определения скалярного и векторного произведений двух n -мерных векторов.

Под скалярным произведением n -мерных векторов $\bar{A}$ и $\bar{B}$ будем понимать число, равное алгебраической сумме их одноименных (первых, вторых и т. д.) компонент, то есть

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + \dots + A_n B_n = \sum_{k=1}^n A_k B_k. \quad (2.3)$$

Скалярные произведения $\hat{\bar{A}} \cdot \hat{\bar{B}}$, $\bar{A} \cdot \hat{\bar{B}}$ и т. д. определяются аналогично. Например

$$\bar{A} \cdot \hat{\bar{B}} = \hat{A}_1 \hat{B}_1 + \hat{A}_2 \hat{B}_2 + \dots + \hat{A}_n \hat{B}_n = \sum_{k=1}^n \hat{A}_k \hat{B}_k. \quad (2.4)$$

Векторным произведением n -мерных векторов $\bar{A}$ и $\bar{B}$ назовем $\frac{n(n-1)}{2}$ -мерный вектор, определяемый выражением:

$$\bar{A} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ A_n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \cdot \\ B_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 B_2 - A_2 B_1 \\ A_1 B_3 - A_3 B_1 \\ \dots \dots \dots \\ A_1 B_n - A_n B_1 \\ A_2 B_3 - A_3 B_2 \\ \dots \dots \dots \\ A_2 B_n - A_n B_2 \\ \dots \dots \dots \\ A_{n-1} B_n - A_n B_{n-1} \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

Например, векторное произведение двух четырехмерных векторов

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix} \text{ и } \bar{B} = \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

представляет $\frac{4(4-1)}{2} = 6$ -мерный вектор

$$\bar{A} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} A_1 B_2 - A_2 B_1 \\ A_1 B_3 - A_3 B_1 \\ A_1 B_4 - A_4 B_1 \\ A_2 B_3 - A_3 B_2 \\ A_2 B_4 - A_4 B_2 \\ A_3 B_4 - A_4 B_3 \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

Длина вектора $\bar{B} = \bar{A} \times \bar{B}$ находится обычным путем

$$|\bar{B}| = \sqrt{|B_1|^2 + |B_2|^2 + \dots + \left| \frac{B_{n(n-1)}}{2} \right|^2}, \quad (2.7)$$

где B_k — компоненты $\frac{n(n-1)}{2}$ -мерного вектора $\bar{B}$.

Непосредственной подстановкой можно было бы доказать, что между произведениями длин векторов и абсолютными значениями их векторных и скалярных произведений существуют связи, выражаемые зависимостью

$$|\bar{A} \cdot \bar{B}|^2 + |\bar{A} \times \bar{B}|^2 = |\bar{A}|^2 |\bar{B}|^2. \quad (2.8)$$

Если компонентами векторов являются вещественные числа, то эта формула упрощается

$$|\bar{A} \cdot \bar{B}|^2 + |\bar{A} \times \bar{B}|^2 = |\bar{A}|^2 |\bar{B}|^2. \quad (2.9)$$

Когда компоненты векторов в свою очередь являются некоторыми, допустим, s -мерными векторами, то скалярное произведение находится обычным путем¹⁾

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = \sum_{k=1}^n \bar{A}_k \cdot \bar{B}_k = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^s A_{kl} B_{kl}, \quad (2.10)$$

¹⁾ Двойная черта, проставленная над вектором, указывает на то, что его компоненты тоже суть векторы.

где

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \\ \vdots \\ \bar{A}_n \end{vmatrix}, \bar{B} = \begin{vmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \vdots \\ \bar{B}_n \end{vmatrix}, \bar{A}_k = \begin{vmatrix} A_{k1} \\ A_{k2} \\ \vdots \\ A_{ks} \end{vmatrix}, \bar{B}_k = \begin{vmatrix} B_{k1} \\ B_{k2} \\ \vdots \\ B_{ks} \end{vmatrix} \quad (2.11)$$

Векторное произведение векторов $\bar{A}$ и $\bar{B}$ определяется по выражению (2.6) после предварительного переписывания их в виде:

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \\ \vdots \\ \bar{A}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ \vdots \\ A_{1s} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{2s} \\ \vdots \\ A_{n1} \\ \vdots \\ A_{ns} \end{vmatrix}, \bar{B} = \begin{vmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \vdots \\ \bar{B}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ \vdots \\ B_{1s} \\ B_{21} \\ \vdots \\ B_{2s} \\ \vdots \\ B_{n1} \\ \vdots \\ B_{ns} \end{vmatrix} \quad (2.12)$$

Таким образом,

$$\bar{A} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} A_{11}B_{12} - A_{12}B_{11} \\ A_{11}B_{13} - A_{13}B_{11} \\ \dots \\ A_{n,s-1}B_{ns} - A_{ns}B_{n,s-1} \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

Произведение $\bar{A} \times \bar{B}$ представляет, очевидно, $\frac{ns(ns-1)}{2}$ -мерный вектор. Длина этого вектора находится по формуле

$$|\bar{B}| = \sqrt{|B_1|^2 + |B_2|^2 + \dots + \left| \frac{B_{ns,ns-1}}{2} \right|^2}, \quad (2.14)$$

где B_k берется из выражения (2.13).

3. Эффективные значения систем периодических токов и напряжений

С целью облегчения последующих выкладок будем использовать понятия об эффективных (среднеквадратичных) значениях систем периодических токов и напряжений:

$$U = \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{T} \int_0^T u_k^2 dt} = \sqrt{\sum_{k=1}^n U_k^2}, \quad (3.1)$$

$$I = \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{T} \int_0^T i_k^2 dt} = \sqrt{\sum_{k=1}^n I_k^2}, \quad (3.2)$$

где $u = u_k(t)$ и $i = i_k(t)$ — периодические напряжения и токи с периодом, равным T ,

U_k и I_k — эффективные значения $u_k(t)$ и $i_k(t)$.

Эффективные величины U и I , очевидно, могут трактоваться как длины векторов

$$\bar{U} = \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{vmatrix} \text{ и } \bar{I} = \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{vmatrix}, \quad (3.3)$$

которые далее будем называть векторами эффективных значений систем напряжений и токов.

4. Символическое изображение систем периодических напряжений и токов

Периодические напряжения $u_k(t)$ и токи $i_k(t)$ после разложения в ряд Фурье всегда можно представить в виде:

$$u_k(t) = \sum_{l=0}^s \sqrt{2} U_{kl} \sin(\omega t + \alpha_{kl}), \quad (4.1)$$

$$i_k(t) = \sum_{l=1}^s \sqrt{2} I_{kl} \sin(\omega t + \beta_{kl}), \quad (4.2)$$

где s — число гармоник. Далее из комплексов эффективных значений гармоник можно построить векторы

$$\bar{\dot{U}}_k = \begin{vmatrix} \dot{U}_{k0} \\ \dot{U}_{k1} \\ \vdots \\ \dot{U}_{ks} \end{vmatrix} \text{ и } \bar{\dot{I}}_k = \begin{vmatrix} \dot{I}_{k0} \\ \dot{I}_{k1} \\ \vdots \\ \dot{I}_{ks} \end{vmatrix}, \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{U}_{kl} &= U_{kl} e^{j\alpha_{kl}}, \\ \dot{I}_{kl} &= I_{kl} e^{j\beta_{kl}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Величина $\bar{\dot{U}}_k$ — представляет символический вектор периодического напряжения $u_k(t)$, а $\bar{\dot{I}}_k$ — подобный же вектор тока $i_k(t)$. Длины векторов $\bar{U}_k$ и $\bar{I}_k$ равны эффективным значениям $u_k(t)$ и $i_k(t)$.

Для характеристики системы, определяемой n периодическими напряжениями и токами, составим векторы:

$$\bar{\dot{U}} = \begin{vmatrix} \bar{\dot{U}}_1 \\ \bar{\dot{U}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\dot{U}}_n \end{vmatrix} \text{ и } \bar{\dot{I}} = \begin{vmatrix} \bar{\dot{I}}_1 \\ \bar{\dot{I}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\dot{I}}_n \end{vmatrix}, \quad (4.5)$$

компонентами которых являются выражения (4.3).

Величины $\bar{U}$ и $\bar{I}$ представляют символические векторы систем периодических напряжений и токов. В частном случае системы синусоидальных функций их символические векторы упрощаются и принимают вид:

$$\bar{U} = \begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \vdots \\ \dot{U}_n \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \bar{I} = \begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_n \end{vmatrix} \quad (4.6)$$

5. Мощности цепи при синусоидальном режиме

Пусть для пассивного участка электрической цепи, связанного с ее питающей частью (эквивалентным генератором) n проводами, заданы векторы систем комплексов эффективных значений его токов $\bar{I}$ и напряжений $\bar{U}$. Скалярное произведение векторов $\bar{U}$ и $\bar{I}$, как нетрудно заметить, будет равно символической мощности, то есть

$$\bar{U} \cdot \bar{I} = P + jQ. \quad (5.1)$$

Отсюда следует, что активная и реактивная мощности цепи следующим образом выражаются через векторы $\bar{U}$ и $\bar{I}$.

$$P = \text{Re}(\bar{U} \cdot \bar{I}), \quad (5.2)$$

$$Q = \text{Im}(\bar{U} \cdot \bar{I}). \quad (5.3)$$

Таким образом, активная (средняя) и реактивная мощности соответственно равны действительной и мнимой частям скалярного произведения вектора системы комплексов эффективных значений напряжений цепи на сопряженный вектор токов.

Заменяв в векторах $\bar{U}$ и $\bar{I}$ комплексы U_k и I_k на модули U_k и I_k , получим векторы эффективных значений напряжений $u_k = \sqrt{2} U_k \sin(\omega t + \alpha_k)$ и токов $i_k = \sqrt{2} I_k \sin(\omega t + \beta_k)$ цепи.

Векторы эти будут вида

$$\bar{U} = \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \bar{I} = \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{vmatrix}. \quad (5.4)$$

Кажущаяся мощность S , как это непосредственно видно из выражения (1,3), может трактоваться как скалярное произведение векторов $\bar{U}$ и $\bar{I}$, т. е.

$$S = \bar{U} \cdot \bar{I} = \sum_{k=1}^n U_k I_k. \quad (5.5)$$

Нетрудно видеть, что в общем случае мощность S будет больше модуля символической мощности, то есть

$$S > |P + jQ| = |\bar{U} \cdot \bar{I}| \quad (5.6)$$

Следовательно, чтобы связать воедино мощности P , Q и S необходимо ввести в рассмотрение некоторую дополнительную мощность, которую обозначим через T_φ . Найдем выражение мощности T_φ через векторы $\bar{U}$ и $\bar{I}$.

Пользуясь равенствами

$$|\bar{U} \cdot \bar{I}|^2 + |\bar{U} \times \bar{I}|^2 = |\bar{U}|^2 |\bar{I}|^2, \quad (5.7)$$

$$|\bar{U} \cdot \bar{I}|^2 + |\bar{U} \times \bar{I}|^2 = |\bar{U}|^2 |\bar{I}|^2 \quad (5.8)$$

и замечая, что

$$|\bar{U} \cdot \bar{I}|^2 = P^2 + Q^2, \quad (5.9)$$

$$|\bar{U} \cdot \bar{I}|^2 = S^2, \quad (5.10)$$

$$|\bar{U}|^2 |\bar{I}|^2 = |\bar{U}|^2 |\bar{I}|^2, \quad (5.11)$$

можем получить

$$S^2 = P^2 + Q^2 + T_\varphi^2, \quad (5.12)$$

где

$$T_\varphi = \sqrt{|\bar{U} \times \bar{I}|^2 - |\bar{U} \times \bar{I}|^2}. \quad (5.13)$$

Рассматривая выражение (5.12), заключаем, что принятая зависимость (1,4) между кажущейся и активной мощностями подтверждается, причем сопровождающая мощность D следующим образом выражается через векторы $\bar{U}$ и $\bar{I}$:

$$D = \sqrt{|\operatorname{Im}(\bar{U} \cdot \bar{I})|^2 + |\bar{U} \times \bar{I}|^2 - |\bar{U} \times \bar{I}|^2}. \quad (5.14)$$

Обозначим

$$|\bar{U} \times \bar{I}| = T, \quad (5.15)$$

$$|\bar{U} \times \bar{I}| = T_a \quad (5.16)$$

и выясним физический смысл мощностей T_φ , T и T_a . Для этой цели возьмем участок цепи (нагрузку), симметричный относительно точки отсчета напряжений $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dots, \dot{U}_n$ и допустим, что

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_1, \dots, \frac{\dot{U}_k}{\dot{I}_k} = Z_k, \dots, \frac{\dot{U}_n}{\dot{I}_n} = Z_n.$$

Примером такого участка может служить трехфазная нагрузка, фазы которой соединены звездой с нулевым проводом при отсутствии взаимодействия между фазами.

Подставляя в формулы (5.15), (5.16) и (5.13) соотношение

$$\frac{\dot{U}_k}{\dot{I}_k} = Z_k e^{j\varphi_k}, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (5.17)$$

где $\varphi_k = \alpha_k - \beta_k$, получаем

$$T = \sqrt{\sum |z_p e^{j\varphi_p} - z_q e^{j\varphi_q}|^2 I_p^2 I_q^2}, \quad (5.18)$$

$$T_a = \sqrt{\sum |z_p - z_q|^2 I_p^2 I_q^2}, \quad (5.19)$$

$$T_\varphi = \sqrt{\sum \left\{ |z_p e^{ip\varphi} - z_q e^{iq\varphi}|^2 - |z_p - z_q|^2 \right\} I_p^2 I_q^2} \quad (5.20)$$

(значки p и q выбираются в соответствии с 2.4).

Отсюда видим, что при $z_p = z_q$ (модули сопротивлений между базисным зажимом и остальными проводами равны) мощность T_a обращается в нуль. При $\varphi_p = \varphi_q$ (углы сопротивлений равны) нулю будет равна мощность T_φ . Наконец, когда имеют место оба условия, становится равной нулю и мощность T . Таким образом, мощность T_a естественно назвать мощностью амплитудной (модульной) несимметрии, T_φ — мощностью фазовой несимметрии, а T — мощностью полной несимметрии цепи.

Очевидно, что сопровождающая мощность следующим образом выражается через мощности Q и T_φ :

$$D = \sqrt{Q^2 + T_\varphi^2}. \quad (5.21)$$

Таким образом, при синусоидальном режиме пассивного участка электрической цепи, разница между потребляемой активной мощностью и возможным при данных условиях ее максимумом, то есть кажущейся мощностью, разница, которая характеризуется сопровождающей мощностью D , получается, во-первых, благодаря несовпадению по фазе между напряжениями и токами, что учитывается реактивной мощностью Q , и, во-вторых, из-за несимметрии цепи по отношению к выбранной точке отсчета напряжений, что учитывается мощностью фазовой несимметрии T_φ . Квадрат сопровождающей мощности равен сумме квадратов реактивной мощности и мощности фазовой несимметрии. Если мощность амплитудной несимметрии равна нулю, то полная мощность несимметрии и мощность фазовой несимметрии оказываются равными. В этом случае

$$D^2 = \sqrt{Q^2 + T^2}. \quad (15.22)$$

6. Мощности двухполюсника при несинусоидальном режиме

Прежде чем переходить к общему случаю несинусоидального режима многополюсника, посмотрим, как выразить различные виды мощности двухполюсника через символические векторы напряжения $\vec{U}$ и тока $\vec{I}$ (см. выражения 4.3).

Поскольку длины векторов $\vec{U}$ и $\vec{I}$ равны

$$|\vec{U}| = \sqrt{\sum_{k=0}^s |\dot{U}_k|^2} \quad \text{и} \quad |\vec{I}| = \sqrt{\sum_{k=0}^s |\dot{I}_k|^2} \quad (6.1)$$

и представляют эффективные значения напряжения $u(t)$ и тока $i(t)$, то кажущаяся мощность получается как произведение длин векторов $\vec{U}$ к $\vec{I}$, то есть

$$S = |\vec{U}| |\vec{I}| \quad (6.2)$$

Вычисляя скалярное произведение вектора напряжения $\vec{U}$ и сопряженного вектора тока $\vec{I}$, обнаруживаем, что оно равно символической мощности двухполюсника. Действительно,

$$\vec{U} \cdot \vec{I} = U_0 I_0 + \dot{U}_1 \dot{I}_1 + \dots + \dot{U}_s \dot{I}_s = P + jQ. \quad (6.3)$$

Следовательно,

$$P = \text{Re}(\vec{U} \cdot \vec{I}), \quad (6.4)$$

$$Q = \text{Im}(\vec{U} \cdot \vec{I}). \quad (6.5)$$

Известно, что для двухполюсника квадрат кажущейся мощности равен сумме квадратов активной, реактивной и квадрата мощности искажения T_u . Мощность T_u , как это видно из выражения

$$|\vec{U} \cdot \vec{I}|^2 + |\vec{U} \times \vec{I}|^2 = |\vec{U}|^2 |\vec{I}|^2, \quad (6.6)$$

которое можно переписать в виде

$$P^2 + Q^2 + |\vec{U} \times \vec{I}|^2 = S^2, \quad (6.7)$$

равна абсолютному значению векторного произведения векторов $\vec{U}$ и $\vec{I}$, то есть

$$T_u = |\vec{U} \times \vec{I}| \quad (6.8)$$

Мощность искажения обращается в нуль, когда векторы $\vec{U}$ и $\vec{I}$ пропорциональны, что возможно только для цепи, состоящей из активных сопротивлений. Действительно, в этом случае

$$\vec{U} = r \vec{I},$$

где r — активное сопротивление двухполюсника, и

$$T_u = |\vec{U} \times \vec{I}| = |r(\vec{I} \times \vec{I})| = 0. \quad (6.9)$$

7. Мощности многополюсника при несинусоидальном режиме

Для n — полюсника символические векторы напряжения и тока, как мы видели, равны

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \\ \vdots \\ \vec{U}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{11} \\ \vdots \\ \dot{U}_{1s} \\ \dot{U}_{20} \\ \vdots \\ \dot{U}_{2s} \\ \vdots \\ \dot{U}_{no} \\ \vdots \\ \dot{U}_{ns} \end{pmatrix}, \quad \vec{I} = \begin{pmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ \vdots \\ \vec{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{I}_{10} \\ \dot{I}_{11} \\ \vdots \\ \dot{I}_{1s} \\ \dot{I}_{20} \\ \vdots \\ \dot{I}_{2s} \\ \vdots \\ \dot{I}_{no} \\ \vdots \\ \dot{I}_{ns} \end{pmatrix}, \quad (7.1)$$

где в компонентах $\dot{U}_{ik}$ и $\dot{I}_{ik}$ — первый индекс указывает номер зажима многополюсника, а второй индекс — номер гармоники.

Векторы действующих значений системы из n напряжений и n токов будут

$$\begin{aligned} \bar{U} = \begin{pmatrix} |\bar{U}_1| \\ |\bar{U}_2| \\ \vdots \\ |\bar{U}_n| \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\sum_{\kappa=0}^s U_{1\kappa}^2} \\ \sqrt{\sum_{\kappa=0}^s U_{2\kappa}^2} \\ \vdots \\ \sqrt{\sum_{\kappa=0}^s U_{n\kappa}^2} \end{pmatrix}, \\ \bar{I} = \begin{pmatrix} |\bar{I}_1| \\ |\bar{I}_2| \\ \vdots \\ |\bar{I}_n| \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\sum_{\kappa=0}^s I_{1\kappa}^2} \\ \sqrt{\sum_{\kappa=0}^s I_{2\kappa}^2} \\ \vdots \\ \sqrt{\sum_{\kappa=0}^s I_{n\kappa}^2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Пользуясь векторами $\bar{U}$, $\bar{I}$, $\bar{U}$ и $\bar{I}$, способом указанным в п. 6, приходим к следующим зависимостям, определяющим различные виды мощности n -полюсника

$$P = \operatorname{Re}(\bar{U} \cdot \bar{I}), \quad (7.3)$$

$$S = \bar{U} \cdot \bar{I}, \quad (7.4)$$

$$D = \sqrt{|\operatorname{Im}(\bar{U} \cdot \bar{I})|^2 + |\bar{U} \times \bar{I}|^2 - |\bar{U} \times \bar{I}|^2}. \quad (7.5)$$

Сравнивая эти выражения с полученными в п. 6, видим, что формально все виды мощности при несинусоидальном режиме определяются так же, как и при синусоидальном режиме, только символические векторы $\bar{u}$ и $\bar{i}$ должны строиться с учетом комплексов эффективных значений всех гармоник токов и напряжений.

В качестве примера рассмотрим определение различных видов мощности трехфазной цепи с нулевым проводом.

8. Мощности трехфазной цепи, фазы которой соединены в звезду с нулевым проводом

В рассматриваемой цепи в практике принято за начало отсчета напряжений брать нулевой провод. Обозначая напряжения фаз относительно нулевого провода через u_A, u_B и u_C и токи фаз через i_A, i_B и i_C , а ток нулевого провода через i_0 , строим, предполагая синусоидальный режим, символические векторы

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} \dot{U}_A \\ \dot{U}_B \\ \dot{U}_C \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{I} = \begin{pmatrix} \dot{I}_A \\ \dot{I}_B \\ \dot{I}_C \\ \dot{I}_D \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

Четвертая компонента вектора $\vec{U}$ принята равной нулю, так как напряжение между нулевым проводом и точкой отсчета, в качестве которой тоже взят нулевой провод, очевидно, равно нулю.

На основании выражений (5.2 и 5.6) находим активную и кажущуюся мощности

$$P = \operatorname{Re}(\vec{U} \cdot \vec{I}) = \sum_{k=A,B,C} U_k I_k \cos \varphi_k, \quad (8.2)$$

$$S = \vec{U} \cdot \vec{I} = \sum_{k=A,B,C} U_k I_k, \quad (8.3)$$

где

$$\vec{U} = \begin{vmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \vec{I} = \begin{vmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \\ I_D \end{vmatrix}. \quad (8.4)$$

Из соотношений (5.13, 5.15 и 5.16) определяем составляющие сопровождающей мощности

$$T = \sqrt{\sum_{p,q=A,B,C} |\dot{U}_p I_q - \dot{U}_q I_p|^2 + \left(\sum_{k=A,B,C} U_k^2\right) I_D^2}, \quad (8.5)$$

$$T_a = \sqrt{\sum_{p,q=A,B,C} |U_p I_q - U_q I_p|^2 + \left(\sum_{k=A,B,C} U_k^2\right) I_D^2}, \quad (8.6)$$

$$T_q = \sqrt{T^2 - T_a^2} = \sqrt{\sum_{p,q=A,B,C} (|\dot{U}_p I_q - \dot{U}_q I_p|^2 - |U_p I_q - U_q I_p|^2)}, \quad (8.7)$$

$$Q = \operatorname{Im}(\vec{U} \cdot \vec{I}) = \sum_{k=A,B,C} U_k I_k \sin \varphi_k. \quad (8.8)$$

В случае несинусоидального режима рассматриваемой цепи ход вычислений будет тот же самый, только вместо векторов (8.1) следует оперировать с векторами

$$\vec{\bar{U}} = \begin{vmatrix} \bar{U}_A \\ \bar{U}_B \\ \bar{U}_C \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \vec{\bar{I}} = \begin{vmatrix} \bar{I}_A \\ \bar{I}_B \\ \bar{I}_C \\ \bar{I}_D \end{vmatrix}, \quad (8.9)$$

где

$$\vec{\bar{U}}_A = \begin{vmatrix} \dot{U}_{AO} \\ \dot{U}_{A1} \\ \vdots \\ \dot{U}_{AS} \end{vmatrix}, \quad \vec{\bar{U}}_B = \begin{vmatrix} \dot{U}_{Bo} \\ \dot{U}_{B1} \\ \vdots \\ \dot{U}_{Bs} \end{vmatrix}, \quad \vec{\bar{U}}_C = \begin{vmatrix} \dot{U}_{Co} \\ \dot{U}_{C1} \\ \vdots \\ \dot{U}_{Cs} \end{vmatrix}, \quad (8.10)$$

$$\vec{\bar{I}}_A = \begin{vmatrix} \dot{I}_{AO} \\ \dot{I}_{A1} \\ \vdots \\ \dot{I}_{AS} \end{vmatrix}, \quad \vec{\bar{I}}_B = \begin{vmatrix} \dot{I}_{Bo} \\ \dot{I}_{B1} \\ \vdots \\ \dot{I}_{Bs} \end{vmatrix}, \quad \vec{\bar{I}}_C = \begin{vmatrix} \dot{I}_{Co} \\ \dot{I}_{C1} \\ \vdots \\ \dot{I}_{Cs} \end{vmatrix}, \quad \vec{\bar{I}}_D = \begin{vmatrix} \dot{I}_{Do} \\ \dot{I}_{D1} \\ \vdots \\ \dot{I}_{Ds} \end{vmatrix}.$$

Здесь U_{kl} и I_{kl} — комплексы эффективных значений напряжения и тока k -той фазы (включая и нулевой провод) для гармоник l .

9. О коэффициенте мощности

Если под коэффициентом активной мощности понимать величину, характеризующую отношение потребляемой многополюсником активной мощности к ее максимуму, то есть к кажущейся мощности, то для определения коэффициента мощности может служить выражение:

$$\lambda_p = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + D^2}} = \frac{\operatorname{Re}(\bar{U} \cdot \bar{I})}{\bar{U} \cdot \bar{I}}. \quad (9.1)$$

Поскольку составляющими сопровождающей мощности являются реактивная мощность и мощности несимметрии, то на величину коэффициента мощности оказывают влияние как фазовые сдвиги между токами и напряжениями, так и различного рода несимметрии (неидентичность форм кривых токов и напряжений, фазовые и амплитудные несимметрии относительно начала отсчета напряжений и т. д.).

Подобно (9.1), можно ввести понятие о коэффициенте сопровождающей мощности

$$\lambda_p = \frac{D}{S}. \quad (9.2)$$

Очевидно, что

$$\lambda_l + \lambda_p^2 = 1. \quad (9.3)$$

Это соотношение по своему внешнему виду совершенно подобно обычному выражению

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1, \quad (9.4)$$

где $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ соответственно коэффициенты активной и реактивной мощностей двухполюсника при синусоидальном режиме.

10. О теории Розенцвейга

В 1939 г. И. Розенцвейг предложил теорию мощности многофазных токов, основным положением которой является определение кажущейся мощности как максимальной активной мощности при заданных суммах квадратов эффективных напряжений и токов. Теория Розенцвейга легко распространяется и на общий случай многополюсной цепи. Автор настоящей работы одно время (в 1949 г.) также полагал, что в основе общей теории мощности должно лежать указанное положение. В последнее время в 1951 г. почти аналогичную теорию выдвинул Л. С. Лурье.

Однако задание сумм квадратов эффективных токов и напряжений, очевидно, значительно слабее характеризует состояние многополюсника, чем задание самих токов и напряжений. По этой причине мы полагаем, что принятое в настоящей работе определение кажущейся мощности более правильно, чем исходное положение теории Розенцвейга.

Заметим, что если распространить эту теорию на многополюсники общего вида, то выражения для различных видов мощности получатся в виде:

$$S = |\bar{U}| |\bar{I}|, P = \operatorname{Re}(\bar{U} \cdot \bar{I}), P = \sqrt{Q^2 + T^2},$$

где

$$Q = \operatorname{Im}(\bar{U} \cdot \bar{I}) \text{ и } T = |\bar{U} \times \bar{I}|. \quad (10.1)$$

Формулы эти применительно к многофазным цепям и были получены И. Розенцвейгом (в других обозначениях).

11. Выводы

В электрической цепи (многополюснике) в общем случае следует различать следующие виды мощности:

1. Активную (среднюю) мощность, равную действительной части скалярного произведения символического вектора напряжения на сопряженный вектор тока, то есть

$$P = \operatorname{Re}(\overline{\overline{U}} \cdot \overline{\widehat{I}}).$$

Величина этой мощности не зависит от выбора точки отсчета напряжений, приложенных к многополюснику.

2. Кажущуюся мощность, определяемую как максимальную активную мощность, которую можно получить при заданных эффективных значениях токов и напряжений многополюсника и равную скалярному произведению вектора эффективного напряжения на вектор тока, то есть

$$S = \overline{U} \cdot \overline{I}.$$

3. Сопровождающую мощность, учитывающую разницу между величинами активной и кажущейся мощности, равную корню квадратному из разности квадратов кажущейся и активной мощностей, то есть

$$D = \sqrt{S^2 - P^2}.$$

Существенно заметить, что мощности S и D приобретают определенное значение лишь после задания точки отсчета напряжений многополюсника.

Сопровождающая мощность в свою очередь состоит из ряда частей: реактивной мощности и мощностей несимметрии, причем все эти виды мощностей связаны квадратичной зависимостью

$$D^2 = Q^2 + T_\varphi^2 = Q^2 + T^2 - T_a^2,$$

где Q определяется мнимой частью скалярного произведения векторов $\overline{\overline{U}}$ и $\overline{\widehat{I}}$, то есть

$$Q = \operatorname{Im}(\overline{\overline{U}} \cdot \overline{\widehat{I}}),$$

а мощности T , T_a и T_φ определяются как абсолютные величины векторных произведений векторов $\overline{\overline{U}}$, $\overline{\widehat{I}}$, $\overline{U}$ и $\overline{I}$, то есть

$$T = |\overline{\overline{U}} \times \overline{\widehat{I}}|, \quad T_a = |\overline{U} \times \overline{I}|,$$

$$T_\varphi = \sqrt{|\overline{\overline{U}} \times \overline{\widehat{I}}|^2 - |\overline{U} \times \overline{I}|^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. К. А. Круг. Основы электротехники, т. 2, 1946.
2. I. Rosenzweig. — Symboliczny wielowymiarowy rachunek wektorowy jako metoda analizy układow wielofazowych. Czasopismo techniczne, № 6, ..., 11, Львов, 1939.
3. W. Quade. — Wirk-, Blind- und Scheinleistung bei Wechselströmen mit beliebiger Kurvenform. Avch. f. El. 28, 1934, s. 130.
4. W. Quade. — Zusammensetzung der Wirk-, Blind- und Scheinleistung bei Wechselströmen beliebiger Kurvenform und neue Leistungsdefinitionen für unsymmetrische Mehrphasenteile beliebiger Kurvenform. E.T.Z. 58, 1937, s. 1312.

5. Л. С. Лурье. Кажущаяся мощность трехфазной системы. Электричество, № 1, 1951.
 6. Л. С. Лурье. Коэффициент мощности несимметричной нагрузки трехфазной нагрузки. Электричество, № 3, 1952.
 7. М. Е. Сыркин. Некоторые вопросы теории резонанса в трехфазных цепях. Труды института энергетики АН Уз. ССР, вып. 3, 1949.
 8. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 3, 1934.
 9. Г. Е. Пухов. Теория потока энергии, когда обобщенные силы и скорости суть периодические функции времени. Научные записки Льв. ПИ, вып. VIII, 1949.
 10. Г. Е. Пухов. Теория мощности периодических многофазных токов. Электричество № 2, 1953.
-