ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
Том 72 ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА 1952 г.

О ПРЕДЕЛЬНОЙ ФОРМЕ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОГОКАСКАДНОГО ПОЛОСОВОГО УСИЛИТЕЛЯ

Е. И. ФИАЛКО

1. Предварительные замечания

Свойства полосовых усилителей достаточно полно рассмотрены в ряде работ советских исследователей, в частности в работах В. И. Сифорова [**1,2**], Н. И. Чистякова [**3**], А. А. Колосова [4] и др.

В настоящей статье рассматривается частный вопрос, а именно: предельные свойства усилителя, собранного на полосовых фильтрах при оптимальной связи между контурами фильтра (причём контуры обладают одинаковыми затуханиями и имеют одинаковые резонансные частоты). Эта задача представляет интерес не только потому, что её решение определяет ту наивысшую избирательность, которая достижима в этом виде усилителя, но также и вследствие того, что предельные свойства, соответствующие бесконечному числу каскадов, достаточно объективны и для случая конечного, но весьма большого числа каскадов.

С точки зрения реальной чувствительности полезно выяснение соотношения между полосой шумов и полосой пропускания усилителя.

Кроме того, представляет интерес сравнительная оценка предельных свойств многокаскадных полосового и резонансного усилителей.

Для решения этих задач необходимо найти уравнение амплитудно-частотной характеристики многокаскадного полосового усилителя с фиксированной результирующей полосой пропускания при бесконечно большом числе каскадов.

Предварительно рассмотрим полосовой усилитель с конечным числом каскадов.

2. Многокаскадный полосовой усилитель

Как известно [**1—3**], амплитудно-частотная характеристика каскада полосового усилителя с двумя связанными одинаковыми [1]) контурами описывается уравнением

$$y=\frac{1+\eta^2}{\sqrt{(1-x^2+\eta^2)^2+4x^2}}, \tag{1}$$

где x — обобщенная расстройка контуров полосового фильтра,

η — относительный коэффициент связи между контурами фильтра;

$$x=\frac{\Delta f}{\Delta F_0}\left(1+\frac{f_0}{f}\right), \tag{2}$$

$\Delta f=f-f_0$ — абсолютная расстройка контуров,

f_0 — резонансная частота контуров,

1) Формула (1) справедлива в случае, когда контуры, входящие в полосовой фильтр, обладают одинаковыми затуханиями и имеют одинаковые частоты. Для краткости такие контуры называем здесь и в дальнейшем одинаковыми.

$\Delta F_0 = d.f_0$ — полоса пропускания контура, отсчитанная на уровне 0,7;

$$\eta = \frac{k_{св}}{d},$$

$k_{св}$ — коэффициент связи между контурами фильтра,
d — затухание контура.

При оптимальной связи между контурами полосового фильтра $k_{св} = d$ ($\eta = 1$), и формула (1) примет вид

$$y_1 = \frac{2}{\sqrt{4 + x^4}}. \qquad (3)$$

Амплитудно-частотная характеристика полосового усилителя, состоящего из n одинаковых каскадов, описывается уравнением

$$y_n = y_1{}^n = \left(\frac{2}{\sqrt{4 + x^4}}\right)^n. \qquad (4)$$

Нас интересует изменение формы этой характеристики при увеличении числа каскадов в случае, когда результирующая полоса пропускания поддерживается постоянной. Но для того, чтобы результирующая полоса пропускания осталась неизменной с подключением нового каскада, необходимо увеличить полосу пропускания каждого контура ΔF_0. Таким образом, обобщенная расстройка x оказывается зависящей и от n. Найдем эту зависимость, для чего, прежде всего, выразим величину результирующей полосы пропускания усилителя ΔF_n через полосу пропускания контура ΔF_0 и число каскадов n.

Обычно отсчитывают полосу пропускания на уровне $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7$. Положив в формуле (4) $y_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$, найдем обобщенную расстройку, соответствующую уровню 0,7

$$x_{0,7} = \sqrt{2}\sqrt[4]{\sqrt[n]{2} - 1}. \qquad (5)$$

Из (5) и (2) находим положительную и отрицательную абсолютные расстройки ($\Delta f_{0,7(+)}$ и $\Delta f_{0,7(-)}$), соответствующие $y_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$, и определяем результирующую полосу пропускания

$$\Delta F_{0,7} = \Delta f_{0,7(+)} + |\Delta f_{0,7(-)}|.$$

Вследствие некоторой асимметрии резонансной характеристики колебательного контура результирующая характеристика полосового усилителя будет также асимметричной и

$$\Delta f_{0,7(+)} > |\Delta f_{0,7(-)}|.$$

В случае, когда результирующая полоса пропускания ΔF_n мала по сравнению с резонансной частотой f_0, а расстройки Δf соизмеримы с ΔF_n $\left(\text{т. е. при } \frac{f}{f_0} \approx 1\right)$, результирующая характеристика практически становится симметричной, что позволяет существенно упростить выкладки.

При $\dfrac{f}{f_0} \approx 1$ обобщенная расстройка примет вид:

$$x = \frac{2\Delta f}{\Delta F_0}. \tag{6}$$

Учитывая, что $2\Delta f_{0,7} = \Delta F_n$, из (5) и (6) найдем

$$\Delta F_n = \Delta F_0 . \sqrt{2} . \sqrt[4]{\sqrt[n]{2} - 1}. \tag{7}$$

Примечание. Выразим полосу пропускания полосового каскада ΔF_1 через полосу пропускания контура ΔF_0 (в формуле (7) положим $n = 1$):

$$\Delta F_1 = \sqrt{2}\, \Delta F_0. \tag{8}$$

Подставив (8) в (7), выразим полосу усилителя через полосу каскада

$$\Delta F_n = \Delta F_1 . \sqrt[4]{\sqrt[n]{2} - 1}. \tag{9}$$

Представив $\sqrt[n]{2}$ в виде степенного ряда и пренебрегая в случае достаточно большого n членами ряда, начиная с 3-го, получим

$$\Delta F_n = \Delta F_0 \sqrt{2}\, \frac{\sqrt[4]{\ln 2}}{\sqrt[4]{n}}, \tag{10}$$

$$\Delta F_n = \Delta F_1 \frac{\sqrt[4]{\ln 2}}{\sqrt[4]{n}}, \tag{11}$$

или

$$\Delta F_n = 1{,}295\, \frac{\Delta F_0}{\sqrt[4]{n}}, \tag{10a}$$

$$\Delta F_n = 0{,}915\, \frac{\Delta F_1}{\sqrt[4]{n}}. \tag{11a}$$

Обобщенная расстройка при достаточно большом числе каскадов равна (см. (6) и (10))

$$x = \frac{\Delta f}{\Delta F_n} \frac{\sqrt[4]{\ln 2} \cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{n}}. \tag{12}$$

После подстановки (12) в (4) и простых преобразований амплитудно-частотная характеристика многокаскадного полосового усилителя в случае достаточно большого числа каскадов примет вид

$$y = \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \left(\dfrac{2\Delta f}{\Delta F_n}\right)^4 \dfrac{\ln 2}{n}}\right)^n}. \tag{13}$$

3. Предельная форма амплитудно-частотной характеристики многокаскадного полосового усилителя

Совершенно очевидно, что подсоединение каждого последующего каскада, в случае достаточно большого числа каскадов и при поддержании неизменной результирующей полосы пропускания, будет изменять форму результирующей амплитудно-частотной характеристики лишь незначительно (напомним, что рассматривается случай, когда каскады имеют одинаковые амплитудно-частотные характеристики).

Найдем предельное выражение амплитудно-частотной характеристики усилителя при $n \gg 1$.

Уравнение (13) представим в виде

$$y_n \approx \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2\Delta f}{\Delta F_n}\right)^4 \frac{\ln 2}{n}\right]^n. \tag{14}$$

Вводя

$$\beta = -\frac{\ln 2}{2}\left(\frac{2\Delta f}{\Delta F_n}\right)^4, \tag{15}$$

получим

$$y_n \approx \left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^n. \tag{16}$$

Производя формальный переход к пределу и учитывая, что при конечных расстройках β—конечная величина, получим

$$y = \lim_{n \to \infty} y_n = e^{\beta}$$

или

$$y = e^{-\frac{\ln 2}{2}\left(\frac{2\Delta f}{\Delta F_n}\right)^4} \tag{17}$$

и окончательно

$$y = e^{-\frac{5{,}55}{\Delta F_n^4}\cdot\Delta f^4}, \tag{17a}$$

где ΔF_n — результирующая полоса пропускания, отсчитанная на уровне 0,7. Заметим, что при $n \to \infty$ полоса пропускания контура $\Delta F_0 \to \infty$; физически, естественно, невыполнимы оба эти условия.

Кроме того, при увеличении числа каскадов n увеличивается и требуемое затухание контура d (при постоянной ΔF_n).

В самом деле, из (10a) следует

$$d = \Delta F_n \cdot \sqrt[4]{n} \cdot 0{,}77 \cdot \frac{1}{f_0}. \tag{18}$$

При очень большом n требуемое затухание $d > 1$.

Ясно, что при этом оптимальная связь между контурами фильтра уже невыполнима: как известно, теоретический предел коэффициента связи

$$k_{св.max} = 1.$$

Таким образом, существует некоторое максимальное число каскадов n_{max}, при превышении которого оптимальная связь невыполнима не только практически, но и теоретически.

Используя формулу (18), нетрудно показать, что n_{max} равняется целой части величины

$$4 \ln 2\left(\frac{f_0}{\Delta F_н}\right)^4 \approx 2{,}8\left(\frac{f_0}{\Delta F_n}\right)^4. \tag{19}$$

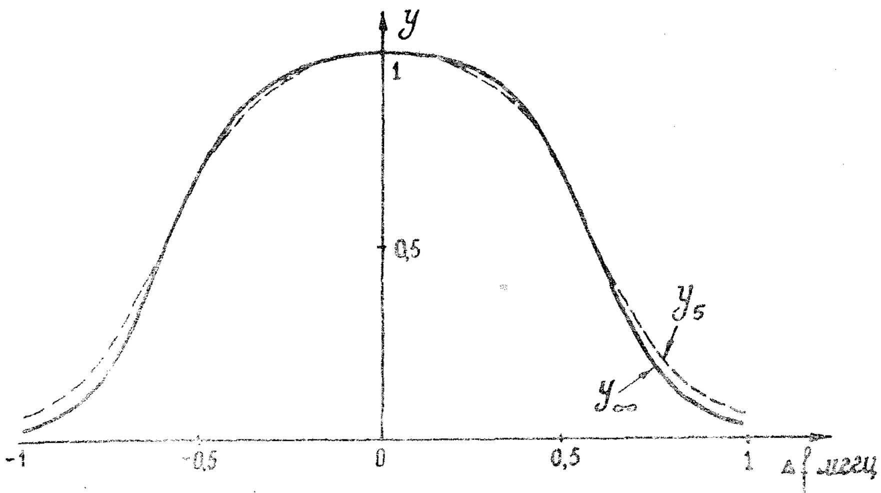
Так как обычно резонансная частота значительно больше полосы пропускания усилителя, то n_{max} весьма велико и

$$\left(1+\frac{\beta}{n_{max}}\right)^{n_{max}}$$

весьма мало отличается от e^{β}.

В практических схемах число каскадов n значительно меньше, чем n_{max}, но и при этом амплитудно-частотные характеристики многокаскадных усилителей хорошо апроксимируются уравнением (17).

В качестве иллюстрации на фиг. 1 приведены:



Фиг. 1

1. Амплитудно-частотная характеристика пятикаскадного полосового усилителя, построенная по формуле

$$y_5=\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^4}{4}}}\right)^5,$$

где

$$x=\frac{2\sqrt{2}\,\sqrt[4]{\ln 2}}{\Delta F_n\sqrt[4]{5}}\Delta f.$$

2. Кривая

$$y_\infty=e^{-\frac{ln2}{2}\left(\frac{2\Delta f}{\Delta Fn}\right)^4}$$

для случая $\Delta F_n=10^6$ *герц*.

Как видим, расхождение между этими кривыми ничтожно (при $|\Delta f|\leq\frac{1}{2}\Delta F_n$).

Таким образом, предельный переход ($n\to\infty$)—незаконный с физической точки зрения, и амплитудно-частотные характеристики реальных усилителей не могут точно совпасть с предельными кривыми. Однако отклонение амплитудно-частотных характеристик реальных многокаскадных усилителей от предельной характеристики—весьма незначительно.

4. Коэффициент прямоугольности предельной амплитудно-частотной характеристики многокаскадного полосового усилителя

Форма характеристики обычно оценивается коэффициентом прямоугольности, то есть отношением полос пропускания на уровнях 0,7 и 0,1

$$k_{пр}=\frac{\Delta F_{0,7}}{\Delta F_{0,1}}. \tag{20}$$

Подставив в (17) $y=0,1$ и учитывая, что $2\Delta f_{0,1}=\Delta F_{0,1}$, получим:

$$0,1=e^{-\frac{\ln 2}{2}\left(\frac{1}{k_{пр}}\right)^4},$$

откуда

$$k_{пр}\approx 0,62.$$

Как известно, коэффициент прямоугольности амплитудно-частотной характеристики резонансного усилителя не превышает 0,39. Следовательно, избирательные свойства многокаскадного полосового усилителя при оптимальной связи между контурами значительно выше, чем у многокаскадного резонансного усилителя (при одинаковых полосах пропускания):

$$\frac{k_{пр.\ пол}}{k_{пр.\ ре}}=1,6.$$

Формой амплитудно-частотной характеристики определяется не только избирательность, но и соотношение между полосой шумов и полосой пропускания. Это соотношение представляет интерес в связи с проблемой реальной чувствительности.

5. Полоса шумов

По определению [2] полоса шумов $\Delta F_ш$ равна:

$$\Delta F_ш=\int\limits_0^\infty y^2 df. \tag{21}$$

При определении $\Delta F_ш$ следует пользоваться выражением амплитудно-частотной характеристики для любых расстроек. Однако, так как ветви амплитудно-частотной характеристики при увеличении расстройки спадают достаточно быстро, то в случае, когда полоса пропускания мала по сравнению с резонансной частотой, можно воспользоваться уравнением (17).

Подставив (17) в (21), получим

$$\Delta F_ш=\int\limits_0^\infty e^{-\ln 2\left(\frac{2\Delta f}{\Delta F_п}\right)^4} df, \tag{22}$$

где $\Delta f=f-f_0$

Вводя новую переменную $t=\frac{\sqrt[4]{\ln 2}\cdot 2(f-f_0)}{\Delta F_п}$,

приведем (22) к виду:

$$\Delta F_ш=\Delta F_п\frac{1}{2\sqrt[4]{\ln 2}}\int\limits_\varepsilon^\infty e^{-t^4}\cdot dt,\ \text{где}\ \varepsilon 2\sqrt[4]{\ln 2}\cdot\frac{f_0}{\Delta F_п}, \tag{23}$$

Для случая $\frac{\Delta F_n}{f_0} \ll 1$ можем, не внося существенной погрешности, заменить нижний предел, положив его равным „$-\infty$“ (так как ветви кривой e^{-t^4} очень быстро спадают). Учитывая также то, что подинтегральная функция чётная, получим:

$$\Delta F_ш \approx \Delta F_n \frac{1}{\sqrt[4]{\ln 2}} \int_0^\infty e^{-t^4} dt. \tag{24}$$

Воспользовавшись справочным материалом, найдем [5]:

$$\int_0^\infty e^{-t^4} dt = \left(\frac{1}{4}\right)! = 0{,}9064.$$

Подставляя последнее значение в (24), получим:

$$\Delta F_ш \approx 0{,}99 . \Delta F_n , \tag{25}$$

то есть шумовая полоса рассматриваемого полосового усилителя практически равна полосе пропускания на уровне 0,7.

Сравним шумовые полосы многокаскадных полосового и резонансного усилителей, имеющих одинаковые полосы пропускания. Воспользовавшись известным предельным уравнением амплитудно-частотной характеристики многокаскадного резонансного усилителя [2]

$$y = e^{-\alpha \, \Delta . f^2}, \tag{26}$$

легко показать, что полоса пропускания, измеренная на уровне 0,7, и шумовая полоса связаны простым соотношением:

$$\Delta F_ш \approx 1{,}06 . \Delta F_n. \tag{27}$$

Сравнивая формулы (25) и (27), видим, что шумовая полоса многокаскадного полосового усилителя меньше шумовой полосы многокаскадного резонансного усилителя на несколько процентов (при этом полосы пропускания одинаковы). Вследствие этого, применение рассматриваемого многокаскадного полосового усилителя, повидимому, повысит (однако незначительно) реальную чувствительность приемного устройства по сравнению со случаем применения многокаскадного резонансного усилителя. Этот вопрос требует более подробного исследования.

Выводы

В работе рассмотрен частный случай многокаскадного полосового усилителя, а именно: усилитель, все каскады которого имеют одинаковые амплитудно-частотные характеристики, причём каждый каскад содержит двухконтурный полосовой фильтр с оптимально-связанными контурами, контуры фильтра имеют одинаковые затухания и настроены на одну и ту же частоту.

При увеличении числа каскадов амплитудно-частотная характеристика такого усилителя достаточно хорошо характеризуется функцией

$$y = e^{-a . \Delta f^4}, \tag{28}$$

где

$$a = \frac{8 \ln 2}{\Delta F^4},$$

ΔF — результирующая полоса пропускания, измеренная на уровне $y = 0{,}7$;

$\Delta f = f - f_0$ — абсолютная расстройка контуров.

Коэффициент прямоугольности характеристики (28), оценивающий предельные избирательные свойства рассмотренного полосового усилителя, равен:

$$k_{пр} \approx 0{,}62$$

и значительно превышает предельное значение коэффициента прямоугольности многокаскадного резонансного усилителя ($k_{пр} \approx 0{,}39$).

Полоса шумов практически равна полосе пропускания, отсчитанной на уровне 0,7.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сифоров В. И. Полосовые усилители, ОНТИ, 1936.
2. Сифоров В. И. Радиоприемные устройства, Изд. ЛКВВИА, 1947.
3. Чистяков Н. И. Резонансные усилители и предварительные селекторы, Связьиздат, 1939.
4. Колосов А. А. Резонансные системы и резонансные усилители, Связьиздат, 1949.
5. Янке и Эмде. Таблицы функций, ОГИЗ, 1948.