

К ВОПРОСУ О ПРЕДЕЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ МНОГОКАСКАДНОГО ПОЛОСОВОГО УСИЛИТЕЛЯ

Е. И. ФИАЛКО

Постановка задачи

В некоторых случаях необходимо знать не только амплитудно-частотную характеристику радиоустройства, но и его фазо-частотную характеристику (как, например, при анализе искажений импульсных сигналов в радиопередатчиках). В ряде случаев вообще представляет интерес только фазо-частотная характеристика (например, в некоторых фазометрических устройствах).

Имеется несколько методов построения фазо-частотных характеристик.

Как известно, между амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристиками ($K(\omega)$ и $\varphi(\omega)$) существует вполне определенная зависимость [1]:

$$\int_0^{\infty} \frac{K(\omega)}{\omega} \cdot \cos[\omega t - \varphi(\omega)] dt = 0. \quad (1)$$

Поэтому, зная $K(\omega)$, можем, вообще говоря, найти $\varphi(\omega)$. Этот метод отыскания фазо-частотной характеристики был реализован А. П. Белюсовым [2] для случая, когда амплитудно-частотная характеристика системы описывается вероятностной (гауссовой) кривой; было показано, что фазо-частотная характеристика является прямой линией, перпендикулярной к оси частот. Как известно, вероятностная кривая является предельной формой амплитудно-частотной характеристики многокаскадного резонансного усилителя [3].

В настоящей работе рассматривается другой предельный случай—многокаскадный полосовой усилитель с бесконечно большим числом каскадов.

Мы ограничимся двумя частными задачами: найдем предельную форму фазо-частотной характеристики многокаскадного полосового усилителя, построенного на одинаковых двухконтурных фильтрах при весьма слабой и оптимальной связи между контурами фильтров (причем, контуры, входящие в фильтр, настроены на одну частоту и обладают одинаковыми затуханиями. В дальнейшем такие контуры будем называть одинаковыми). Так как решение интегрального уравнения (1) весьма громоздко, то воспользуемся более простым способом построения фазо-частотной характеристики, изложенным ниже.

Фазо-частотная характеристика полосового каскада многокаскадного полосового усилителя

Фазо-частотная характеристика полосового каскада с двумя связанными одинаковыми контурами выражается зависимостью [3;4]:

$$\varphi = \arctg \frac{1 - x^2 + \eta^2}{2x}, \quad (2)$$

¹⁾ Это интегральное уравнение справедливо для случая отсутствия постоянной составляющей тока в установившемся режиме.

где

x — обобщенная расстройка контуров фильтра,

η — относительный коэффициент связи между контурами фильтра;

$$x = \frac{\Delta f}{\Delta F_0} \left(1 + \frac{f_0}{f} \right), \quad (3)$$

$\Delta f = f - f_0$ — абсолютная расстройка контуров фильтра,

f_0 — резонансная частота контуров,

ΔF_0 — полоса пропускания контура, отсчитанная на уровне 0,7;

$K_{св}$ — коэффициент связи между контурами фильтра,

d — затухание контура.

Для случая оптимальной связи между контурами фильтра $K_{св} = d$ и формула (2) примет вид:

$$\varphi = \arctg \frac{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2}{x}. \quad (4)$$

В дальнейшем будем полагать, что

$$\frac{f}{f_0} \approx 1.$$

Это допущение справедливо, если результирующая полоса пропускания усилителя мала по сравнению с частотой f_0 , на которую настроены контуры, а рассматриваемые расстройки соизмеримы с результирующей полосой пропускания. (Заметим, что наибольший интерес представляет та часть фазо-частотной характеристики, которая заключена в интервале частот, соизмеримом с полосой пропускания усилителя). В силу этого

$$x \approx \frac{2\Delta f}{\Delta F_0}. \quad (5)$$

Заметим также, что в случае оптимальной связи между контурами фильтра полоса пропускания фильтра равна [3]

$$\Delta F_1 = \sqrt{2} \cdot \Delta F_0. \quad (6)$$

Найдем предельную форму фазо-частотной характеристики каскада при увеличении числа каскадов и поддержании заданной (постоянной) результирующей полосы пропускания. Для этого предварительно выразим полосу пропускания одного каскада (ΔF_1) через число каскадов (n) и полосу пропускания всего усилителя (ΔF_n).

Как известно, при достаточно большом n

$$\Delta F_1 = \Delta F_n \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{\ln 2}}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6) и затем в (5), получим:

$$x = \frac{2 \sqrt{2} \sqrt[n]{\ln 2}}{\Delta F_n \cdot \sqrt[n]{n}} \Delta f. \quad (8)$$

Если нас интересует форма фазо-частотной характеристики в пределах полосы пропускания (или при расстройках, соизмеримых с полосой пропускания) усилителя, то при достаточно большом n $x \ll 1$, и формула (4) примет вид:

$$\varphi_1 \approx \arctg \frac{1}{x}. \quad (9)$$

Разлагая $\arctg x$ в ряд и пренебрегая членами ряда, содержащими x в 3-й и более высоких степенях, получим

$$\varphi_1 \approx \frac{\pi}{2} - \Delta f \cdot \tau_1, \quad (10)$$

где

$$\tau_1 = \frac{2 \cdot 10^{-4} / \ln 2}{\Delta F_n \cdot \sqrt{n}}. \quad (11)$$

Как видим, фазо-частотная характеристика одного полосового каскада при увеличении n спрямляется и, вращаясь вокруг точки $\left(\varphi_1 = \frac{\pi}{2}; f = f_0\right)$, приближается к горизонтальной прямой, приподнятой на постоянный фазовый угол, равный $\frac{\pi}{2}$ (см. фиг. 1).

Рассмотрим теперь случай весьма слабой связи ($\eta \rightarrow 0$). Теоретически такой случай мог бы иметь место при беспредельном увеличении числа каскадов, но при поддержании неизменной результирующей полосы пропускания: при этом затухание d контура увеличивается по мере увеличения n , коэффициент же связи не может превысить $K_{св \max} = 1$; поэтому

$$\eta = \frac{K_{св}}{d} \rightarrow 0.$$

В этом случае (см. формулу (2))

$$\varphi = \arctg \frac{1-x^2}{2x}. \quad (12)$$

Выразим приведенную расстройку x через полосу пропускания усилителя.

Как известно, в случае весьма слабой связи

$$\Delta F_0 = \Delta F_n \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{\frac{2}{\ln 2}}. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (5), имеем:

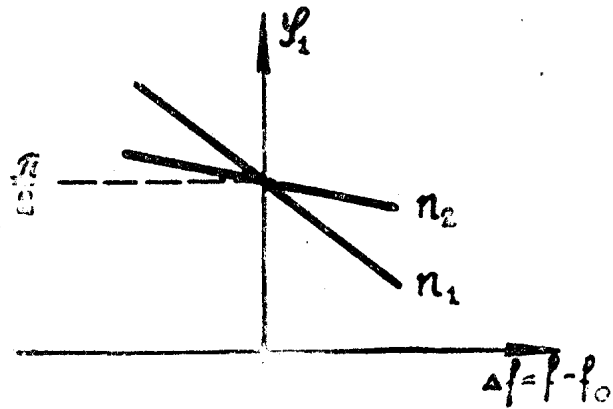
$$x = \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\Delta F_n \cdot \sqrt{n}} \cdot \Delta f. \quad (14)$$

Если расстройки Δf соизмеримы с ΔF_n , то при весьма большом числе каскадов $x \ll 1$ и формула (12) примет вид

$$\varphi \approx \arctg \frac{1}{2x}. \quad (15)$$

Разлагая $\arctg 2x$ в ряд и пренебрегая членами ряда, начиная с членов, содержащих x в третьей степени, получим:

$$\varphi_1 \approx \frac{\pi}{2} - \Delta f \cdot \tau_1, \quad (16)$$



Фиг. 1. Фазо-частотная характеристика $\varphi_1(f)$ каскада многокаскадного полосового усилителя (в области малых расстроек).

$$n_2 > n_1 \gg 1$$

где

$$\tau_1 = \frac{2\sqrt{2\ln 2}}{\Delta F_n \sqrt{n}}.$$

Таким образом, и в этом случае фазо-частотная характеристика каскада при увеличении n спрямляется и, вращаясь вокруг точки $\left(\varphi_1 = \frac{\pi}{2}; f = f_0\right)$, стремится к горизонтальному положению (фиг. 1).

Перейдем теперь к рассмотрению многокаскадного полосового усилителя.

Фазо-частотная характеристика многокаскадного полосового усилителя

Случай весьма слабой связи

Фазо-частотная характеристика n -каскадного усилителя (φ_n) в случае одинаковых каскадов может быть представлена в виде

$$\varphi_n = n \cdot \varphi_1. \quad (17)$$

Полагая n большим, получим из (16) и (17)

$$\varphi_n = n \frac{\pi}{2} - \tau_n \Delta f, \quad (18)$$

где в случае весьма слабой связи

$$\tau_n = \frac{2\sqrt{2\ln 2} \sqrt{n}}{\Delta F_n}. \quad (19)$$

Из формул (18) и (19) следует ряд выводов.

При достаточно большом n фазо-частотная характеристика близка к прямой линии. Точнее, участок фазочастотной характеристики, соответствующий обобщенным расстройкам $x \ll 1$, прямолинеен.

Фазо-частотная характеристика полосового усилителя содержит, наряду с составляющей $\tau_n \Delta f$, еще и постоянную составляющую $n \frac{\pi}{2}$. Этим поло-

совый усилитель существенно отличается от резонансного усилителя, фазо-частотная характеристика которого не содержит постоянной составляющей и при $n \gg 1$ является прямой, проходящей через точку $(\varphi = 0; f = f_0)$.

При увеличении числа каскадов фазо-частотная характеристика полосового усилителя становится круче и одновременно скачками приподнимается (см. фиг. 2). В пределе при $n \rightarrow \infty$, фазо-частотная характеристика

наклоняется к оси частот под углом $\frac{\pi}{2}$ и содержит постоянное слагаемое

$$\left(\frac{\pi}{2}\right), \text{ принимающее бесконечное множество значений кратных } \frac{\pi}{2}.$$

Можно показать, что амплитудно-частотная характеристика полосового усилителя при $n \rightarrow \infty$ и $\eta \rightarrow 0$ стремится к вполне определенному пределу:

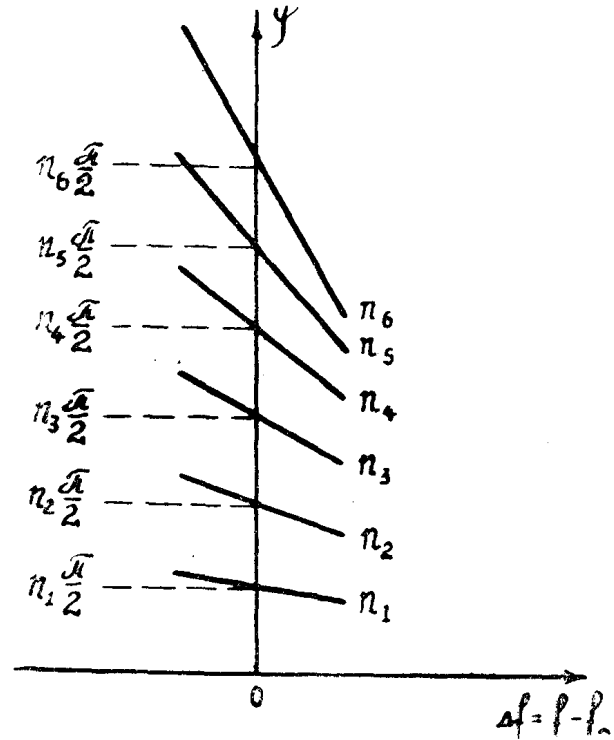
$$e^{-\alpha \Delta f^2}. \quad (20)$$

Таким образом, зависимость между предельными амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристиками многокаскадного полосового усилителя оказывается неоднозначной, причем одной амплитудно-частотной характеристике соответствует бесконечное множество фазо-частотных характеристик.

Однако в некоторых случаях бесконечное множество фазо-частотных характеристик возможно свести к конечному числу линий (например, в

Фиг. 2. Фазо-частотные характеристики $\varphi_n(f)$ многокаскадных полосовых усилителей (в области малых расстроек).

$$n_3 > n_2 > n_1$$



случае, когда фазовый угол входит в аргумент периодической функции). В самом деле, представив n ($n \gg 1$) в виде

$$n = 4m + K,$$

где m — целое, а K принимает четыре значения

$$K = 0; 1; 2; 3,$$

запишем формулу (18) следующим образом:

$$\varphi_n \approx m 2\pi + K \frac{\pi}{2} - \tau_n \Delta f. \quad (21)$$

Если фазовый угол φ_n входит в аргумент некоторой периодической функции F , то

$$F(\varphi_n) = F(\varphi_n - m \cdot 2\pi),$$

и результат будет такой же, как если бы фазо-частотная характеристика имела вид

$$\varphi_n^{(*)} = K \frac{\pi}{2} - \tau_n \Delta f. \quad (22)$$

При увеличении числа каскадов крутизна фазо-частотной характеристики $\varphi_n^{(*)}$ увеличивается, а постоянный фазовый сдвиг принимает значения

$$0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3}{2}\pi, \quad (23)$$

затем снова $0, \frac{\pi}{2}$ и т. д. (фиг. 3). Таким образом, фазо-частотные характеристики разобьются на 4 группы, в пределе при $n \rightarrow \infty$ фазо-частотная характеристика будет принимать 4 значения:

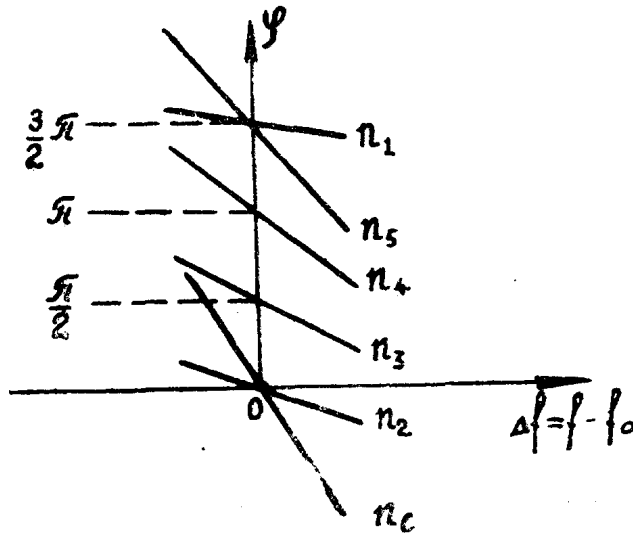
$$\varphi_n^{(*)} = \begin{cases} -\tau_n \cdot \Delta f \\ \frac{\pi}{2} - \tau_n \cdot \Delta f \\ \pi - \tau_n \cdot \Delta f \\ \frac{3}{2} \pi - \tau_n \cdot \Delta f \end{cases} \quad (\tau_n \rightarrow \infty) \quad (24)$$

Анализируя, например, прохождение импульсного сигнала через полосовой радиопропускной фильтр с амплитудно-частотной характеристикой

$$y = e^{-\alpha \cdot \Delta f^2},$$

необходимо рассмотреть 4 частных случая, отличающихся друг от друга различной величиной постоянной составляющей фазо-частотной характеристики.

Напомним, что при анализе прохождения импульсного сигнала через многокаскадный резонансный усилитель этого осложнения нет, вследствие



Фиг. 3. Фазо-частотные характеристики $\varphi_n^{(*)}(f)$ многокаскадных полосовых усилителей (в области малых расстройек).

$$n_6 > n_5 > \dots > n_1$$

однозначной зависимости между предельными амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристиками многокаскадного резонансного усилителя. Заметим, что величина постоянного фазового сдвига скажется лишь на смещении во времени высокочастотного заполнения, а на форме огибающей сигнала не скажется.

Случай оптимальной связи

Фазо-частотная характеристика n — каскадного полосового усилителя в случае одинаковых каскадов и оптимальной связи между контурами фильтра может быть представлена в виде (см. (17), (10) и (11)):

$$\varphi_n = n \frac{\pi}{2} - \tau_n \cdot \Delta f, \quad (25)$$

где

$$\tau_n = - \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\ln 2}}{\Delta F_n} \cdot n^{\frac{3}{4}} \quad (26)$$

Следовательно, при увеличении числа каскадов фазо-частотная характеристика спрямляется, становится круче и одновременно скачками повышается (фиг. 2).

Этот случай ($\tau_1 = 1$) отличается от предыдущего только тем, что при одной и той же полосе пропускания и одном и том же числе каскадов крутизна фазо-частотной характеристики в случае оптимальной связи будет больше, чем в случае весьма слабой связи (см. (26) и (19)).

Иногда например, когда фазовый угол входит в аргумент периодической функции, семейство характеристик (25) может быть представлено в виде четырех групп (см. (21)–(23)).

$$\varphi_n^{(*)} = \begin{cases} -\tau_n \Delta f & \text{при } n = 4m, \\ \frac{\pi}{2} - \tau_n \Delta f & \text{при } n = 4m + 1, \\ \pi - \tau_n \Delta f & \text{при } n = 4m + 2, \\ \frac{3}{2}\pi - \tau_n \Delta f & \text{при } n = 4m + 3, \end{cases} \quad (27)$$

где m — целое число, а τ_n определяется по формуле (26). Оптимальная связь теоретически осуществима при $n < n_{\max}$, где $n_{\max}$ — целая часть

$$\left\{ \left(\frac{f_0}{\Delta F_n} \right)^4 \cdot 4 \cdot \ln 2 \right\}.$$

Обычно $n_{\max} \gg 1$, поэтому амплитудно-частотная характеристика рассматриваемого усилителя при числе каскадов, равном $n_{\max}$, будет весьма мало отличаться от кривой

$$v = e^{-3\Delta f^4}. \quad (28)$$

Формула (28) получается при переходе к $n \rightarrow \infty$.

Хотя переход к $n > n_{\max}$ не оправдан физически, однако функция (28) хорошо аппроксимирует амплитудно-частотные характеристики многокаскадных полосовых усилителей этого вида. Но аппроксимируя амплитудно-частотную характеристику усилителя функцией (28), необходимо найти соответствующую ей фазо-частотную характеристику. Для этого следует в (27) также перейти к $n \rightarrow \infty$.

Итак, приходим к тем же выводам, что и в предыдущем случае.

В частности зависимость между амплитудно-частотной характеристикой, представленной в виде (28) и соответствующей ей фазо-частотной характеристикой, оказывается неоднозначной: одной амплитудно-частотной характеристике соответствует бесконечное множество фазо-частотных характеристик; однако в некоторых случаях бесконечное множество фазо-частотных характеристик возможно свести к конечному числу линий.

Выводы

1. Фазо-частотная характеристика многокаскадного полосового усилителя линейна в пределах малых обобщенных расстроек и, кроме составляющей $-\tau_n \Delta f$, содержит постоянную составляющую $\left(n \cdot \frac{\pi}{2} \right)$.

2. Предельная фазо-частотная характеристика рассмотренного многокаскадного полосового усилителя линейна и наклонена под углом $\frac{\pi}{2}$ к оси частот.

3. Сопоставляя полученный результат с данными, приведенными в работах Сифорова, Белоусова и других авторов, можно заключить, что предельным амплитудно-частотным характеристикам соответствуют линейные фазо-частотные характеристики, наклоненные под углом $\frac{\pi}{2}$ к оси частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Харкевич А. А. Теория электроакустических аппаратов Связьиздат, 1939.
 2. Белоусов А. П. Радиотехника, № 6, 1946.
 3. Сифоров В. И. Радиоприемные устройства. ЛКВВИА, 1947.
 4. Чистяков Н. И. Резонансные усилители и предварительные селекторы. Связьиздат, 1939.
-