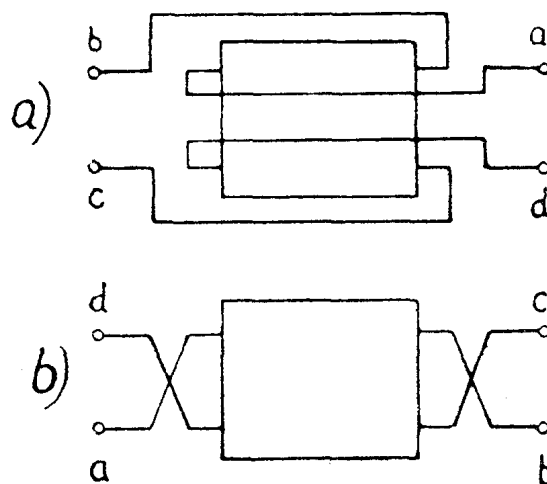


УРАВНЕНИЯ СИММЕТРИЧНОЙ ОДНОРОДНОЙ ЦЕПНОЙ СХЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ

Г. Е. ПУХОВ

Как известно, цепная схема является весьма распространенным элементом электрической цепи. Однако ее свойства хорошо изучены лишь применительно к случаю, отвечающему проходной цепи, т. е. цепи, в которой отсутствуют обратные связи. Цепные схемы более общего вида в литературе почти не встречаются, хотя подобного рода цепи в практике встречаются и притом довольно часто. Ниже рассмотрены некоторые вопросы теории четырехполюсной цепной схемы, относительно звеньев которой сделаны следующие предположения:

1. Звенья симметричны либо относительно своей геометрической оси, либо и поперечной и продольной. При поперечной симметрии перемена местами входных и выходных зажимов (фиг. 1а) как у отдельных звеньев, так и у всей цепочки в целом не будет приводить к какому-либо изменению режима внешней цепи. Если кроме того звенья симметричны и относительно продольной оси, то изменения режима внешней цепи не будет и при попарном перекрещивании входных и выходных зажимов (фиг. 1б).



Фиг. 1

2. Все звенья цепи пассивны и выполнены совершенно одинаковым образом.

Уравнения звена, симметричного относительно поперечной геометрической оси

Поскольку звенья цепочки соединяются последовательно, то уравнения звена, порядковый номер которого обозначим через k , в общем случае (при наличии несимметрии) должны иметь вид [2; 3]:

$$\begin{pmatrix} u_a^k \\ i_a^k \\ u_c^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2^k \\ -i_b^k \\ i_o^k \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} u_2^k \\ -i_b^k \\ i_o^k \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $i_o = -(i_b + i_c) = -(i_b^k + i_c^k)$ (фиг. 2)—уравнительный ток, обусловленный обратными связями. В силу предполагаемой пассивности звена между коэффициентами A_{ik} цепочечной матрицы a имеются зависимости

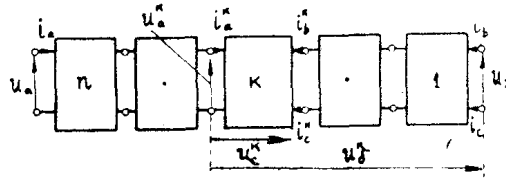
$$\begin{aligned} A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} &= 1, \\ A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22} &= A_{32}, \\ A_{11}A_{32} - A_{12}A_{31} &= -A_{13}, \end{aligned} \quad (2)$$

которые следуют из известной теоремы взаимности. Так же не представляет затруднений доказать, что при наличии лишь поперечной симметрии между компонентами A_{ik} существуют связи:

$$A_{23} = A_{13} \frac{A_{11} - 1}{A_{12}} \quad \text{и} \quad A_{31} = A_{23} \frac{A_{11} - 1}{A_{12}}. \quad (3)$$

Используя условия (2-3), приходим к следующим уравнениям звена с поперечной симметрией

$$\begin{pmatrix} u_a^k \\ i_a^k \\ u_c^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}, A_{12}, A_{13} \\ \frac{A_{11}^2 - 1}{A_{12}}, A_{11}, A_{13} \frac{A_{11} - 1}{A_{12}} \\ -A_{13} \frac{A_{11} - 1}{A_{12}}, -A_{13}, A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2^k \\ -i_b^k \\ i_o \end{pmatrix} \quad (4)$$



Фиг. 2

В теории обычной цепной схемы большую роль играет характеристическое сопротивление Z_λ и постоянная распространения γ звена, определяемые из выражений

$$Z_\lambda = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} \quad \text{и} \quad A_{11} + \sqrt{A_{12}A_{21}} = e^\gamma, \quad (5)$$

откуда

$$ch\gamma = A_{11} \quad \text{и} \quad sh\gamma = \sqrt{A_{12}A_{21}}. \quad (6)$$

В рассматриваемом случае через гиперболические функции удобно выразить и величины A_{13} и A_{33} :

$$A_{13} = Z_s = sh\gamma, \quad A_{33} = A_0 - \frac{A_{13}^2}{A_{12}} = A_0 - \frac{Z_s^2}{Z_\lambda} sh\gamma, \quad (7)$$

где Z_s и Z_λ —некоторые постоянные, определяемые выражениями

$$\begin{aligned} Z_s &= \frac{A_{13}}{\sqrt{A_{12}A_{21}}}, \\ A_0 &= A_{33} + \frac{A_{13}^2}{A_{12}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Удобство введения величин Z_s и A_0 будет ясно из дальнейшего.

Подставляя соотношения (5), (6) и (7) в уравнения (4), получаем

$$\begin{pmatrix} u_a^k \\ i_a^k \\ u_c^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\gamma, & Z_\lambda sh\gamma, & -Z_s sh\gamma \\ \frac{sh\gamma}{Z_\lambda}, & ch\gamma, & -2\frac{Z_s}{Z_\lambda} sh^2 \frac{\gamma}{2} \\ 2\frac{Z_s}{Z_\lambda} sh^2 \frac{\gamma}{2}, & Z_s sh\gamma, & A_0 - \frac{Z_s^2}{Z_\lambda} sh\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^k \\ -i_b^k \\ i_0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Заметим, что при отсутствии обратных связей ($i_0 = 0$) уравнения (9) превращаются в обычные хорошо известные уравнения проходного четырехполюсного звена:

$$\begin{pmatrix} u_a^k \\ i_a^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\gamma, & Z_\lambda sh\gamma \\ \frac{sh\gamma}{Z_\lambda}, & ch\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^k \\ -i_b^k \end{pmatrix} \quad (10)$$

Эти же уравнения будут иметь место и при наличии обратных связей при условии, что звено является трехполюсником.¹⁾

Уравнения звена, симметричного относительно и поперечной и продольной геометрических осей

Если звено цепной схемы, кроме поперечной, обладает так же и продольной симметрией, то между компонентами A_{ik} матрицы a существует дополнительная зависимость $A_{12} = -2A_{13}$. Вводя это соотношение в уравнение (4), получаем

$$\begin{pmatrix} u_a^k \\ i_a^k \\ u_c^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}, & A_{12}, & -\frac{A_{12}}{2} \\ \frac{A_{11}^2 - 1}{A_{12}}, & A_{11}, & -\frac{A_{11} - 1}{2} \\ \frac{A_{11} - 1}{2}, & -\frac{A_{12}}{2}, & A_0 - \frac{A_{12}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^k \\ -i_b^k \\ i_0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Выражая теперь компоненты A_{ik} через гиперболические функции, приходим к уравнениям

$$\begin{pmatrix} u_a^k \\ i_a^k \\ u_c^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\gamma, & Z_\lambda sh\gamma, & -\frac{Z_\lambda}{2} sh\gamma \\ \frac{sh\gamma}{Z_\lambda}, & ch\gamma, & -ch^2 \frac{\gamma}{2} \\ sh^2 \frac{\gamma}{2}, & \frac{Z_\lambda}{2} sh\gamma, & A_0 - \frac{Z_\lambda}{4} sh\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^k \\ -i_b^k \\ i_0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

¹⁾ Это следует из того, что состояние трехполюсника описывается системой, состоящей из двух уравнений.

Заметим, что эти уравнения можно было бы получить из уравнений звена, обладающего лишь поперечной симметрией, т. е. из уравнения (9), путем простой замены постоянной Z_s величиной $\frac{Z_\lambda}{2}$.

Таким образом, уравнения четырехполюсного звена, имеющего обратные связи, нами получены. Приступим теперь к выводу уравнений цепной схемы.

Уравнения цепной схемы

Получим вначале уравнения цепной схемы, состоящей из звеньев, симметричных лишь относительно поперечной геометрической оси.

Удлинняя цепочечную матрицу [2, 3], взятую из уравнений (9), и возводя затем ее в n -ую степень (n —число звеньев), находим

$$A_{\text{симметр. поперечн.}} = \left\| \begin{array}{cccc} ch\gamma & , & Z_\lambda sh\gamma, & 0, -Z_s sh\gamma \\ \frac{sh\gamma}{Z_\lambda} & , & ch\gamma, & 0, -\frac{2Z_s}{Z_\lambda} sh^2 \frac{\gamma}{2} \\ \frac{2Z_s}{Z_\lambda} sh^2 \frac{\gamma}{2}, & Z_s sh\gamma, & 1, & A_0 - \frac{Z_s^2}{Z_\lambda} sh\gamma \\ 0 & , & 0 & , 0, 1 \end{array} \right\|^n =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc} chn\gamma, & Z_\lambda shn\gamma, & 0, & -Z_s shn\gamma \\ \frac{shn\gamma}{Z_\lambda} & , & chn\gamma, & 0, -\frac{2Z_s}{Z_\lambda} sh^2 \frac{n\gamma}{2} \\ -\frac{2Z_s}{Z_\lambda} sh^2 \frac{n\gamma}{2}, & Z_s shn\gamma, & 1, & n A_0 - \frac{Z_s^2}{Z_\lambda} shn\gamma \\ 0 & , & 0 & , 0, 1 \end{array} \right\|. \quad (13)$$

Заметим, что если бы компонента A_{33} не была бы ранее представлена в форме $A_{33} = A_0 - \frac{A_{13}^2}{A_{12}}$, то выражение (13) получилось бы значительно менее удобным. Вычеркивая из удлинненной матрицы (13) четвертую строку и третий столбец, приходим к ее нормальной форме

$$a_{\text{симметр. поперечн.}} = \left\| \begin{array}{ccc} chn\gamma & , & Z_\lambda shn\gamma, -Z_s shn\gamma \\ \frac{shn\gamma}{Z_\lambda} & , & chn\gamma, -\frac{2Z_s}{Z_\lambda} sh^2 \frac{n\gamma}{2} \\ -\frac{2Z_s}{Z_\lambda} sh^2 \frac{n\gamma}{2}, & Z_s shn\gamma, & n A_0 - \frac{Z_s^2}{Z_\lambda} shn\gamma \end{array} \right\| \quad (14)$$

Этой матрице отвечают следующие уравнения эквивалентного четырех-полюсника, заменяющего рассматриваемую часть цепной схемы:

$$\begin{pmatrix} u_a^k \\ i_a^k \\ u_b^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} chk\gamma & , & Z_\lambda shk\gamma, -Z_s shk\gamma \\ shk\gamma & , & chk\gamma, -\frac{2Z_s}{Z_\lambda} sh^2 \frac{k\gamma}{2} \\ \frac{2Z_s}{Z_\lambda} sh^2 \frac{k\gamma}{2}, & Z_s shk\gamma, & kA_0 - \frac{Z_s^2}{Z_\lambda} sh k\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ -i_b \\ i_1 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где k означает порядковый номер звена, проставленный в соответствии с фиг. 2.

Если звенья цепочки, кроме поперечной, обладают и продольной симметрией, то ее уравнения, после замены в (15) Z_s на $\frac{Z_\lambda}{2}$ (см. выше), получаются в виде:

$$\begin{pmatrix} u_a^k \\ i_a^k \\ u_b^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} chk\gamma & , & Z_\lambda shk\gamma, -\frac{Z_\lambda}{2} shk\gamma \\ \frac{shk\gamma}{Z_\lambda} & , & chk\gamma, -sh^2 \frac{k\gamma}{9} \\ sh^2 \frac{k\gamma}{2}, & \frac{Z_\lambda}{2} shk\gamma, & kA_0 - \frac{Z_\lambda}{4} shk\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ -i_b \\ i_0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Уравнения (15) и (16) удобны тем, что они простейшим образом позволяют найти токи и напряжения в месте соединения двух любых звеньев, для чего достаточно подставить в эти уравнения вместо k номер звена.

При отсутствии уравнивающего тока i_0 , что может быть, например, при разрыве обратных связей, выражения (15) и (16) переходят в известные уравнения проходной цепной схемы:

$$\begin{pmatrix} u_a^k \\ i_a^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} chk\gamma, Z_\lambda shk\gamma \\ \frac{shk\gamma}{Z_\lambda}, chk\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ -i_b \end{pmatrix} \quad (17)$$

Добавочными уравнениями, определяющими боковое напряжение U_c^k , в этом случае (при $i_0 = 0$) обычно не интересуются.

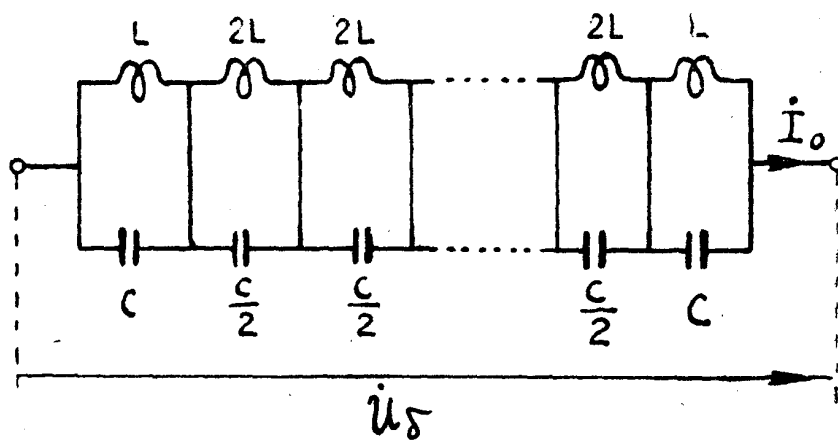
Для пояснения применения выведенных уравнений определим сопротивление сложного двухполюсника, схема которого показана на фиг. 3. Индуктивность L и емкость C пусть связаны условием $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ (ω — частота приложенного напряжения). Заменяя элементы, связанные взаимной индукцией, T -образными схемами замещения, приходим к цепной схеме, работающей в режиме $U_a = U_2 = 0$ (фиг. 4). Сопротивление двухполюсника¹⁾, очевидно, равно

$$Z = - \left(\frac{\dot{U}_0}{\dot{I}_0} \right) \dot{U} = \dot{U}_2 = 0. \quad (18)$$

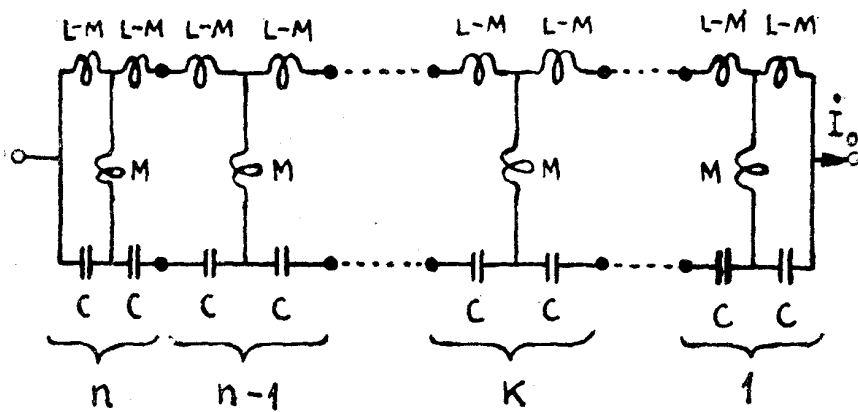
Поскольку цепь обладает лишь поперечной симметрией, то для нахождения Z следует применить уравнения (15). Полагая в последних $\dot{U}_a = \dot{U}_2 = 0$, находим

$$Z = -nA_0 = -n \left(A_{33} + \frac{A_{13}^2}{A_{12}} \right), \quad (19)$$

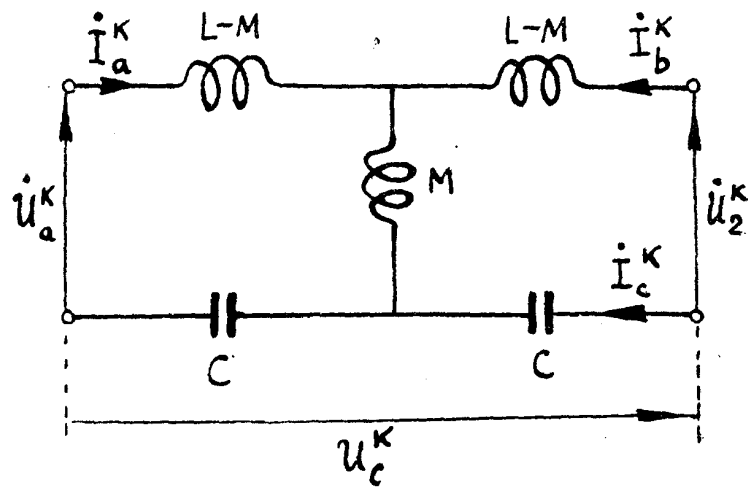
¹⁾ Далее имеется в виду установившийся синусоидальный режим двухполюсника.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

где n —число звеньев схемы замещения цепи (фиг. 3—5), а A_{ik} —компоненты цепочечной матрицы звена. Для определения величин A_{ik} составим уравнение одного звена в форме (4). Имеем

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_a^k \\ \dot{I}_a^k \\ \dot{U}_c^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & , & -j\omega M & , & -\frac{1}{j\omega C} \\ \frac{1}{j\omega M} & , & 0 & , & -\frac{1}{\omega^2 MC} \\ -\frac{1}{\omega^2 MC} & , & \frac{1}{j\omega C} & , & 2 - \frac{1}{\omega^2 MC} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_2^k \\ -\dot{I}_b^k \\ I_0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Отсюда

$$A_{12} = -j\omega M, A_{13} = -\frac{1}{j\omega C} \text{ и } A_{33} = \frac{1}{j\omega C} \left(2 - \frac{1}{\omega^2 MC} \right). \quad (21)$$

Подставляя эти величины в формулу (19) и обозначая через $k = M/L$ —коэффициент связи контуров, приходим к следующему значению сопротивления рассматриваемого сложного двухполюсника:

$$Z = 2nj\omega L \frac{1-k}{k}. \quad (22)$$

Заметим, что расчет рассмотренной цепи, приводимый в [4], не является правильным, так как он произведен на основании обычных уравнений (10, 17).

ЛИТЕРАТУРА

1. К а л а н т а р о в П. Л. Теория переменных токов, 1940.
2. П у х о в Г. Е. Геометрическая теория цепей, состоящих из четырехполюсников. Научные записки ЛПИ, в. X, Львов, 1949.
3. П у х о в Г. Е. Теория метода подсхем. Электричество, № 8, 1952.
4. З у с м а н о в с к и й С. А. (ред.) Магнетроны сантиметрового диапазона, ч. 1, 1950.