



шарнир, а в точке  $B$ —поступательную пару с шарниром. Введем обозначения, которые будем использовать в дальнейшем:

- $\alpha$  — угол между начальным положением и радиусом кривошипа. По мере вращения кривошипа этот угол изменяется по величине;
- $\rho$  — переменный радиус-вектор—прямая, соединяющая центр вращения кривошипа с положением ползуна,—величина переменная в долях от радиуса кривошипа;
- $\alpha_1$  — угол, образуемый положением кривошипа и радиусом-вектором,  $\rho$ —величина переменная;
- $\beta$  — угол, образуемый шатуном  $l$  и радиусом-вектором  $\rho$ ,—величина переменная;
- $c$  — минимальное расстояние центра вращения кривошипа от траектории точки  $B$ , иначе, перпендикуляр, опущенный из центра  $O$  к траектории точки  $B$  (траектория точки  $B$ —прямая). Эта величина постоянная;
- $\rho_0$  — величина  $c$ , выраженная в долях от радиуса кривошипа;
- $\varphi$  — переменный угол с вершиной в точке  $O$ , образуемый радиусом-вектором  $\rho$  и  $\rho_0$ ;
- $p$  — перпендикуляр, опущенный из точки  $A$  на радиус-вектор  $\rho$ —величина переменная.

Выразим уравнение траектории ползуна через радиус-вектор  $\rho$  (см. фиг. 1):

$$\rho = \frac{c}{\cos \varphi}. \quad (1)$$

С другой стороны, значение  $\rho$  может быть получено как функция  $r, l, \alpha$  и  $\beta$ . Тогда

$$\rho = r \cdot \cos \alpha_1 + l \cdot \cos \beta. \quad (2)$$

Приравнивая правые части функций, имеем

$$\frac{c}{\cos \varphi} = r \cdot \cos \alpha_1 + l \cdot \cos \beta$$

или

$$r \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \varphi + l \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi - c = 0. \quad (3)$$

Угол  $\beta$  можно выразить через угол  $\alpha_1$ , так как

$$p = r \cdot \sin \alpha_1 = l \cdot \sin \beta = l \sqrt{1 - \cos^2 \beta},$$

откуда

$$\cos \beta = \frac{1}{l} \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \alpha_1}.$$

После подстановки  $\cos \beta$  уравнения (2) и (3) примут вид

$$\rho = r \cdot \cos \alpha_1 + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \alpha_1}, \quad (4)$$

$$r \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \varphi + \cos \varphi \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \alpha_1} - c = 0. \quad (5)$$

Для того чтобы исследование носило общий характер, абстрагируем наш механизм. Для этого принимаем радиус кривошипа за единицу, т. е.  $r = 1$ , длину шатуна  $l$  берем в долях от радиуса кривошипа, тогда  $l = r \cdot k$ , или при  $r = 1$ ,  $l = k$ . Величину  $\rho_0 = c$  будем рассматривать также в долях от радиуса кривошипа или иначе в долях от единицы. Теперь функции (2), (3), (4), (5) запишутся так

$$\rho = \cos \alpha_1 + k \cos \beta, \quad (I)$$

$$\cos \alpha_1 \cdot \cos \varphi + k \cos \beta \cdot \cos \varphi - \rho_0 = 0, \quad (II)$$

$$\rho = \cos \alpha_1 + \sqrt{k^2 - \sin^2 \alpha_1}, \quad (\text{III})$$

$$\cos \alpha_1 \cdot \cos \varphi + \cos \varphi \sqrt{k^2 - \sin^2 \alpha_1} - \rho_0 = 0, \quad (\text{IV})$$

$$\rho = \sin \alpha_1 = k \sin \beta. \quad (\text{V})$$

В полученную группу функций можно ввести угол поворота  $\alpha$ , заменив угол  $\varphi$ , так как

$$\varphi = \alpha - \alpha_1.$$

Тогда

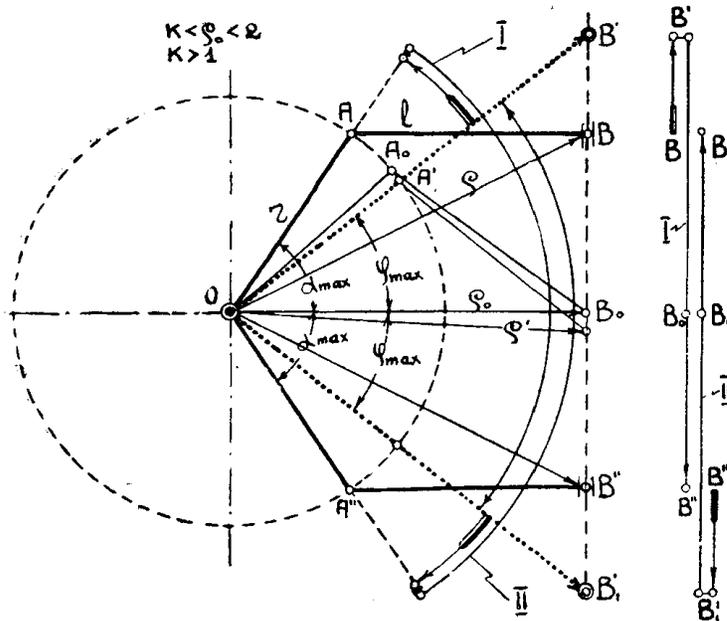
$$\cos \alpha_1 \cdot \cos(\alpha - \alpha_1) + k \cos \beta \cdot \cos(\alpha - \alpha_1) - \rho_0 = 0, \quad (\text{VI})$$

$$\cos \alpha_1 \cdot \cos(\alpha - \alpha_1) + \cos(\alpha - \alpha_1) \cdot \sqrt{k^2 - \sin^2 \alpha_1} - \rho_0 = 0. \quad (\text{VII})$$

Таким образом мы получим функциональную зависимость между рядом величин  $\alpha_1, \beta, \varphi, \alpha$  и некоторыми постоянными  $\rho_0$  и  $k$ . Причем имеем зависимости как в явной, так и в неявной форме. Перейдем к анализу полученных функций с I по VII. Для этого воспользуемся подвижным геометрическим образом. Здесь возможен ряд вариантов.

Вариант 1.  $k < \rho_0 < 2$ ;  $k > 1$ .

Будем двигать нашу кинематическую цепь, вращая кривошип или перемещая ползун (см. фиг. 2, 3). Минимальное значение  $\rho$  будет равно  $\rho_0$ . Положение механизма, соответствующее  $\rho_0$ , выделено отдельно на фиг. 2.



Фиг. 3

Имеем

$$\rho_{\min} = \rho_0$$

или

$$\rho_{\min} = \cos \alpha_0 + k \cos \beta_0$$

$$\rho_{\min} = \cos \alpha_0 + \sqrt{k^2 - \sin^2 \alpha_0}.$$

Значение углов  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  не трудно найти, так как стороны треугольника  $OA_0B_0$  известны и равны 1,  $k_0$  и  $\rho_0$ . При  $\rho = \rho_{\min}$  имеем минимальное значение угла  $\varphi$ , который равен нулю, то есть

$$\varphi_{\min} = 0.$$

Максимальное значение  $\rho$  будет при  $\rho_{\min}$ , что дает

$$\rho_{\max} = \sin \alpha_0 = k \sin \beta_0.$$

Мертвые положения механизма (см. фиг. 3) в точках  $B'$  и  $B'_1$  дают значения максимума для  $\rho$ , причем

$$\rho_{\max} = 1 + k.$$

При  $\rho_{\max}$  имеем максимальное значение угла  $\varphi$ . Из треугольников  $OB'B_0$  или  $OB'_1B_0$  (см. фиг. 3) найдем  $\varphi_{\max}$  через  $\cos \varphi_{\max}$ , так как

$$\cos \varphi_{\max} = \frac{\rho_0}{1 + k}.$$

Если считать за нулевое положение  $OB_0$ , то максимальное значение угла поворота кривошипа  $\alpha$  будет соответствовать положению шатуна, которое параллельно  $OB_0$ . Выражая посредством тригонометрической зависимости, получим

$$\cos \alpha_{\max} = \rho_0 - k.$$

Значение  $\alpha_{\max}$  не совпадает с положением механизма для  $\varphi_{\max}$ .

Путь, проходимый ползуном, определяется мертвыми положениями механизма, равен  $B'B'_1$ . Величина половины этого пути равна

$$B_0B' = B_0B'_1 = (1 + k) \sin \varphi_{\max},$$

при этом

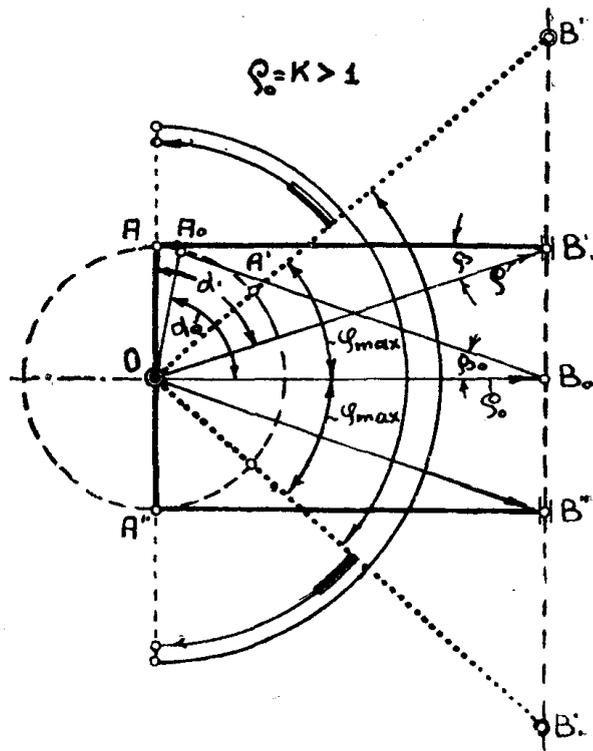
$$\alpha = \varphi_{\max}.$$

О том, как меняется угол  $\alpha$  при движении ползуна от верхнего мертвого положения до нижнего и наоборот, дает возможность судить изображение на фиг. 3 дуги со стрелками. Отметим следующую особенность, что при изменении  $\rho$  от  $B'$  до  $B'_1$  и от  $B'_1$  до  $B'$  изменение  $\alpha$  может происходить двояко, а именно, движение вниз—по дуге I, и если же у дуги II началом сделать конец и вращать кривошип, то получим также движение вниз. Аналогичная картина получается при движении снизу вверх, что происходит при вращении кривошипа по дуге II или же по дуге I при перемене начала конца дуги. Если угол  $\varphi$ , радиус-вектор  $\rho$  при изменении от  $B'$  до  $B'_1$  занимают соответственно различные положения, то угол  $\alpha$  при  $\varphi_{\max}$  будет соответствовать двум переменным радиусам-векторам  $\rho_{\max}$  и некоторому  $\rho'$ . Последний можно выразить через известные величины, решая задачу чисто геометрически.

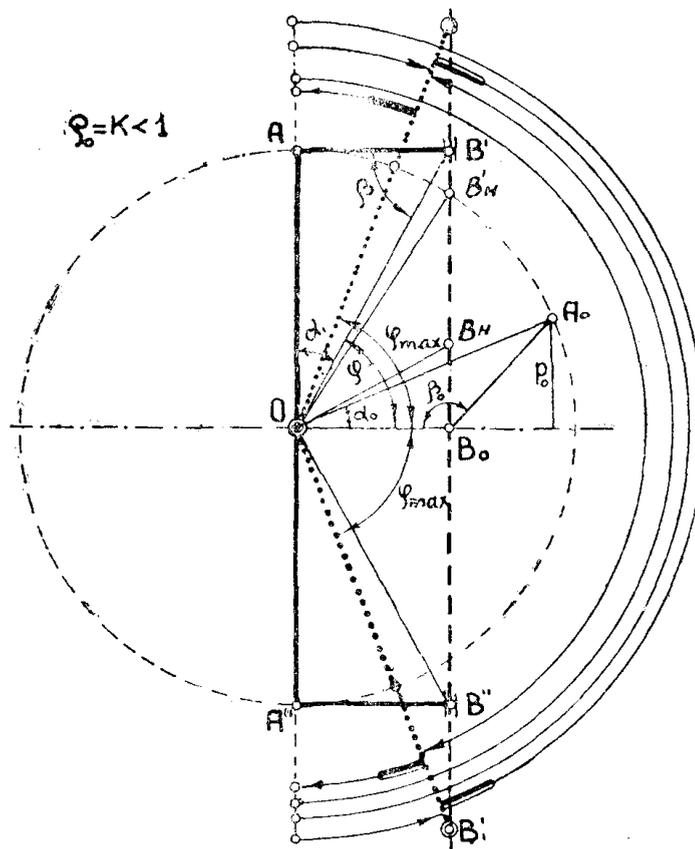
Некоторый интерес представляет характер изменения положения точки  $B$ , если вращать кривошип из положения  $A$  в положение  $A''$ . При этом характер изменения  $\varphi$  и  $\rho$  в зависимости от угла поворота кривошипа представлен на фиг. 3 (справа) в виде прямых со стрелками. При вращении кривошипа по часовой стрелке точка  $B$  будет занимать положения  $B \rightarrow B' \rightarrow B''$ , и при вращении против— $B'' \rightarrow B'_1 \rightarrow B$ . Оставляя неизменным направление вращения кривошипа, перемещение точки  $B$  может совершаться иным путем, а именно—по часовой стрелке  $B \rightarrow B'_1 \rightarrow B''$ , против— $B'' \rightarrow B' \rightarrow B$ .

Обратим внимание на то, что дуги, показывающие направление вращения точки  $A$  при перемещении точки  $B$  из своих крайних положений вверх и вниз как бы отображают характер движения точки  $B$  при вращении кривошипа из положения  $A$  в положение  $A''$  и, наоборот, из положения  $A''$  в  $A$ . Исходя из движения механизма, можно было бы получить ряд зависимостей между  $\alpha$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta$ ,  $\varphi$ ,  $\rho$ ,  $\rho'$ , построить эти зависимости в координатах „ху“ и получить ряд кривых, выраженных как в обычной, так и в параметрической форме. Численное значение можно получить чисто графически из чертежа. Если потребуется большая точность, то значение величин можно вычислить аналитически. Весь анализ проводится под контролем механизма.





Фиг. 5



Фиг. 6

Таким образом, хотя треугольник превратился в тупоугольный с тупым углом  $\beta_0$ , вид функции не меняется.

Из особенностей данного варианта можно отметить то, что в некотором положении  $B_n$  и  $B'_n$  шатуна расположится на прямой траектории точки  $B$ . Найдем значение радиуса вектора  $\rho = OB_n$ , соответствующего этому характерному положению. Согласно принятым обозначениям имеем

$$\overline{OB_n'} = r = 1; \overline{B_n'B} = l = k; OB_0 = c = \rho_0.$$

Задачу решаем геометрически. Из треугольника  $OB_nB_0$  значение  $\rho$  равно

$$\rho = \sqrt{\rho_0^2 + B_0B_n^2}. \quad (a)$$

В свою очередь, имеем равенства,

$$B_0B_n = B_0B'_n - k,$$

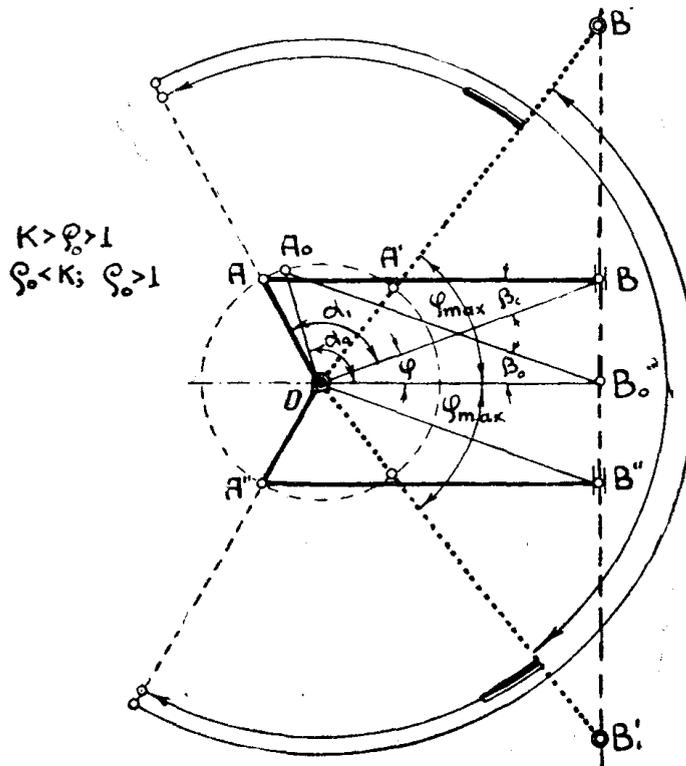
$$B_0B'_n = \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha},$$

$$\cos \alpha = \rho_0.$$

После подстановки и преобразования в уравнении (a) получим

$$\rho = 1 - 2k\sqrt{1 - \rho_0^2 + k^2}.$$

При этом значении  $\rho$  кривошип в точке  $B'_n$  пересекает траекторию точки  $B$ .  
Вариант 5.  $k > \rho_0 > 1$ ;  $\rho_0 < k$ ;  $\rho_0 > 1$  (фиг. 7).



Фиг. 7

Если в разобранных вариантах кинематическая цепь могла двигаться в пределах угла  $\alpha$  от нулевого положения не более  $90^\circ$ , то в варианте 5 значение  $\alpha_{\max}$  больше  $90^\circ$ . Так же, как и в варианте 4, имеем тупоугольные треугольники, образованные радиусом кривошипа, шатуном и радиусом-вектором  $\rho$ , но теперь тупой угол  $\alpha$ .

Найдем выражение для минимального значения  $\rho$ ; имеем, что

$$\rho_{\min} = \rho_0,$$

$$\rho_{\min} = k \cos \beta_0 - \cos (180 - \alpha_0),$$

$$\rho_{\min} = \cos \alpha_0 + k \cos \beta_0,$$

то есть величина  $\rho_{\min}$  имеет такое же выражение, как и в прежних вариантах.

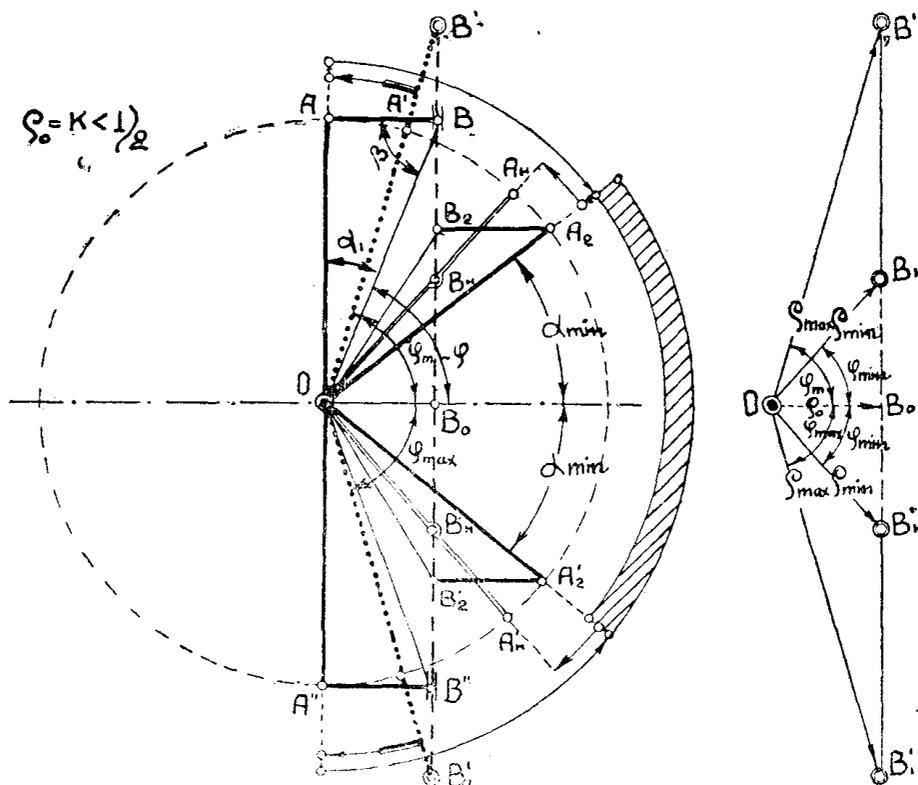
Значение  $\cos \alpha_{\max}$  будет отрицательным, так как

$$\cos \alpha_{\max} = \rho_0 - k,$$

где  $\rho_0$  меньше  $k$ .

Вариант 6.  $\rho_0 = k < 1/2$  (фиг. 8).

Характерной особенностью данного варианта является то, что угол  $\alpha$  на дуге  $A_2 A'_2$  и радиус-вектор  $\rho$  на участке прямой  $B_H B'_H$  имеют прерыв,



Фиг. 8

иначе наши функции при данных коэффициентах получились бы прерывистыми.

Из треугольника  $OB_H B_0$  найдем значение  $\rho_{\min}$ :

$$\rho_{\min} = 1 - k.$$

$\rho_{\min}$  определяется мертвым положением механизма. В отличие от разнообразных вариантов  $\rho_{\min}$  не равен  $\rho_0$ .

Значение отрезка  $B_H B'_H$  равно

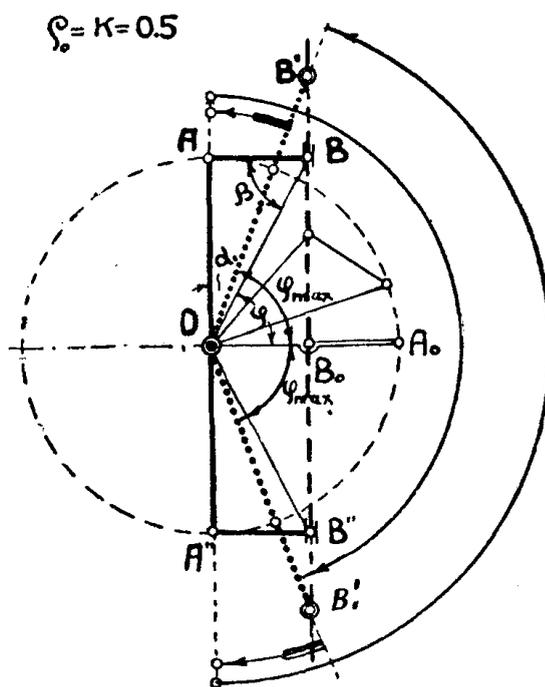
$$B_H B'_H = 2\sqrt{\rho_{\min}^2 - \rho_0^2} = 2\sqrt{1 - 2k - k^2 - \rho_0^2}.$$

Значение  $\varphi_{\min}$  можно выразить через тригонометрические зависимости

$$\cos \varphi_{\min} = \frac{\rho_0}{1 - k}.$$



Если считать расположение квадрантов согласно с фигурой 11, то механизм охватил при анализе только квадранты I и IV и только частично в варианте 3—все четыре квадранта. Все приведенные исследования будут справедливы, если считать за независимое переменное радиус-вектор  $\rho$ .



Фиг. 10

Для того, чтобы математическое исследование функций было полным, необходимо проанализировать, как поведут себя функции при независимом переменном  $\alpha$  и  $\varphi$ . Эта задача решается также с помощью механизма простым зеркальным отображением чертежа. Тогда квадранты I и IV соответственно будут отражать изменение функций в квадрантах III и II. На фигуре 11 заштрихованная часть квадрантов показывает, что при независимом переменном  $\varphi$  имеем периодическую прерывистую функцию. В пределах  $2\pi$  прерыв функции в двух местах.

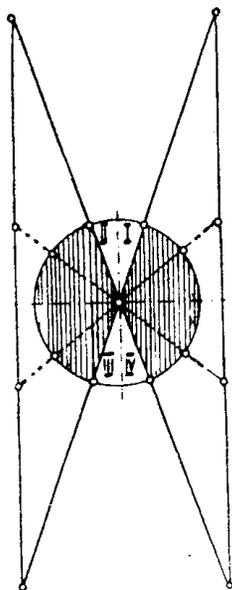
В варианте же 6 и 7 при независимом переменном  $\varphi$  (см. фиг. 12) прерыв функции в четырех местах. Если считать за независимое переменное  $\alpha$ , то тогда для вариантов, имеющих  $\rho_0 = k$ , функция непрерывна. Функция также непрерывна для варианта 5, когда  $k > \rho_0 > 1$ ;  $\rho_0 > 1$ . В варианте 1 функция прерывна. Область прерыва — незаштрихованная часть окружности (см. фиг. 13) в двух местах. В вариантах 6 и 7 при независимом переменном  $\alpha$  область прерыва в четырех местах (см. фиг. 14). Области прерыва при независимых переменных  $\alpha$  и  $\varphi$  не одинаковы по величине.

Перейдем к разбору следующих вариантов:

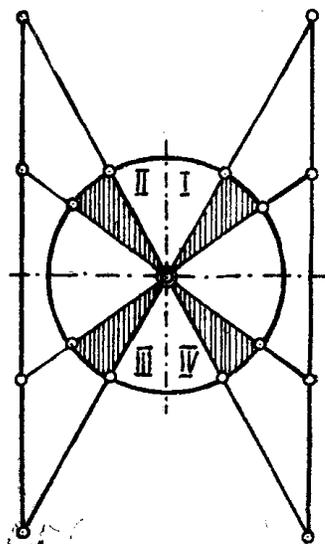
В а р и а н т ы 9, 10, 11, изображенные на фиг. 15, 16, 17, имеют соответственно  $\rho = 1$ ,  $k = 2$ ;  $k > \rho_0 > 1$ ,  $\rho_0 = k - 1$ ;  $k > 1 > \rho_0$ ,  $\rho_0 = k - 1$ . Характерной особенностью данных вариантов, в отличие от разобранных, является то, что при независимом переменном  $\rho$ , при изменении последнего в пределах от  $B'$  до  $B'_1$  и от  $B'_1$  до  $B'$  изменение угла  $\alpha$  будет происходить на полной кривошипной окружности, причем весь процесс будет протекать больше  $2\pi$  (см. дуги со стрелками). В исходном положении, когда  $\rho = \rho_0 = k - 1$ , значение углов  $\alpha_1$  и  $\beta$  равны нулю.

При независимых переменных  $\alpha$  и  $\varphi$  полное изменение функций даст зеркальное отображение чертежа, что разбиралось ранее.

Для сравнительной оценки приведем сводку результатов анализа разобранных вариантов при независимом переменном  $\rho$ . (см. табл. № 1). Подобным же образом можно было бы получить сводку основных параметров функций при независимых переменных  $\varphi$  и  $\alpha$ , исходя из простого



Фиг. 11

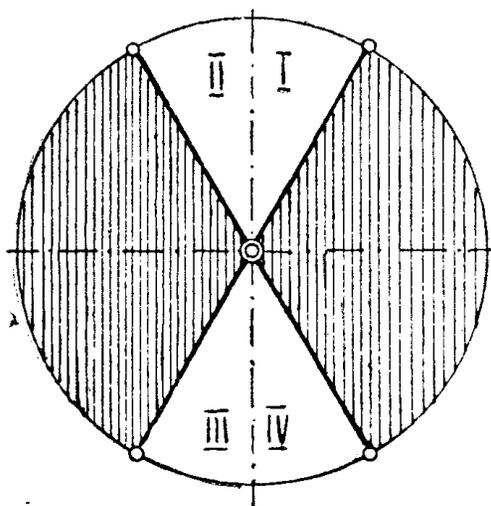


Фиг. 12

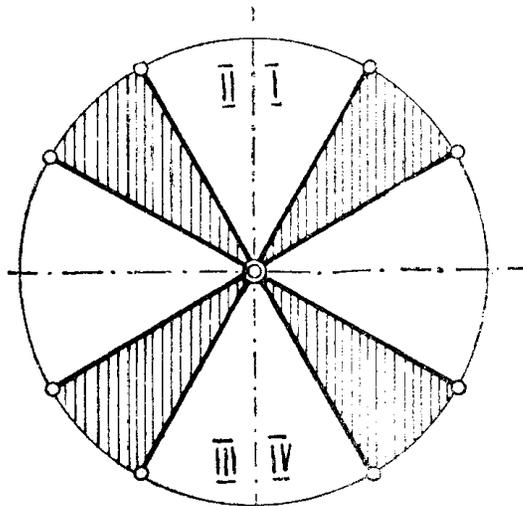
описания движения кинематической цепи. Можно также получить и численное значение всех промежуточных величин.

Перейдем к дальнейшему анализу вариантов.

Вариант 12.  $\rho_0 = 0$ ;  $k > 2$  (фиг. 18).



Фиг. 13



Фиг. 14

При значении  $\rho_0 = 0$  радиус-вектор  $\rho$  превращается в некоторый скользящий вектор, при этом значение угла  $\varphi$  равно нулю, а угол  $\alpha_1 = \alpha$ . Если оставить принятое обозначение углов, то значение функций запишется так:

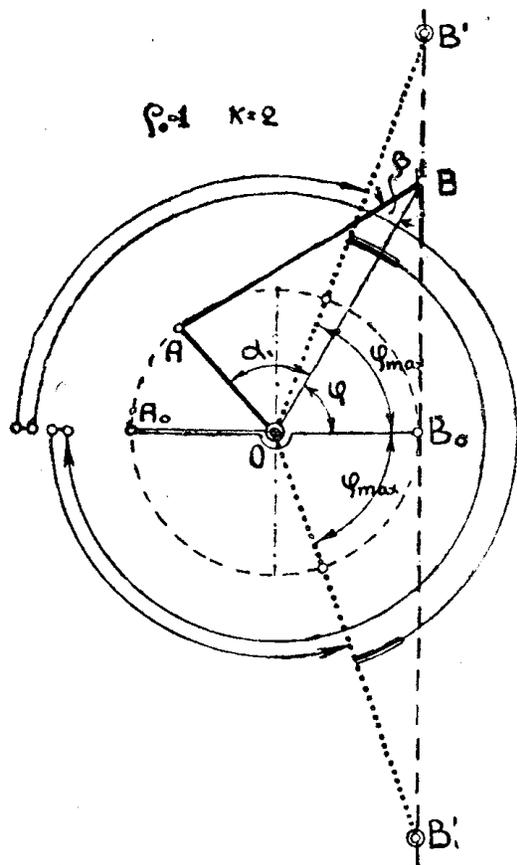
$$\rho = \cos \alpha + k \cos \beta,$$

$$\rho = \cos \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha - k},$$

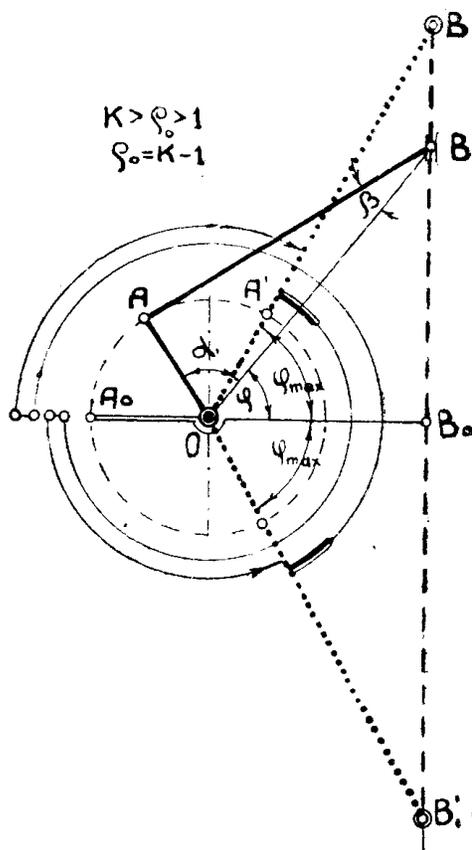
$$\rho = \sin \alpha = k \sin \beta.$$

Таблица № 1

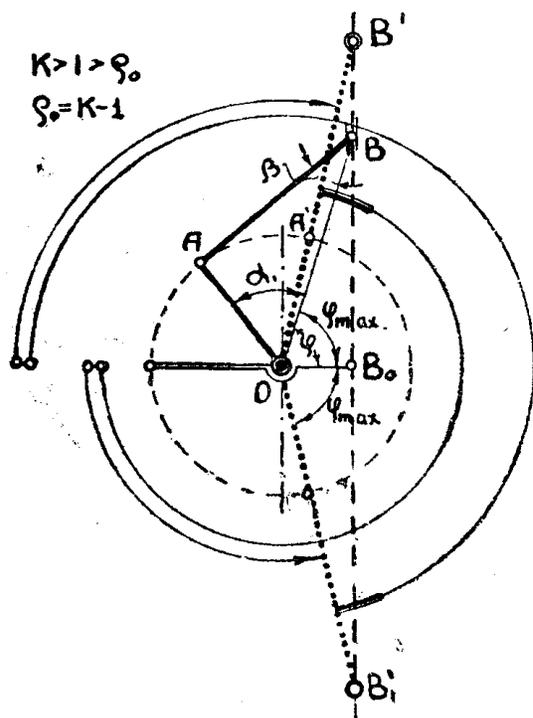
№ варианта	Характеристика варианта	$\cos \varphi_{\max}$	$\varphi_{\min}^\circ$	$\alpha_{\max}$	$\alpha_{\min}$	$\rho_{\max}$	$\rho_{\min}$
1	$k < \rho_0 < 2; k > 1$	$\frac{\rho_0}{1+k}$	0	$\cos \alpha = \rho - k$	$\alpha_m = 0$	$1+k$	$\rho_0$
2	$\rho_0 = k = 1$	$45^\circ$	0	$90^\circ$	$\alpha_{\min} = 0$	2	$\rho_0 = k$
3	$\rho_0 = k > 1$	$\frac{\rho_0}{1+k}$	0	$90^\circ$	0	$1+k$	$\rho_0$
4	$\rho_0 = k > 1$	$\frac{\rho_0}{1+k}$	0	$90^\circ$	0	$1+k$	$\rho_0$
5	$k > \rho_0 > 1; \rho_0 < k$	$\frac{\rho}{1+k}$	0	$\cos \alpha = \rho - k$	0	$1+k$	$\rho_0$
6	$\rho_0 = k < \frac{1}{2}$	$\frac{\rho_0}{1+k}$	$\cos \varphi = \frac{\rho_0}{1-k}$	$90^\circ$	$2\rho_0$	$1+k$	$1-k$
7	$\rho > k < 1; \rho > \frac{1}{2}; k < \frac{1}{2}$	$\frac{\rho_0}{1+k}$	$\cos \varphi = \frac{\rho_0}{1-k}$	$\cos \alpha = k - \rho_0$	$\cos \alpha = k + \rho_0$	$1+k$	$1-k$
8	$\rho = k = \frac{1}{2}$	$\frac{1-k}{1+k}$	0	$90^\circ$	0	$1+k$	$\rho_0$
9	$\rho = 1 \quad k = 2$	$\frac{1-k}{1+k}$	0	$180^\circ$	0	$1+k$	$\rho_0$
10	$k > \rho_0 > 1; \rho_0 = k-1$	$\frac{1-k}{1+k}$	0	$180^\circ$	0	$1+k$	$\rho_0$
11	$k > 1 > \rho_0; \rho_0 = k-1$	$\frac{1-k}{1+k}$	0	$180^\circ$	0	$1+k$	$\rho_0$



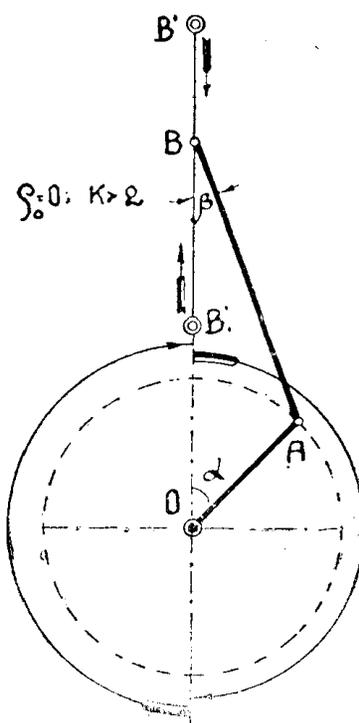
Фиг. 15



Фиг. 16



Фиг. 17



Фиг. 18

Некоторые изменения произошли вследствие того, что угол  $\varphi$  равен нулю и угол  $\alpha = \alpha_1$ . Мертвые положения механизма дадут значения:

$$\rho_{\max} = 1 + k,$$

$$\rho_{\min} = k - 1.$$

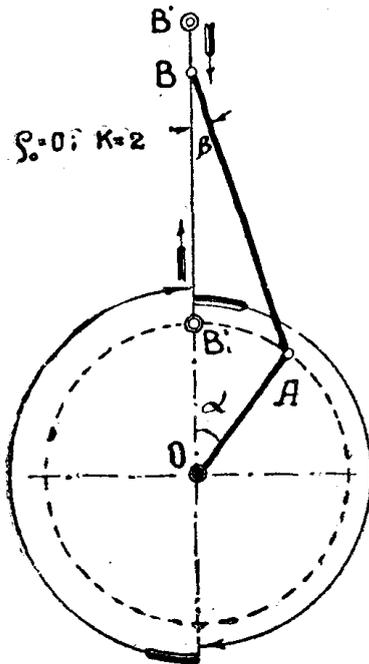
Ничего нового не вносит вариант 13 при  $\rho = 0$ ,  $k = 2$  (фиг. 19).

Значения максимального и минимального радиуса вектора при этом будут иными и равны

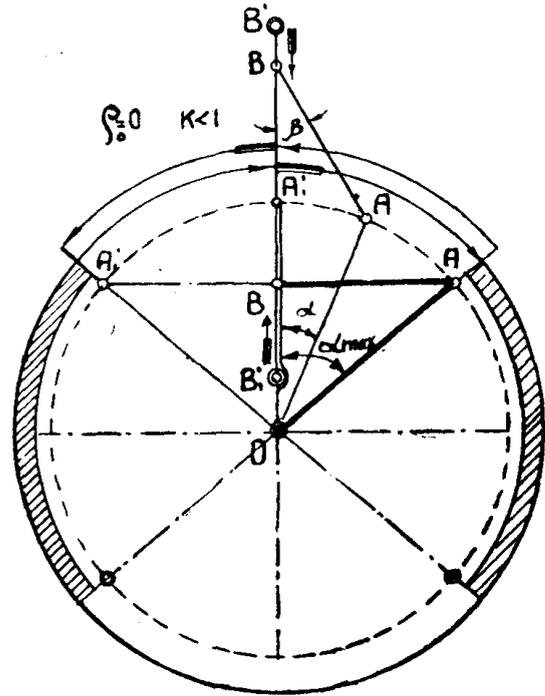
$$\rho_{\max} = k; \quad \rho_{\min} = 1.$$

Вариант 14.  $\rho_0 = 0$ ;  $k < 1$  (фиг. 20).

В варианте 14 имеем также скользящий вектор  $\rho$ . При перемещении точки  $B$  с верхнего положения  $B'$  в нижнее  $B_1$  происходит при изменении угла  $\alpha$  согласно дугам со стрелками, что соответствует независимому пе-



Фиг. 19



Фиг. 20

ременному  $\rho$ . Функция носит такой же характер, как и в варианте 12. Максимальное значение  $\alpha$  и соответственно при этом радиус-вектор равны

$$\sin \alpha_{\max} = k,$$

$$\rho' = \sqrt{1 - k^2},$$

где точка  $B'_0$  является точкой пересечения прямых траектории точки  $B$ . Углы  $\alpha_1$  и  $\beta$  остаются прежними, значение же углов  $\varphi'$ ,  $\varphi_{\max}$ ,  $\alpha'_{\max}$  будут другими, поскольку их связывает с радиусом-вектором  $\rho'_0$ .

Проследим, каким образом запишется функциональная зависимость, отнесенная к  $\rho'_0$ .

Уравнение (I) останется без изменения, т. е.

$$\rho = \cos \alpha_1 + k \cdot \cos \beta. \quad (I')$$

В уравнении (II) значение угла  $\varphi$  заменим через  $\varphi'$ .

Согласно фигурам 24 и 25 соответственно имеем

$$\varphi = \varphi' + \psi,$$

$$\varphi = \varphi' - \psi,$$

где угол  $\psi$  выражает угол наклона траектории точки  $B$  и является величиной постоянной. Иначе выражая,

$$\psi = \text{const},$$

выражая  $\rho_0$  через  $\rho_0'$ , получим

$$\rho_0 = \rho_0' \cdot \cos \psi = \text{const}.$$

Подставив значения  $\varphi$  и  $\rho_0$  в уравнение второе, получим

$$\cos \alpha_1 \cos(\varphi' \pm \psi) + k \cos \beta \cos(\varphi' \pm \psi) - \rho_0' \cos \psi = 0. \quad (\text{II}')$$

Вид уравнения (III) остается без изменения,

$$\text{т. е.} \quad \rho = \cos \alpha_1 + \sqrt{\sin^2 \alpha_1 - k}. \quad (\text{III}')$$

В уравнение IV введем значение угла  $\varphi$  и  $\rho$ . Тогда получим,

$$\cos \alpha_1 \cdot \cos(\varphi' \pm \psi) + \cos(\varphi' \pm \psi) \sqrt{\sin^2 \alpha_1 - k^2} - \rho_0' \cos \psi = 0. \quad (\text{IV}')$$

Уравнение IV остается без изменения, т. е.

$$\rho = \sin \alpha_1 = k \sin \beta. \quad (\text{V}')$$

В полученные функции введем угол поворота кривошипа  $\alpha'$ .  
Имеем

$$\alpha = \alpha' \mp \psi,$$

$$\varphi = \alpha' \mp \psi - \alpha.$$

При независимом переменном  $\alpha$  функция будет иметь прерыв в двух местах (заштрихованные дуги). Для использования механизма для анализа функций необходимо механизм повернуть на  $180^\circ$ .

В а р и а н т 15.  $\rho_0 = 0$ ,  $k = 1$  (фиг. 20').

Особенность этого варианта состоит в следующем: углы  $\alpha = \beta$ ,  $\rho_{\min} = 0$ ,  $\rho_{\max} = 2$ . При независимом переменном  $\alpha$  на дуге  $\pi$  имеем прерыв радиуса вектора  $\rho = 0$ . Перемещение точки  $B$  из своих крайних положений совершается при угле поворота кривошипа на  $180^\circ$ .

В а р и а н т 16.  $\rho_0 = \infty$ ,  $k = \infty$  (фиг. 21).

В данном варианте механизм имеет шатун, равный бесконечности. Очевидно, что и радиус-вектор будет равен тоже бесконечности.

Поскольку радиус-вектор связан с кривошипом и шатуном, то конец радиуса-вектора будет совершать какое-то реальное перемещение по прямой, удаленной в бесконечность от центра вращения кривошипа. Механизм, который будет удовлетворять данной функциональной зависимости, изображен на фиг. 22. Он представляет собой так называемую кулису Вольфа или иначе шатунно-кривошипный механизм с бесконечно длинным шатуном.

Проследим теперь, какой характер примут исследуемые функции.

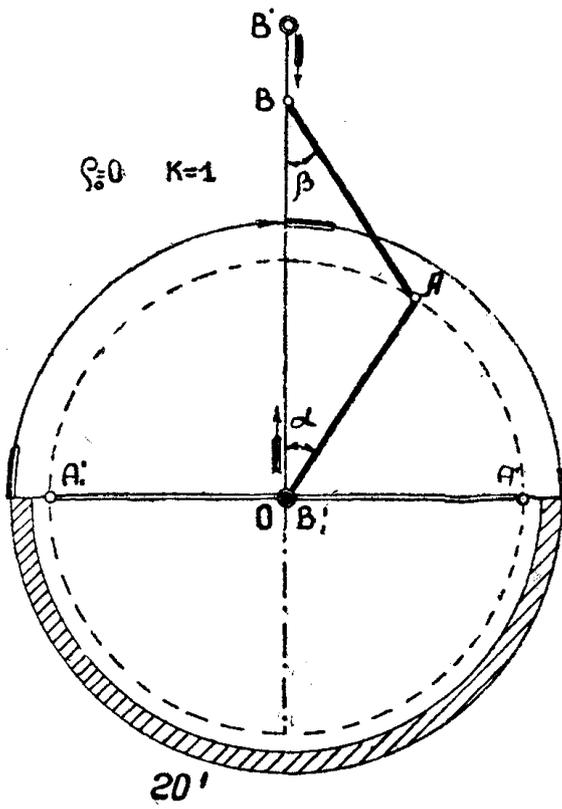
Имеем:

$$\rho = (1 - \cos \alpha) + \infty,$$

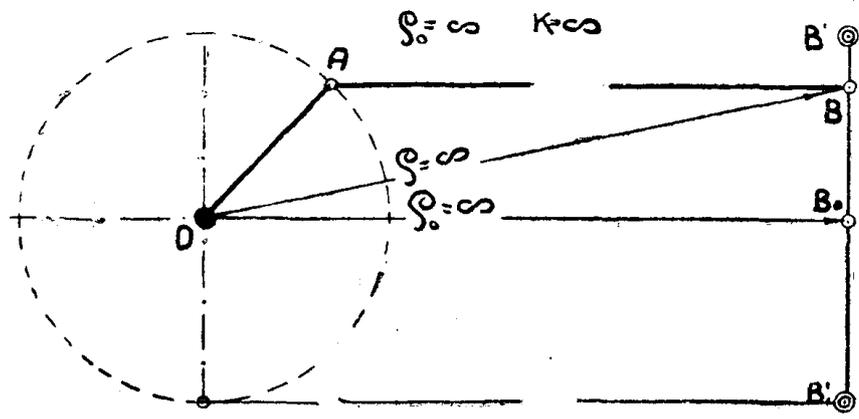
$$\rho = 1 + \infty,$$

$$\rho_{\max} = 2 + \infty,$$

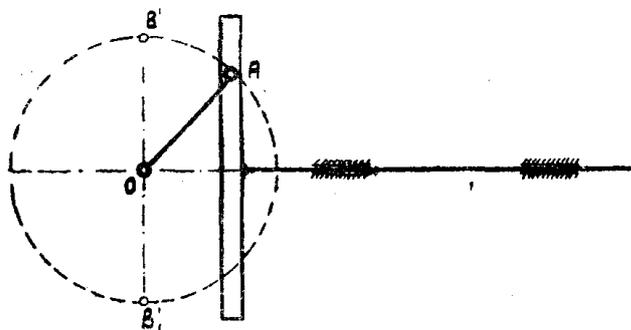
$$\rho_{\min} = 1 + \infty = 0.$$



Фиг. 20'



Фиг. 21



Фиг. 22

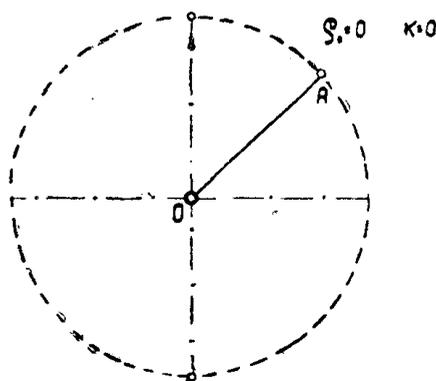
Как видим, в функциональной зависимости участвуют бесконечности. Можно было бы сказать, что мы при исследовании функции взяли и приблизили конец радиуса-вектора и удалили центр вращения кривошипа в бесконечность, иначе перевернули наш механизм.

В а р и а н т 17.  $\rho_0=0, k=0$  (фиг. 23).

Механизм в этом случае шатуна не имеет, остается только один кривошип. Траектория точки  $B$  должна бы проходить через центр вращения кривошипа.

Значение радиуса будет в двух точках при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  и  $\pi$ , т. е.  $\rho = \pm 1$ .

Таким образом, с помощью кинематической цепи проведен анализ функциональной зависимости.



Фиг. 23

Сделаем некоторые обобщения:

1. Мертвые положения механизма дают минимум или максимум для  $\rho$  и  $\varphi$ .
2. Положение шатуна, параллельное  $\rho_0$ , дает максимум  $\alpha$ .
3. При наименьшем радиусе-векторе имеем  $\rho$  максимум.
4. Каким образом меняется функция при различных независимых переменных  $\rho, \varphi, \alpha$  — дает характер движения механизма.
5. Весь анализ функций происходил при различном значении  $k$  и  $\rho_0$ . Но можно рассматривать анализ функции как следствие параллельного переноса траектории точки  $B$ .

Расширим несколько область анализа функций с помощью кинематической цепи. Представим себе, что траектория точки  $B$  совершается по некоторой ломаной прямой. Исходя из прежних рассуждений, имеем траекторию точки  $B$  по двум пересекающимся прямым, имеющим минимальный радиус-вектор  $\rho_0$ . По отношению  $\rho_0$  оставляем все прежние обозначения.

Отнесем все разбираемые функции к некоторому радиусу-вектору  $\rho'_0$ , который представляет собой прямую от пересечения центра вращения кривошипа  $O$  с точкой  $B'_0$  (см. фиг. 24, 25). Подставив значение  $\varphi$  и  $\rho_0$  в уравнения VI и VII, имеем

$$\cos \alpha_1 \cos (\alpha' \pm \psi - \alpha_1) + k \cos \beta \cos (\alpha' \pm \psi - \alpha_1) - \rho'_0 \cos \psi, \quad (\text{VI})$$

$$\cos \alpha_1 \cos (\alpha' \pm \psi - \alpha_1) + \cos (\alpha' \pm \psi - \alpha_1) \sqrt{\sin^2 \alpha_1 - k^2} - \rho'_0 \cos \psi. \quad (\text{VII})$$

Аналогичным образом данные функции с помощью кинематической цепи могут быть проанализированы, так как нетрудно построить механизм, задаваясь тем или иным параметром. Отметим некоторые характерные моменты, которые дает цепь (см. фиг. 24 и 25). Максимальное значение  $\rho$  по-прежнему определяется мертвыми положениями механизма, т. е.

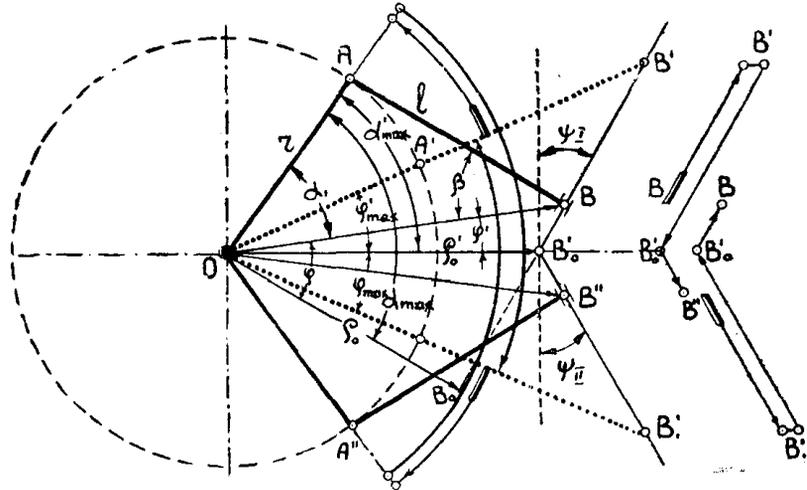
$$\rho'_{\max} = 1 + k.$$

При  $\rho'_{\max}$  имеем максимум угла  $\varphi'$ .

В отличие от прежних разбираемых вариантов вместо  $\rho_0$  будет поставлено значение его.

Тогда имеем

$$\cos \varphi'_{\max} = \frac{\rho_0' \cos \psi}{1 + k}.$$



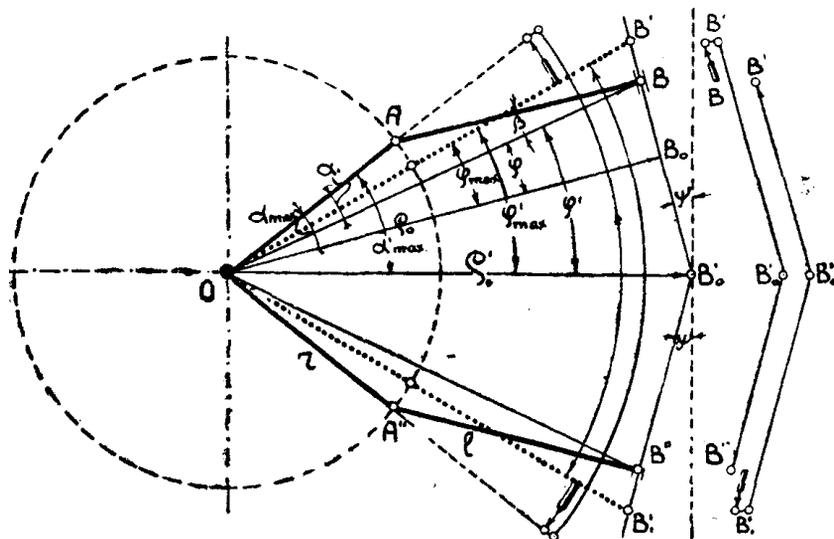
Фиг. 24

Считая за нулевое положение для угла поворота кривошипа значение  $\rho_0$ , найдем максимальное значение  $\alpha'_{\max}$ . Это значение будет при положении шатуна перпендикулярно траектории точки  $B$ .

Нетрудно найти, что

$$\cos \alpha_{\max} = \rho_0 \cos \psi - k.$$

О том, как будет меняться значение  $\alpha$  при независимом переменном  $\rho$ , при движении точки  $B$  вверх и вниз, показывают дуги со стрелками. Если

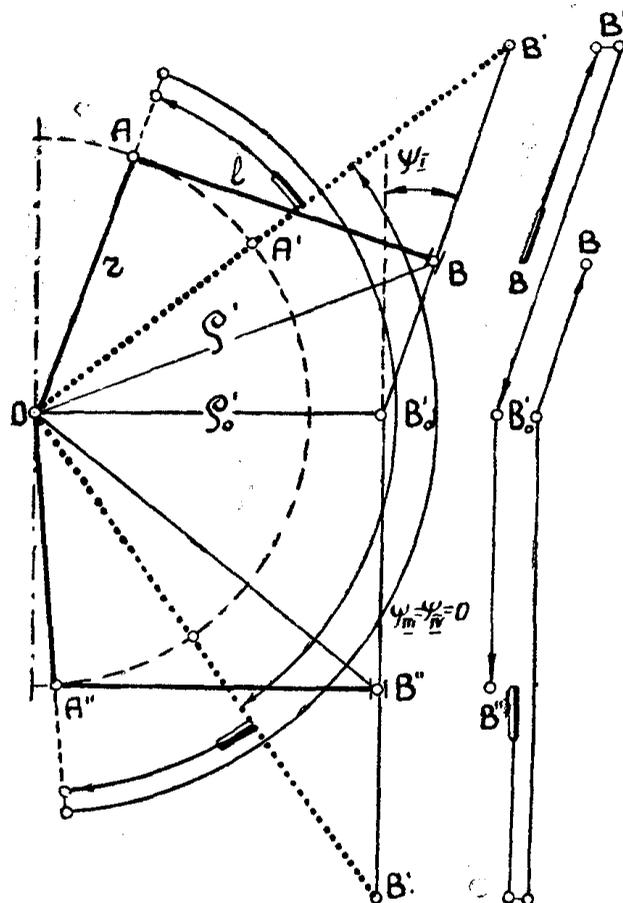


Фиг. 25

независимым переменным является угол поворота  $\alpha'$ , то тогда характер движения точки  $B$  как конца вектора  $\rho$  и соответственно изменение угла  $\varphi'$  при этом будут протекать согласно прямым стрелкам, изображенным справа на фиг. 24 и 25.

Функциональная зависимость, выраженная уравнениями (I')—(VII'), может быть проанализирована при различных значениях. Характерной особенностью является то, что при  $\psi = 90^\circ$  мы будем иметь шатуно-кривошипный механизм, как и из фиг. 18—20, повернутый на  $90^\circ$ . Но при этом  $\rho'_0$  не будет равно нулю.

Анализ функции может быть проведен, не только меняя угол  $\psi$ , но и меняя значение  $\rho_0$  и  $k$  в самых широких пределах. При ломаной траектории точки  $B$  изменение угла  $\alpha', \alpha_1, \varphi'$  непрерывно, хотя и конец вектора  $\rho$  будет претерпевать изменение на месте переноса. Иначе, траектория точки  $B$  протекает не по одной прямой, а по двум прямым.



Фиг. 26

Очевидно, что анализ функции можно провести при различных значениях  $\psi$ .

На фигуре 26 изображена кинематическая цепь для анализа функций при  $k > 1$ ,  $\rho'_0 > k$ ,  $\psi(I)$ ,  $\psi_{III} = \psi_{IV} = 0$ .

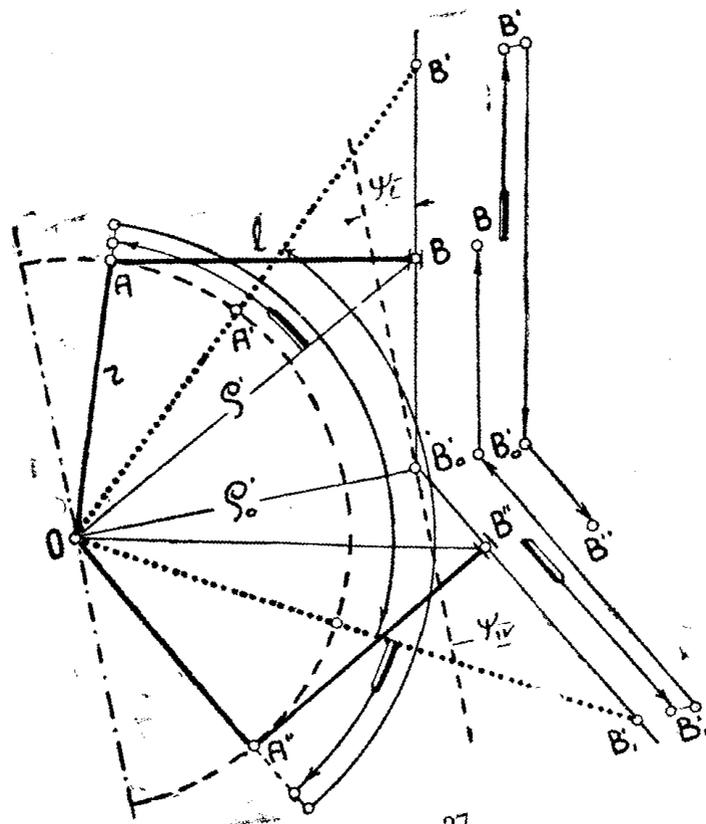
Соответственно на фигуре 27  $k > 1$ ;  $\rho'_0 > k$   $\psi_I, \psi_{IV}$ ;

на фигуре 28  $k < 1$ ,  $\rho'_0 > k > 1$   $\psi_{II}$ ;  $\psi_{III} = \psi_{IV} = 0$ ;

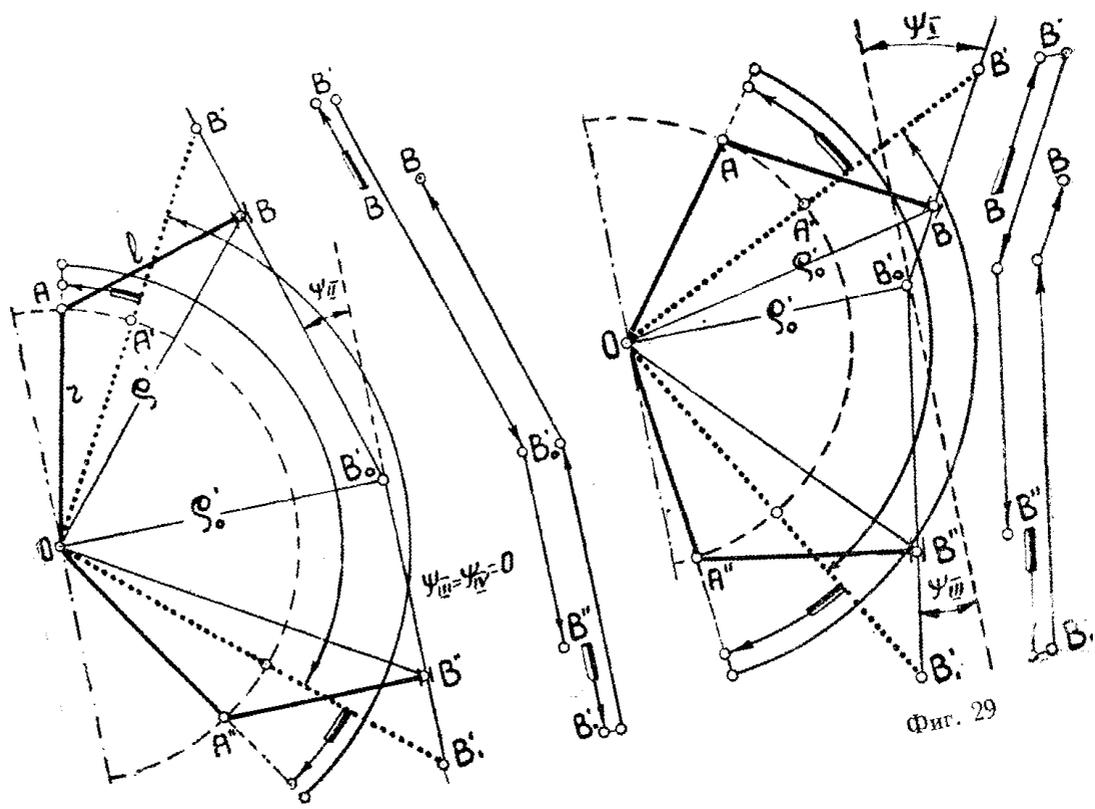
на фигуре 29  $k = 1$ ;  $\rho'_0 > 1$   $\psi_I$ ;  $\psi_{III}$ ;

на фигуре 30 и 31  $k = \infty$ ;  $\rho'_0 = \infty$ ;  $\psi_{IV}$ ;  $\psi_I = \psi_{II} = 0$ ;

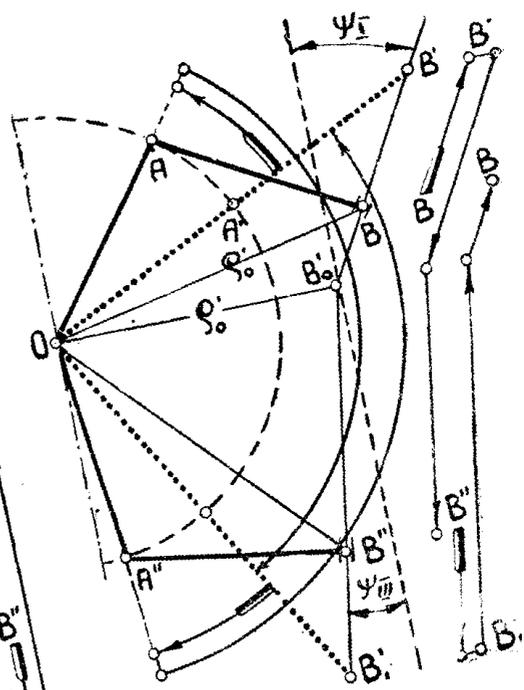
на фигуре 32 и 33  $k = \infty$ ;  $\rho'_0 = \infty$ ;  $\psi_{II}$ ;  $\psi_{III}$ .



Фиг. 27



Фиг. 28



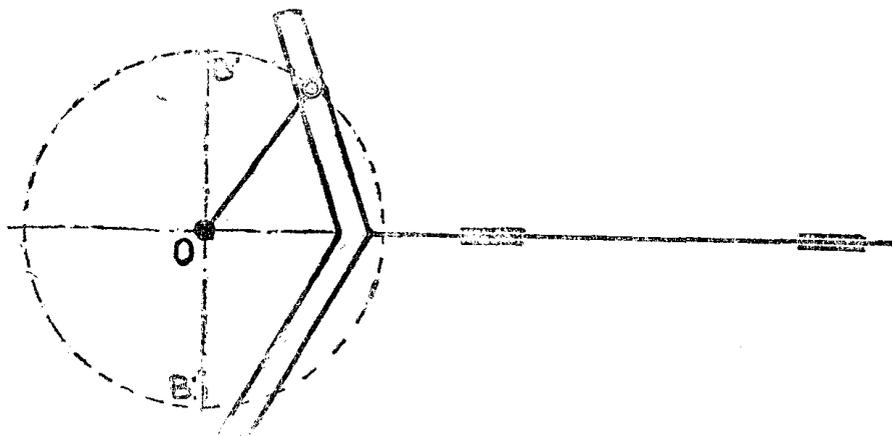
Фиг. 29



Нетрудно, исходя из подвижного геометрического образа, описать характерные свойства исследуемых функций, принимая за независимые различные из величин, входящих в функцию. Переходим к заключению.

Данная работа преследовала цель показать, что кинематическая цепь сама по себе может быть использована для анализа некоторых математических функций — в форме подвижного геометрического образа.

Такие операции, как нахождение максимума и минимума функции, решаются чисто автоматически. Характер функционального изменения многих переменных во взаимной связи также легко отображается механизмом, чего, пожалуй, трудно достигнуть иным путем.



Фиг. 33

При использовании кинематической цепи задача может решаться чисто графически, но одновременно эта же задача, используя механизм, может решаться и чисто аналитически. Аналитическое решение проводится под контролем механизма, тем самым избегается возможность ошибок.

Как указывалось, кинематическая цепь является средством для анализа некоторых математических функций. Если же подойти к вопросу принципиально, с точки зрения постановки проблемы, то слово „некоторых“ можно было бы заменить „огромного большинства“. На самом деле, существует бесчисленное количество кинематических цепей с одной и  $n$ -ой степенью свободы. Все эти цепи как-то отображают анализ функции. Но даже и разобранный случай кинематической цепи типа „шатунно-кривошипного механизма“ значительно можно расширить, заставляя двигаться ползун по различного рода кривым. По мере изучения кинематических цепей будут выявляться свойства, которые могут быть использованы для решения различного рода математических задач.

Абстрагирование кинематических цепей применимо не только при решении математических задач, но в известной мере и при решении проблемы синтеза механизмов.

Можно ожидать, что предлагаемый метод найдет подобающее место как при решении математических, так и технических задач.