ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА
Том 75 1954 г.

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ МОМЕНТНЫМИ УСИЛИЯМИ ТОНКИХ ПЛАСТИН С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ШАЙБАМИ

М. Г. ПИНСКИЙ

Имеющиеся работы по вопросу о концентрации напряжений при изгибе пластин рассматривают симметричный изгиб неограниченной пластины с круговым отверстием [1], эллиптическим, треугольным и квадратным [3], а также пластины с жесткой шайбой круглой [2] или эллиптической формы, свободной от внешней нагрузки.

В 1948 г. Г. Н. Савин и Н. П. Флейшман [4] исследовали изгиб треугольной изотропной плиты с подкрепленным круговым отверстием, с впаянным в него составным и простым кольцом и изгибаемой равномерно распределенными по ее краю изгибающими моментами.

Мы рассмотрим изгиб неограниченной пластины с жесткой свободной от нагрузки и загруженной моментом шайбой, имеющей как указанные формы, так и формы, приближающиеся к равностороннему треугольнику или квадрату со скругленными вершинами. Примерно такими формами обладают обычно на практике различного вида фланцы втулок глухих подшипников и др., прикрепляемые к тонким стенкам.

Мы рассмотрим два случая изгиба пластины: под действием моментов, приложенных и уравновешивающихся на бесконечности (назовем такой изгиб симметричным) и изгиб под действием момента, приложенного к жесткой шайбе (такой изгиб назовем несимметричным).

Прогиб W тонкой изотропной пластинки, изгибаемой внешними моментными усилиями, удовлетворяет, как известно [5], бигармоническому уравнению

$$\Delta\Delta W = 0. \tag{1}$$

Решение уравнения (1) можно представить с помощью двух аналитических функций равенством

$$W(x,y) = 2\,Re\,[\bar{z}\,\varphi(z) + \chi(z)]. \tag{2}$$

Здесь $\bar{z}$ сопряженная величина $z = x + iy$.

Если общий интеграл бигармонического уравнения представить в виде (2), то изгибающие моменты M_ρ, M_θ и скручивающий момент $M_{\rho\theta}$, а также перерезывающие силы, отнесенные в плоскости z к криволинейной ортогональной системе координат, которая отображается в полярную систему координат ρ, θ плоскости ζ при помощи отображающей функции $z = \omega(\zeta)$, могут быть представлены следующей зависимостью:

$$
\begin{gathered}
M_\theta - M_\rho + 2\,iM_{\rho\theta} = 4(1-\mu)\,De^{2i\alpha}\left[\,\overline{\omega(\zeta)}\cdot\frac{\overline{\varphi'(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} + \Psi(\zeta)\,\right],\\
M_\rho + M_\theta = -8(1+\mu)DRe\,\Phi(\zeta),\\
Q_\rho - i\Theta_\theta = -8De^{i\alpha}\cdot\frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\cdot
\end{gathered} \tag{3}
$$

Здесь μ — коэффициент Пуассона

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \text{ — цилиндрическая жесткость,}$$

$$e^{2i\alpha} = \frac{\zeta^2}{\rho^2} \cdot \frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega}'(\zeta)}, \tag{3'}$$

α — угол между направлением нормали к кривой и осью X-ов.

Функции

$$\Phi(\zeta) = \varphi'[\omega(\zeta)],$$
$$\Psi(\zeta) = \chi''[\omega(\zeta)]$$

голоморфны и непрерывны в рассматриваемой области вплоть до граничного контура.

Рассмотрение решения поставленной задачи в рядах Лорана привело нас к весьма сложным и громоздким выкладкам при подсчете изгибающих моментов.

Решение задачи с помощью интегралов типа Коши приводит к цели быстрее и дает решение, удобное для приложений.

Выделяя в функциях $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ постоянные слагаемые, представим их в форме:

$$\Phi(\zeta) = A + iB + \Phi_0(\zeta),$$
$$\Psi(\zeta) = A' + iB' + \Psi_0(\zeta). \tag{4}$$

Если область изменения функций $\Phi_0(\zeta)$ и $\Psi_0(\zeta)$ будет область $|\zeta| > 1$, то мы сможем представить их в виде:

$$\Phi_0(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^{-k}, \tag{5}$$

$$\Psi_0(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} a'_k \zeta^{-k}.$$

Постоянные A, B, A' и B' определим из условий на бесконечности.

Пусть на бесконечности на пластину действует изгибающий момент M вокруг оси $У$, так что

$$M_x/_\infty = 0, \quad M_y/_\infty = M \quad \text{и} \quad M_{xy}/_\infty = 0.$$

Тогда

$$-2D[2(1+\mu)A + (1-\mu)A'] = 0,$$
$$-2D[2(1+\mu)A - (1-\mu)A'] = M,$$
$$2D(1-\mu)B' = 0. \tag{6}$$

Откуда получаем:

$$A = -\frac{M}{8D(1+\mu)}, \quad A' = \frac{M}{4D(1-\mu)}, \quad B' = 0. \tag{7}$$

Так как B условиями (6) не определяется, мы можем без нарушения общности принять $B = 0$. Как известно [6], в случае, если на контуре области заданы прогиб и производная от прогиба по нормали (вторая основная задача), то граничное условие можно записать в следующем виде:

$$\varphi'(\bar{z}) + \overline{\varphi}(\bar{z}) - e^{2i\alpha}[\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)] = K_1 + iK_2, \tag{8}$$

где

$$K_1 + iK_2 = \frac{1}{2} e^{i\alpha} \frac{d}{ds}\left[\frac{\partial w}{\partial y} + i\frac{\partial w}{\partial x}\right].$$

Учитывая (3′), условию (7) для преобразованной области придадим вид:

$$\varphi'(z) + \overline{\varphi'}(\overline{z}) - \frac{\zeta^2\omega(\zeta)}{\rho^2\overline{\omega}'(\overline{\zeta})}\left[\overline{\omega}(\overline{\zeta})\varphi''(\zeta) + \chi''(\zeta)\right] = K_1 + iK_2. \tag{9}$$

Комплексно сопряженное с ним равенство будет

$$\overline{\varphi'}(\overline{z}) + \varphi'(z) - \frac{\zeta^{-2}\,\omega(\overline{\zeta})}{\rho^2\omega'(\zeta)}\left[\omega(\zeta)\,\overline{\varphi}''(\zeta) + \overline{\chi}''(\zeta)\right] = K_1 - iK_2. \tag{9'}$$

Условие (9′) не дает само по себе ничего нового, но будет полезно нам впоследствии.

Мы имели, что $\varphi'[\omega(\zeta)] = \Phi(\zeta)$.

Вследствие этого

$$\varphi''[\omega(\zeta)] = \frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}. \tag{10}$$

Обозначая переменную ζ на контуре через $\sigma = e^{i\theta}$ и принимая во внимание (10), мы можем равенства (9) и (9′) для контурных точек представить в виде:

$$\Phi(\sigma) + \overline{\Phi}(\overline{\sigma}) - \frac{\sigma^2}{\overline{\omega}'(\sigma)}\left[\overline{\omega}(\overline{\sigma})\,\Phi'(\sigma) + \omega'(\sigma)\Psi(\sigma)\right] = (K_1 + iK_2)_s, \tag{11}$$

$$\overline{\Phi}(\overline{\sigma}) + \Phi(\sigma) - \frac{\sigma^{-2}}{\omega'(\sigma)}\left[\omega(\sigma)\,\overline{\Phi}'(\overline{\sigma}) + \overline{\omega}'(\overline{\sigma})\,\overline{\Psi}(\overline{\sigma})\right] = (K_1 - iK_2)_s. \tag{11'}$$

Запишем следующие выражения для преобразующей функции и ее производных:

$$z = \omega(\zeta) = \zeta + m\zeta^{-n}, \qquad \omega'(\zeta) = 1 - mn\zeta^{-(n+1)},$$

$$\overline{z} = \overline{\omega}(\overline{\zeta}) = \overline{\zeta} + m\,\overline{\zeta}^{-n}, \quad \overline{\omega}'(\overline{\zeta}) = 1 - mn\,\overline{\zeta}^{-(n+1)}, \tag{12}$$

где z — комплексная переменная на рассматриваемой плоскости,
ζ — на отображенной плоскости,
m — вещественная постоянная < 1,
n — вещественное число, принимающее различные целые значения.

При $n = 1, 2, 3 \ldots\ldots$ функция $z = \omega(\zeta)$ отображает область бесконечной плиты соответственно с эллиптическим, правильным криволинейным треугольным, четырехугольным и т. д. внутренним контуром с округленными вершинами на внешность окружности γ единичного радиуса плоскости.

При $n = 0$ отображаемые фигуры переходят в окружность.

Можно подобрать такие значения m, что отображаемые криволинейные треугольники и квадраты будут с достаточной точностью представлять собой прямолинейные фигуры, отличаясь от них закругленными вершинами [9].

Повышая последовательно на единицу показатель степени n, будем получать отображаемые фигуры в виде криволинейного пятиугольника ($n=4$), шестиугольника ($n = 5$) и т. д.

Учитывая (12), придадим равенствам (11 и 11′) вид:

$$\Phi_0(\sigma) + \overline{\Phi}_0(\overline{\sigma}) - \frac{\sigma^2}{1 - mn\,\sigma^{n+1}}\left[(\sigma^{-1} + m\,\sigma^n)\,\Phi_0(\sigma) + (1 - mn\,\sigma^{-(n+1)})\,\Psi_0(\sigma)\right] =$$

$$= (K_1 + iK_2)_s - 2A + (A' - iB')\,\frac{\sigma^2(1 - mn\,\sigma^{-(n+1)})}{1 - mn\sigma^{n+1}}; \tag{13}$$

$$\overline{\Phi}_0(\overline{\sigma}) + \Phi_0(\sigma) - \frac{\sigma^{-2}}{1 - mn\,\sigma^{-(n+1)}}\left[(\sigma + m\,\sigma^{-n})\overline{\Phi}_0'(\overline{\sigma}) + (1 - mn\,\sigma^{n+1})\overline{\Psi}_0(\overline{\sigma})\right] =$$

$$= (K_1 - iK_2)_s - 2A + (A' + iB')\frac{\sigma^{-2}(1 - mn\,\sigma^{n+1})}{1 - mn\,\sigma^{-(n+1)}}. \tag{14}$$

Умножив равенства (13) и (14) соответственно на

$$\frac{1}{2\pi i}\left(1 - mn\,\sigma^{n+1}\right)\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\pi i}\left(1 - mn\,\sigma^{-(n+1)}\right)\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \qquad \text{и}$$

проинтегрировав полученные зависимости вдоль окружности γ в направлении против движения часовой стрелки (7), мы получаем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \Phi_0(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma mn\,\sigma^{n+1}\Phi_0(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \overline{\Phi}_0(\overline{\sigma})\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma mn\,\sigma^{n+1}\Phi_0(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma mn\,\sigma\Phi_0'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} - \tag{15}$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma m\,\sigma^{n+2}\Phi_0'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sigma^2\Psi_0(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma mn\,\sigma^{-(n-1)}\Psi_0(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (K_1 + iK_2 - 2A)(1 - mn\,\sigma^{n+1})\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A' + iB')(\sigma^2 - mn\,\sigma^{-(n-1)})\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}.$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \overline{\Phi}_0(\overline{\sigma})\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \Phi_0(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma mn\,\sigma^{-(n+1)}\,\overline{\Phi}_0(\overline{\sigma})\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma mn\,\sigma^{-(n+1)}\overline{\Phi}_0'(\overline{\sigma})\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sigma^{-1}\,\overline{\Phi}_0'(\overline{\sigma})\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma m\sigma^{-(n+2)}\overline{\Phi}_0'(\overline{\sigma})\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sigma^{-2}\,\overline{\Psi}_0(\overline{\sigma})\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma mn\,\sigma^{(n-1)}\overline{\psi}_0(\overline{\sigma})\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (K_1 - iK_2 - 2A)\,(1 - mn\,\sigma^{-(n+1)})\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A' - iB')\,(\sigma^{-2} - mn)\,\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}. \tag{16}$$

Вычислив каждый из входящих в эти равенства (15) и (16) интегралов типа Коши, окончательно получаем:

$$\frac{\zeta^{n+1} - mn}{\zeta^{n+1}}\Psi_0(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (K_1 + iK_2)\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{1 - mn\,\zeta^{n+1}}{\zeta^2} -$$

$$-\frac{1+m\zeta^{n+1}}{\zeta}\Phi'_0(\zeta)+\sum_{k=1}^{n}m(n+k\zeta)a_k\zeta^{n-k-1}+\frac{a_1'}{\zeta}+\frac{a'_2}{\zeta^2}+ \tag{17}$$

$$+mna_{n+1}\zeta^{-2}+\frac{m(n+1)\,a_{n+1}}{\zeta}+\frac{m(n+2)a_{n+2}}{\zeta^2}-\sum_{1}^{n-1}mna'_k\zeta^{-(n+k-1)},$$

где

$$K_1^\circ+iK_2^\circ=(K_1+iK_2-2A)(1-mn\sigma^{-(n+1)})+$$

$$+(A'+iB').(\sigma^2-mn\,\sigma^{(n-1)}).$$

$$(\zeta^{n+1}-mn)\,\Phi_0(\zeta)=-\zeta^{n+1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{K_1^\circ-iK_2^\circ}{\sigma-\zeta}d\sigma+\bar{a}_1'\zeta^n+\bar{a}'_2\zeta^{n+1}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}m(n\zeta+K\zeta^{-2})\,\bar{a}_k\zeta^k+m(n+1)\bar{a}_{n+1}+m\,(n+2)\bar{a}_{n+2}\zeta^n, \tag{18}$$

где $K_1^\circ-iK_2^\circ=(K_1-iK_2-2A)(1-mn\sigma^{-(n+1)})+(A'-iB')(\sigma^{-2}-mn\,\sigma^{n-1})$.

Из условия однозначности перемещений [5] следует:

$$a_1'=\bar{a}'_1 \text{ и } a_2'=a_2',\quad a_1=\bar{a}_1=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{\mathfrak{m}_x-i\mathfrak{m}_y}{8D},$$

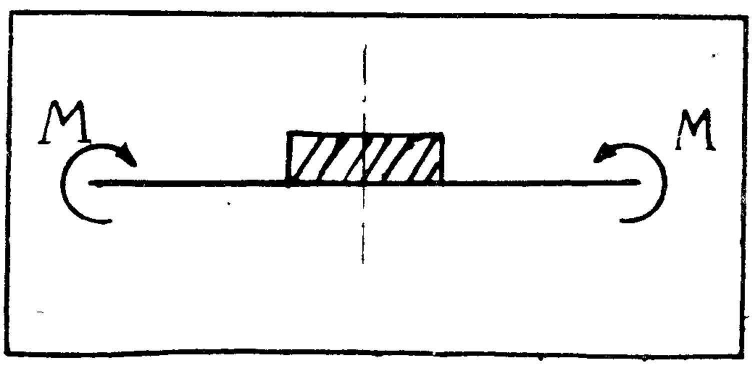
$$a_2-ma_{n+1}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}(K_1^\circ+iK_2^\circ)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

$$a_k=-$$

$$-\frac{\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\gamma}(K_1^\circ-iK_2^\circ)\sigma^{k-1}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}+m(k-1)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}(K_1^\circ-iK_2^\circ)\,\sigma^{n+k-1}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}}{1-m^2(k-1)(n-k)}. \tag{19}$$

$$k=2\ldots n_1-1\ldots(n_1\geqslant 3).$$

Здесь $\mathfrak{M}_x$ и $\mathfrak{M}_y$ — компоненты главного вектора момента усилий, приложенных на шайбе.

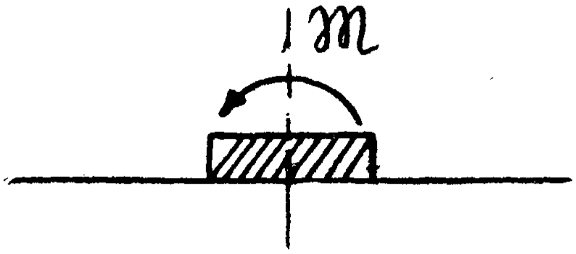


Фиг. 1

Уравнения (17), (18) и (19) решают задачу об изгибе пластин при наличии шайбы, свободной от внешней нагрузки (симметричный изгиб, фиг. 1) и изгибе под действием момента, приложенного к жесткой шайбе (несимметричный изгиб, фиг. 2).

Напряжения подсчитываем по формуле (8)

$$(\sigma_\rho)_{max} = \frac{6M_\rho}{h^2}.$$



Фиг. 2

Изгиб пластин с криволинейными шайбами, загруженных уравновешенными моментами

(Симметричный изгиб, фиг. 1)

а) Эллиптическая шайба

В этом случае $n = 1$ и

$$z = (\zeta + m\zeta^{-1}).$$

Из (17), (18) и (19), опуская все промежуточные выкладки, по уравнениям (3) запишем значение изгибающего момента по контуру шайбы.

$$M_\rho(\theta) = \frac{M}{1+\mu} - \frac{2M}{1-2m\cos 2\theta + m^2}\left[\left(\frac{m}{1+\mu} + \frac{\cos 2\alpha}{1-\mu}\right)(m-\cos\theta) - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin 2\alpha}{1-\mu}\sin 2\theta\right]. \qquad (2.1)$$

Здесь $m = \dfrac{a-b}{a+b}$ — степень сжатия эллиптической шайбы; a и b—соответственно большая и малая оси эллипса; α — угол между осью X-ов и большой полуосью эллиптической шайбы. Мы исследовали различные степени сжатия эллиптической шайбы ($m = 0$, $1/5$, $1/3$) при $\alpha = 0$ и $\alpha = 90°$.

Значение изгибающего момента на контуре стальной пластины ($\mu = 0{,}3$) представим в виде

$$M_\rho(\theta) = K_{1\alpha}(\theta)M,$$

где M — момент на единицу длины пластины.

Значения $K_{1\alpha}$ приведены на фиг. 3.

б) Треугольная шайба ($n = 2$)

Аналогично предыдущему получаем:

$$M_\rho(\theta) = \frac{4M}{1-4m\cos 3\theta + 4m^2}\left[\frac{1-4m^2}{2(1+\mu)} - \frac{2m}{1-\mu}\cos(\theta+2\alpha) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1-\mu}\cos 2(\theta-\alpha)\right]. \qquad (2.2)$$

При $m = \dfrac{1}{4}$ на окружность отображается правильный треугольник с закругленными вершинами. Кривизна в вершинах треугольника равна $8/R$, радиус кривизны в вершинах $R/8$.

При $\alpha=0$. Значение изгибающего момента на контуре треугольной шайбы стальной пластины представим

$$M_\rho(\theta)=K_2(\theta).M.$$

Значение $K_2(\theta)$ приведены в табл. № 1 и на фиг. 4.

Таблица 1

θ	K_2
0	8,1
30°	0,45
45°	0,23
60°	−0,7
90°	−1,8
120°	−0,55
180°	2,15

в) Квадратная шайба ($n=3$)

Значение изгибающего момента на контуре квадратной шайбы представим

$$M_\rho(\theta)=\frac{2M}{1-6m\cos 4\theta+9m^2}\left[\frac{1-9m^2}{2(1+\mu)}+\frac{(1-3m)\cos 2\alpha}{(1-\mu)(1-m)}\cos 2\theta+\right.$$
$$\left.+\frac{(1+3m)\sin 2\alpha}{(1-\mu)(1+m)}\sin 2\theta\right]. \qquad (2.3)$$

При $m=\frac{1}{9}$ квадратная шайба имеет форму прямолинейного квадрата с закругленными вершинами. Радиус кривизны в вершинах при $m=\frac{1}{9}$ равен $\frac{2}{9}R$. α — угол между диагональю квадрата и осью X-ов.

При $\alpha=0$ (фиг. 5)

$$M_\rho(\theta)=\frac{9M}{2}\left[\frac{4}{9(1+\mu)}+\frac{3}{4(1-\mu)}\cos 2\theta\right]. \qquad (2.4)$$

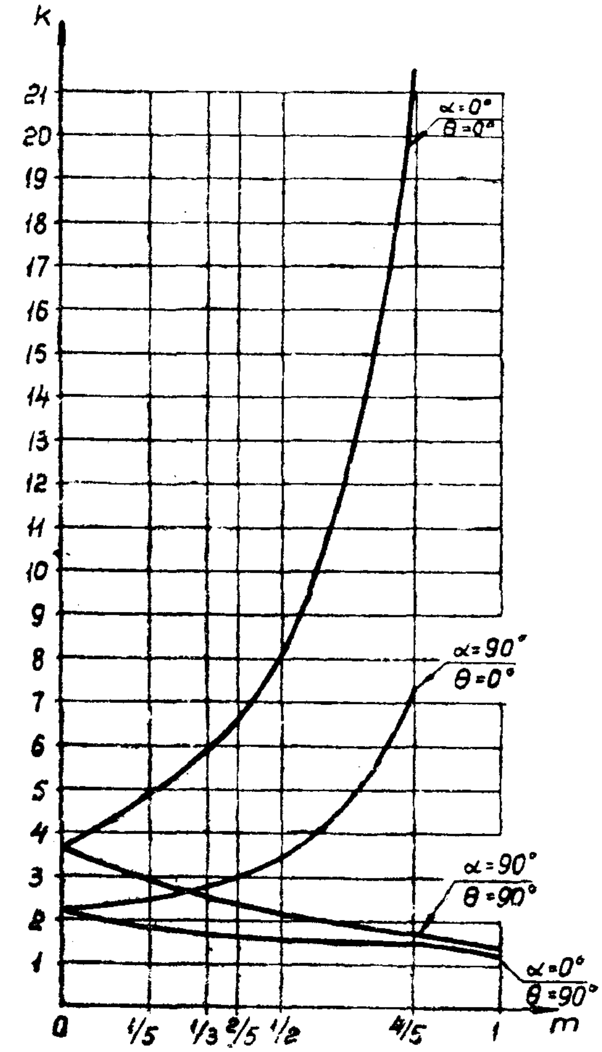
При $\alpha=45°$ (фиг. 6).

$$M_\rho(\theta)=\frac{9M}{2}\left[\frac{4}{9(1+\mu)}+\frac{6}{5(1-\mu)}\sin\theta\right]. \qquad (2.5)$$

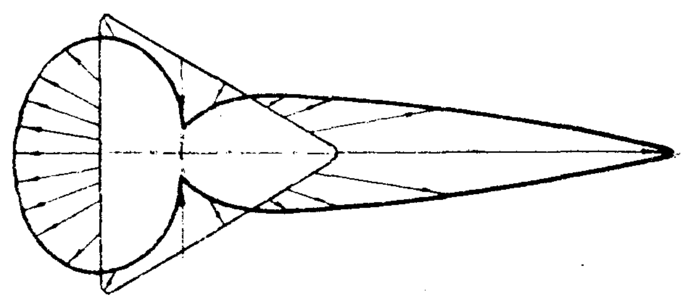
Изгибающий момент в обоих случаях представим в виде

$$M_\rho(\theta)=K_3(\theta)\cdot M,$$

где $K_3(\theta)$ коэффициент, значения которого для стальной плиты ($\mu = 0{,}3$) с квадратной шайбой $\left(m = \frac{1}{9}\right)$ приведены в таблице 2 и на фиг. 5 и 6.



Фиг. 3. Коэффициент концентрации K_1 на контуре эллиптической шайбы с различной степенью сжатия эллипса (m)

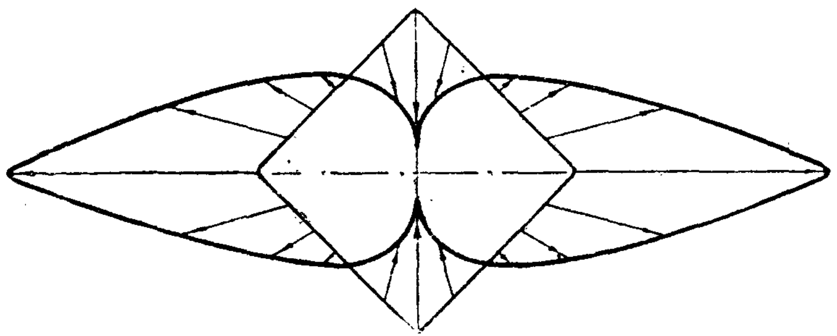


Фиг. 4. Распределение изгибающих моментов по контуру треугольной шайбы при $\alpha = 0^0$ ($\mu = 0{,}3$), $m = \frac{1}{4}$

Таблица 2

α	0°	45°
θ	K_3	K_3
0	6,36	1,54
30	1,21	2,46
45	0,38	2,31
60	−0,26	2,46
90	−3,28	1,54
135	0,38	2,31
150	1,21	2,46

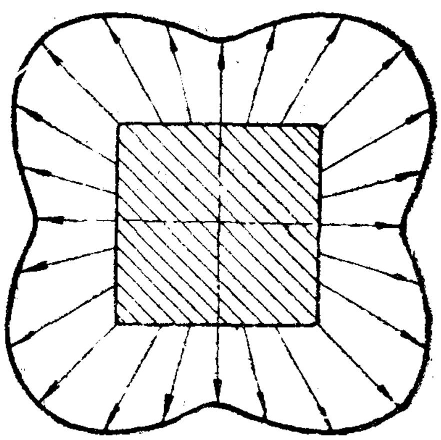
Следует заметить, что если в формулы (2.1), (2.2), (2.3) подставить $m=0$, то получаем решение для пластины с укрепленной круглой шайбой.



Фиг. 5. Распределение изгибающих моментов по контуру квадратной шайбы при $\alpha = 0^0$ ($\mu = 0{,}3$)

Совпадение этих результатов следовало ожидать, так как отображающая функция (12) при $m=0$ не зависит от n, а отображает окружность на себя. При этом изгибающий момент на контуре круглой шайбы имеет вид

$$M_0(\theta) = \frac{2M}{1+\mu} \cos\theta.$$



Фиг. 6. Распределение изгибающих моментов по контуру квадратной шайбы при $\alpha = 45^0$ ($\mu = 0{,}3$)

Этот результат совпадает с результатом, полученным С. Г. Лехницким [1] для пластины с круглой шайбой.

Изгиб пластин с криволинейными шайбами, загруженными моментом

а) Эллиптическая шайба

В этом случае на шайбу действует момент $\mathfrak{M}$, а моменты на внешней границе (бесконечность) стремятся к нулю.

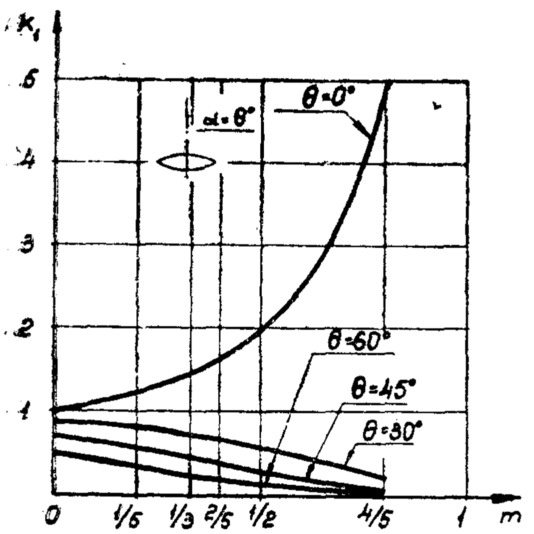
Из (6) следует, что $A = B = A' = B' = 0$. Коэффициенты a_1 и a_1' определяются равенством

$$a_1 = \bar{a}_1 = -\frac{\mathfrak{M}}{16\pi D}.$$

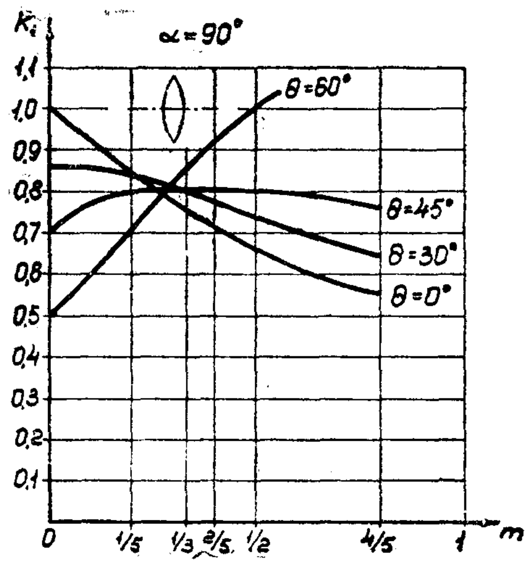
Из (17) и (18) запишем значения функций

$$\Phi_{\cdot}(\zeta) = \frac{a'\zeta}{\zeta^2 - m}, \tag{3.1}$$

$$\frac{\zeta^2 - m}{\zeta}\Psi_0(\zeta) = \frac{1 - m\zeta^2}{\zeta}\Phi_0(\zeta) - (1 + m\zeta^2)\Phi_0'(\zeta).$$



Фиг. 7. Изменение K_1 для эллиптических шайб с различной степенью сжатия (m)



Фиг. 8. Коэффициент K_1 на контуре эллиптических шайб с различной степенью сжатия эллипса (m)

Из (3) и (4) с учетом (3.1) получаем следующее выражение для изгибающего момента на контуре шайбы

$$M_\rho(\theta) = \frac{\mathfrak{M}}{2\pi} \cdot \frac{(1 - m)\cos\theta}{1 - 2m\cos 2\theta + m^2} \tag{3.2}$$

или представим в виде

$$M_\rho(\theta) = K_{1н}(\theta) \cdot \frac{\mathfrak{M}}{2\pi}. \tag{3.3}$$

Здесь $K_{1н}$ коэффициент, значение которого при различных m (степень сжатия эллипса) и Θ приведены на фиг. 7 и 8.

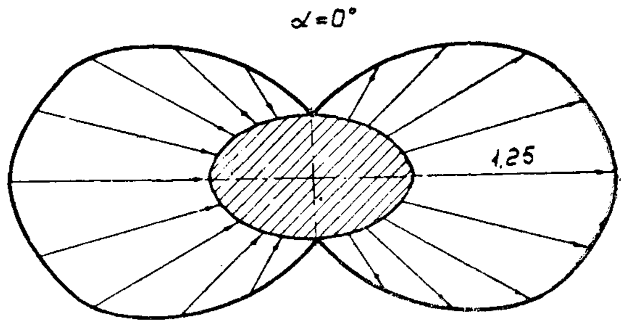
При $m > 0$ большая ось эллипса совпадает с осью X-ов ($\alpha = 0°$). (Фиг. 9, 10, 11).

При $m < 0$ большая ось эллипса перпендикулярна оси X-ов ($\alpha = 90°$). (Фиг. 12, 13, 14).

б) Треугольная шайба ($n=2$).

Повторив те же выкладки, что и в случае (a), запишем

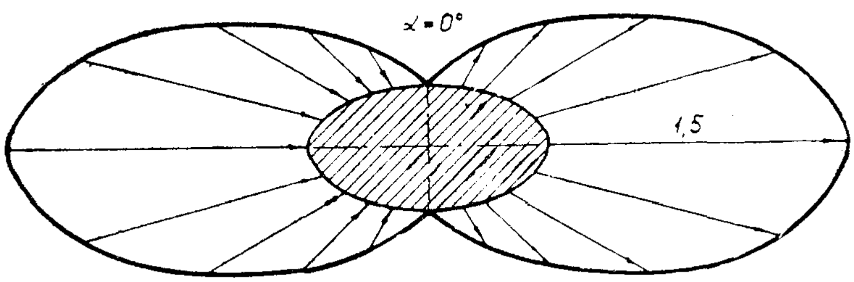
$$(\zeta^3-2m)\Phi_0(\zeta)=a_1{}'\zeta+m\bar{a}_1\zeta,$$



Фиг. 9. Концентрация напряжений K_1 в формуле $M_p=K_1\frac{M}{2\pi}$ на контуре эллиптической шайбы — $m=\frac{1}{5}$ при несимметричном изгибе моментом

$$\frac{\zeta^3-2m}{\zeta^2}\Psi_0(\zeta)=\frac{1-2m\zeta^2}{\zeta_2}\Phi_0(\zeta)-\frac{1+m\zeta^2}{\zeta}\bar{\Phi}_0{}'(\zeta)+$$

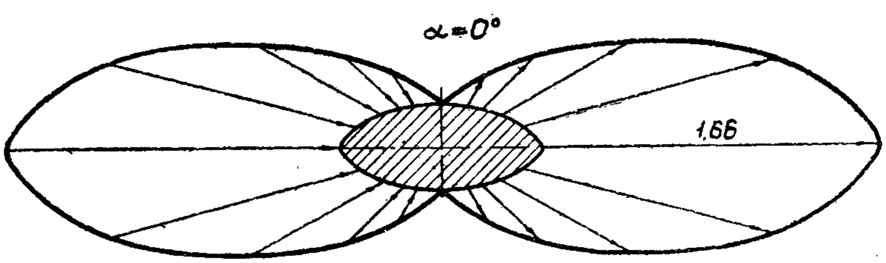
$$+ma_1+\frac{a_1{}'}{\zeta}. \qquad (3.4)$$



Фиг. 10. Концентрация напряжений $K_{1н}$ в формуле $M_p=K_{1н}\frac{M}{2\pi}$ на контуре эллиптической шайбы $m=\frac{1}{3}$ при несимметричном изгибе моментом

Изгибающий момент на контуре (3.4) шайбы будет

$$M_\rho(\theta)=\frac{\mathfrak{M}}{2\pi}\cdot\frac{(1-2m^2)\cos\theta-m\cos2\theta}{1-4m\cos3\theta+4m^2} \qquad (3.5)$$

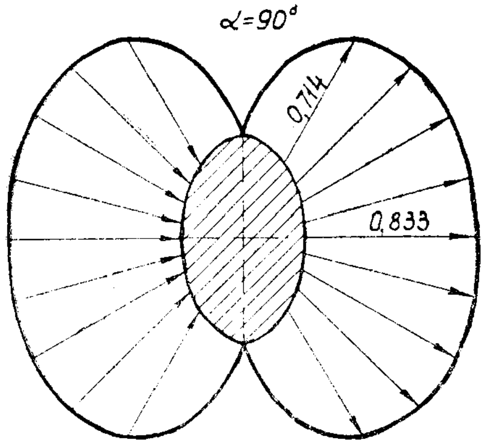


Фиг. 11. Концентрация напряжений K_1 в формуле $M_p=K_1\frac{M}{2\pi}$ на контуре эллиптической шайбы $\left(m=\frac{2}{5}\right)$ при изгибе

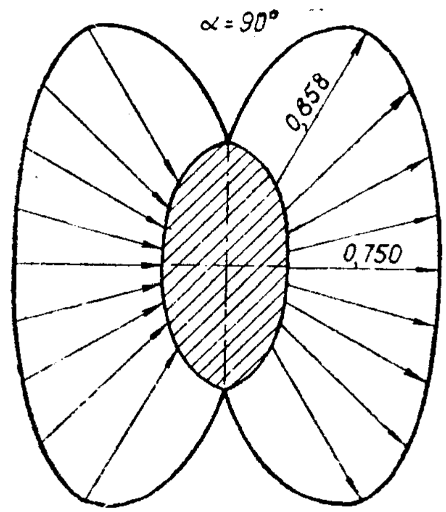
или

$$M_\rho(\theta) = K_{2н}(\theta) \cdot \frac{\mathfrak{M}}{2\pi}, \tag{3.6}$$

где $K_{2н}(\theta)$ при $m = \frac{1}{4}$ приведены в табл. 3. и на фиг. 15.



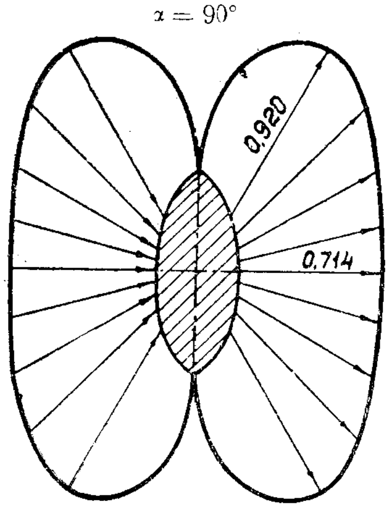
Фиг. 12. Концентрация напряжений K_1 на контуре эллиптической шайбы при несимметричном изгибе ($m = ^1|_5$)



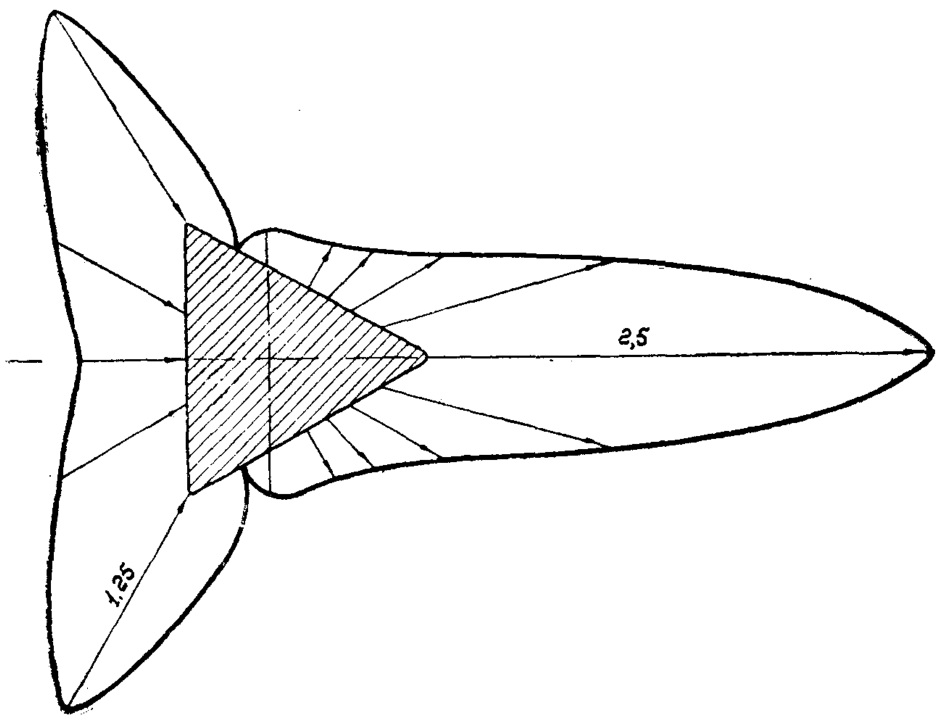
Фиг. 13. Концентрация напряжений K_1 на контуре эллиптической шайбы ($m = ^1|_3$) при несимметричном изгибе

Таблица 3

θ	$K_{2н}$
0	2,5
30	0,495
45	0,320
60	0,250
105	0
120	—1,250
135	—1,110
150	—0,702
180	—0,500



Фиг. 14. Концентрация напряжений K_1 на контуре эллиптической шайбы $\left(m = \frac{2}{5}\right)$ при несимметричном изгибе



Фиг. 15. Концентрация напряжений K_2 в формуле $M_p = K_2 \frac{M}{2\pi}$ на контуре треугольной шайбы $\left(m = \frac{1}{4}\right)$ при несимметричном изгибе моментом

в) Квадратная шайба ($n=3$)

Значения функций будут:

$$\frac{\zeta^4-3m}{\zeta^4}\,\Phi_0(\zeta) = a'_1\,\zeta^3 + 2\,ma_1\zeta, \tag{3.7}$$

$$\frac{\zeta^4-3m}{\zeta^4}\Psi_0(\zeta) = \frac{1-3\,m\zeta^4}{\zeta^2}\,\Phi_0(\zeta) - \frac{1+m\zeta^4}{\zeta}\,\Phi_0'(\zeta) + 2\,ma_1\,\zeta + \frac{a_1'}{\zeta}.$$

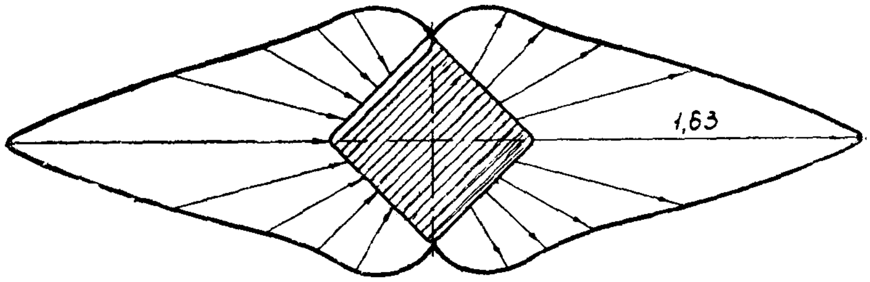
Значение изгибающего момента на контуре шайбы запишем в виде:

$$M_\rho(\theta) = \frac{\mathfrak{M}}{2\pi}\cdot\frac{(1-6\,m^2)\cos\theta - m\cos 3\theta}{1-6\,m\cos 4\,\theta + 9\,m^2} \tag{3.8}$$

или

$$M_\rho(\theta) = K_{3н}(\theta)\cdot\frac{\mathfrak{M}}{2\pi}. \tag{3.9}$$

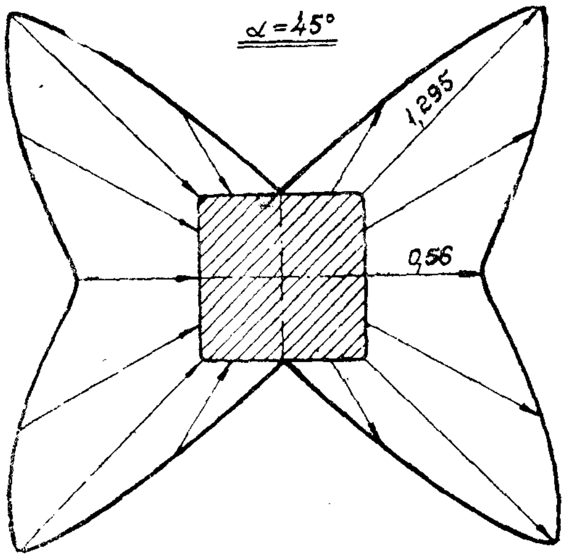
Значения коэффициента $K_{3н}(\theta)$ при $m = \frac{1}{9}$ приведены в табл. **4.** и на фиг. 16 и 17.



Фиг. 16. Концентрация напряжений K_3 в формуле $M_p = K_3 \dfrac{M}{2\pi}$ на контуре квадратной шайбы $\left(m = \dfrac{1}{9}\right)$ при изгибе ($\alpha = 0^0$)

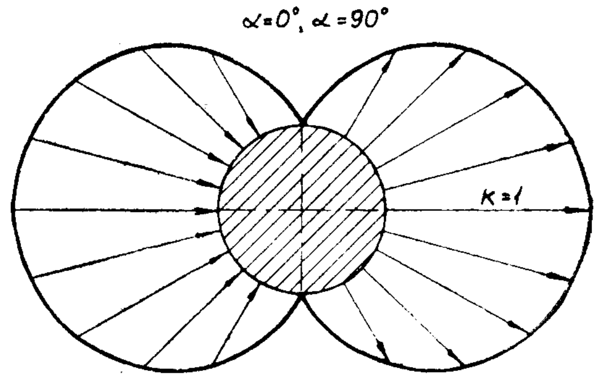
Таблица 4

θ \ α	0 ($K_{3н}$)	45° ($K_{3н}$)
0	1,68	0,56
30	0,552	1,02
45	0,408	1,295
60	0,397	0,452
90	0	0
120	—0,397	—0,452
135	—0,408	—1,295
150	—0,552	—1,02
180	—1,63	—0,56



Фиг. 17

Следует отметить, что при $m = 0$ выражения (3.2), (3.5) и (3.8) совпадают и мы получаем решение для случая круглой шайбы (фиг. 18).



Фиг. 18. Концентрация напряжений K_1 в формуле $M_p = K_1 \frac{M}{2\pi}$ на контуре круглой шайбы ($M=0$) при несимметричном изгибе моментом

В заключение автор пользуется случаем выразить благодарность своему учителю проф. доктору В. И. Блох за сделанные им ценные замечания и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. О некоторых случаях изгиба изотропной пластинки, ослабленной круговым отверстием. Вестник инженеров и техников № 12, стр. 725—727, 1936.
2. Лехницкий С. Г. О некоторых случаях изгиба анизотропной пластинки, ослабленной круговым отверстием. Вестник инженеров и техников № 4, стр. 249—252, 1937.
3. Фридман М. М. Изгиб тонкой изотропной плиты с криволинейным отверстием. ПММ, т. IX, вып. 4, стр. 334—338, 1945.
4. Савин Г. Н. Флейшман Н. П. Згин тонких плiт з круговим отвором, край якого пiдкрiплено пружиим кiльцем АН УРСР, № 6, 1948.
5. Лехницкий С. Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит. ПММ, т. II, вып. 2, стр. 181—210, 1938.
6. Лехницкий С. Г. ПММ, т. II, вып. 2, стр. 181—210, 1938. Анизотропные пластины, 1947.
7. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. АН СССР, стр. 251—266, 1949.
8. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки, стр. 252—256, 1948.
9. Найман М. И. Труды ЦАГИ, вып. 313, 1937.