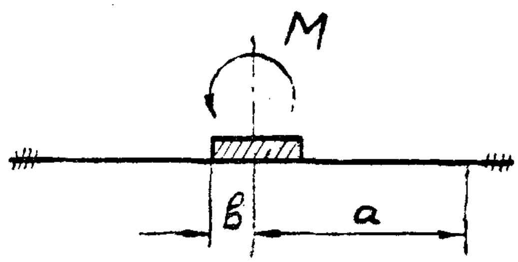
ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
Том 75 ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА 1954 г.

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ИЗГИБА ТОНКИХ ПЛАСТИН

М. Г. ПИНСКИЙ

I. Рассмотрим изгиб пластины моментом, приложенным к жесткой центральной круглой шайбе при защемлении внешнего края пластины (фиг. 1). Задача в такой постановке рассматривалась Ф. М. Диментбергом в работе [1],



Фиг. 1

В этой работе автор пришел, как нам представляется, к неправильному результату, допустив ошибку при составлении граничных условий на контуре шайбы.

Как известно, прогиб пластины W удовлетворяет в этом случае бигармоническому уравнению

$$\Delta\Delta W = 0 \tag{1}$$

или в полярных координатах имеет вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial w}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right) = 0. \tag{1'}$$

Решение проводим в полярных координатах r и θ.

Решение основного уравнения (1) будем искать в виде:

$$W(r,\theta) = f(r)\cos\theta, \tag{2}$$

где

$$f(r) = C_1 r + C_2 r^3 + C_3 r \ln r + C_4 r^{-1}. \tag{3}$$

Граничные условия имеют вид:

1) при $r = a$, $\quad W = \dfrac{\partial W}{\partial r} = 0;$ (4)

2) при повороте шайбы на некоторый угол φ_0 уравнение линии прогибов при $r = b$ имеет вид:

$$W(b,\theta) = w_0 \cos\theta, \tag{5}$$

где

$$w_0 = b\varphi_0.$$

Мы будем изучать упругую кривую вдоль радиуса $\theta = 0$.

При этом получаем представление обо всей упругой поверхности пластины в целом.

Произвольные постоянные, входящие в (3), мы определим из 4 граничных условий на внутреннем и внешнем контурах

Граничные условия принимают следующий вид:

1) Для наружного контура

$$C_1+3C_2a^2+C_3(1+\ln a)-C_4a^{-2}=0.$$

$$C_1+C_2a^2+C_3\ln a+C_4a^{-2}=0. \qquad (6)$$

2) Для внутреннего контура

$$W/_{r=b}=b\varphi_0, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial W}{\partial n/_{r=b}}=-\varphi_0.$$

Следует обратить внимание на последнее из равенства (7).

Производная от прогиба берется по внутренней нормали $\frac{\partial w}{\partial n}$ и, следовательно, необходимо учесть знак минус перед выражением для производной $\frac{\partial w}{\partial n}$.

Нам представляется, что результаты, полученные в работе (1), оказались неправильными именно вследствие того, что это обстоятельство не было учтено.

Уравнения (7) дают

$$C_1+C_2b^2+C_3\ln b+C_4b^{-2}=\varphi_0,$$

$$C_1+3C_2b^2+C_3(1+\ln b)-C_4b^{-2}=-\varphi_0. \qquad (7$$

Решая систему уравнений (6) и (7'), получаем значения постоянных:

$$C_1=\frac{b^2[2(a^2\ln b-b^2\ln a)-a^2+b^2]}{\left[(a^2+b^2)\ln\frac{a}{b}-a^2+b^2\right]}\varphi_0,$$

$$C_2=\frac{b^2\ln\frac{a}{b}}{(a^2+b^2)\left[(a^2+b^2)\ln\frac{a}{b}-a^2+b^2\right]}\varphi_0,$$

$$C_3=\frac{-2b^2}{\left[(a^2+b^2)\ln\frac{a}{b}-a^2+b^2\right]}\varphi_0, \qquad (8)$$

$$C_4=\frac{a^2b^2\left(a^2\ln\frac{a}{b}-a^2+b^2\right)}{(a^2+b^2)\left[(a^2+b^2)\ln\frac{a}{b}-a^2+b^2\right]}\varphi_0.$$

Учитывая (2), (3) и (8), запишем выражение для прогиба пластины

$$W=\frac{\varphi_0\cos\theta}{(a^2+b^2)\left[(a^2+b^2)\ln\frac{a}{b}-a^2+b^2\right]}\cdot\left\{b^2\left[2(a^2\ln b-b^2\ln a)+(a^2+b^2)\right]r+\right.$$

$$\left.+b^2\ln\frac{a}{b}r^3-2b^2\left(a^2-b^2\right)r\ln r+a^2b^2\left(a^2\ln\frac{a}{b}-a^2+b^2\right)r^{-1}\right\}. \qquad (9)$$

Угол φ_0 определим из условий равновесия, для чего подсчитаем изгибающий момент и реакцию в месте примыкания пластины к шайбе

$$M_\theta = -D\left[(6C_2 r + C_3 r^{-1} + 2C_4 r^{-3}) - \frac{2\mu\varphi_0}{(a^2+b^2)\ln\frac{a}{b} - a^2 + b^2}\right]\cos\theta. \quad (10)$$

$$V_{(r)} = Q_\rho + \frac{\partial M_{\rho\theta}}{r\partial\theta} = -D\left[(8C_2 - 2C_3 r^{-2} + 2\varphi_0(1-\mu)r^{-2}\right]\cos\theta. \quad (11)$$

Запишем сумму моментов относительно диаметра $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$M = \int_0^{2\pi}\left[M_\theta(b) + bV_r(b)\right]b\cos\theta\, d\theta,$$

где M — внешний момент, приложенный к шайбе.

Учитывая (10) и (11), мы окончательно получаем выражение для угла поворота шайбы

$$\varphi_0 = -\frac{M}{2\pi D}\cdot\frac{[1-\beta^4]\ln\beta + (1-\beta^2)^2]}{\{(1-2\mu)[(1-\beta^4)\ln\beta + (1-\beta^2)^2] + (1+7\beta^4)\ln\beta - (1-\beta^2)^2\}}. \quad (12)$$

Из (12) видно, что угол поворота шайбы зависит лишь от отношения $\beta = \frac{b}{a}$.

Заменив в (9) φ_0 по (12), получим окончательно для прогиба

$$W(r_1\theta) = -\frac{M\cos\theta}{2\pi D}\left\{\left[2\beta^2{}_i(\ln b - \beta^2{}_i\ln a) + \beta^2{}_i - \beta^4{}_i\right] r - \frac{\beta^2{}_i\ln\beta_i}{a^2} r^3 - \right.$$

$$\left. - 2\beta^2{}_i(1-\beta^2{}_i)\, r\ln r - \beta^2{}_i(a^2\ln\beta_i + a^2 - b^2)r^{-1}\right\}\times$$

$$\times\frac{1}{\{(1-2\mu)[(1-\beta_i^4)\ln\beta_i + (1-\beta_i^2)^2] + (1+7\beta_i^4)\ln\beta_i - (1-\beta_i^2)^2\}}. \quad (13)$$

Выражение для изгибающего момента будет:

$$M_\theta = \frac{M\cos\theta}{2\pi}\left\{\frac{b^2}{a^4}\ln\frac{a}{b}. r - 2r^{-1}\left\{b^2(a^2-b^2) + \mu(a^2-b^2)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left[(a^2+b^2)\ln\frac{a}{b} - a^2 + b^2\right]\frac{1}{a^4}\right\} + 2a^2b^2r^{-3}\left(a^2\ln\frac{a}{b} - a^2 + b^2\right)\right\}\times$$

$$\times\frac{1}{\{(1-2\mu)[(1-\beta^4)\ln\beta + (1-\beta^2)^2] + (1+7\beta^4)\ln\beta - (1-\beta^2)^2\}} \quad (14)$$

Наибольший момент M_θ будет в месте примыкания пластины к шайбе при $r = b$.

Запишем выражение для изгибающего момента при $\theta = 0°$

$$M_\theta(b) = \frac{M}{2\pi b}\left\{2(1+3\beta^4) + \beta^2(1-\beta^2) + 2(1-\beta^2) + 2\mu[(1-\beta^4)\ln\beta + (1-\beta^2)^2]\right\}\times$$

$$\times\frac{1}{\{(1-2\mu)[(1-\beta_i^4)\ln\beta + (1-\beta^2)^2] + (1+7\beta^2)\ln\beta + (1-\beta^2)^2\}}. \quad (15)$$

Из выражения (15) видно, что изгибающий момент у контура шайбы не зависит от коэффициента Пуассона μ, а зависит от $\beta=\frac{b}{a}$.

Значение изгибающего момента M_r при $r=b$ будет:

$$M_r(b)=-\frac{M\cos\theta}{2\pi b}\Big\{\mu[6\beta^4\ln\beta+2\beta^2(1-\beta^2)+2(1+\ln\beta-\beta^2)]-$$

$$-2(1-\beta^4)\ln\beta+(1-\beta^2)^2\Big\}\times$$

$$\times\frac{1}{\{(1-2\mu)[(1-\beta^4)\ln\beta+(1-\beta^2)^2]+(1+7\beta^2)\ln\beta-(1-\beta^2)^2\}}. \tag{16}$$

Значение изгибающего момента M_θ на внешнем контуре $r=a$ запишем в виде:

$$M_\theta(a)=-\frac{M}{2\pi a}\Big\{8\beta^2\ln\beta+4(1-\beta^2)\beta^2+\mu[(1-\beta^4)\ln\beta+(1-\beta^2)^2]\Big\}\times$$

$$\times\frac{1}{(1-2\mu)[(1-\beta^4)\ln\beta+(1-\beta^2)^2]+(1+7\beta^4)\ln\beta-(1-\beta^2)^2} \tag{17}$$

Подсчитав величину перерезывающей силы, получаем

$$Q_r=-\frac{M}{2\pi b^2}\cdot\Big[4\beta^2(1-\beta^2)+2(1-\mu)(1-\beta^4)\ln\beta+(1-\beta^2)^2-8\beta^4\ln\beta\Big]\times$$

$$\times\frac{1}{(1-2\mu)[(1-\beta^4)\ln\beta+(1-\beta^2)^2]+(1+7\beta^4)\ln\beta-(1-\beta^2)^2}. \tag{18}$$

Имея выражение для φ_c, w, M_θ, M_r, V_r, Q_r, мы можем получить решение для бесконечной пластины с жесткой центральной круглой шайбой.

Пусть $a\to\infty$ (т. е. $\beta\to 0$).

Подставляя в выражения (12), (13), (15), (16), (11) и (18) значение $\beta=0$ и переходя к пределу, мы получаем соответствующие выражения для пластины с малой круглой шайбой, т. е. неограниченной пластины.

$$\varphi_0=\frac{M}{4\pi D(1-\mu)}, \tag{19}$$

$$W=\frac{Mb^2\cos\theta}{4\pi D(1-\mu)\,r}, \tag{20}$$

$$M_\theta(b)=-\frac{M\cos\theta}{2\pi b}, \tag{21}$$

$$M_r(b)=\frac{M\cos\theta}{2\pi b}, \tag{22}$$

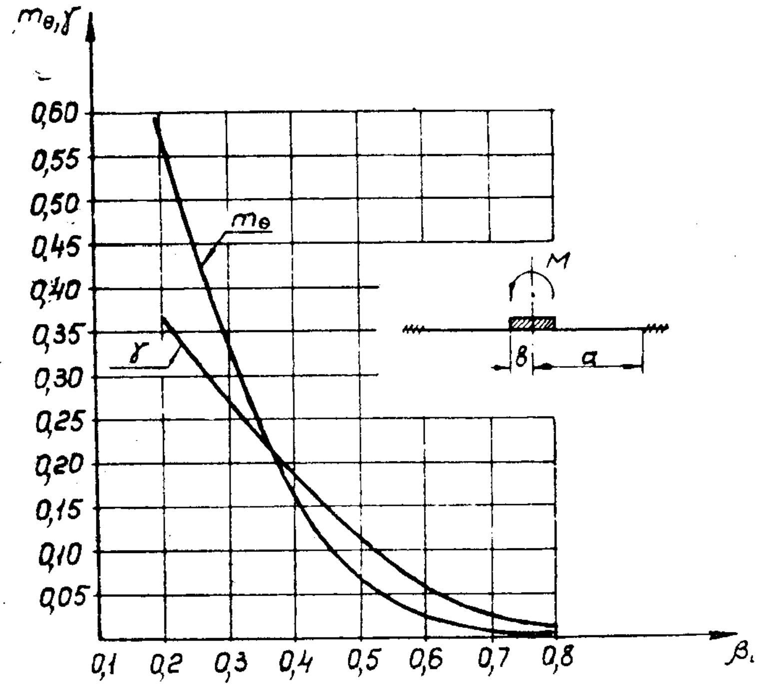
$$V_r=\frac{M\cos\theta}{2\pi b^2}, \tag{23}$$

$$Q_r=-\frac{M\cos\theta}{2\pi b^2}, \tag{24}$$

Для упрощения расчетов мы приведем выражение для φ_0 и M_θ на внутреннем контуре к виду, удобному для вычислений.

$$\varphi_0 = \frac{M}{Eh^3}\gamma, \tag{25}$$

где γ для стали ($\mu = 0{,}28$) приведен в таблице.



Фиг. 2

Для изгибающего момента $M_\theta(b)$ мы получаем выражение вида

$$M_\theta = -\frac{M\cos\theta}{2\pi b}\, m_\theta, \tag{26}$$

где m_θ для ста приведен в таблице и на фигуре 2.

Таблица

β	γ	m_θ
0,2	0,57	0,372
0,3	0,36	0,287
0,4	0,162	0,181
0,5	0,0638	0,109
0,6	0,025	0,059
0,7	0,005	0,0182
0,8	0,0028	0,0146

II. Мы исследовали изгиб бесконечной пластины с жесткой круглой шайбой радиуса b, находящейся под действием момента, приложенного к шайбе, с помощью функций комплексного переменного.

Упругая поверхность пластины удовлетворяет бигармоническому уравнению (1)

Как известно, решение такого уравнения может быть представлено посредством двух аналитических функций $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ комплексного переменного по формуле Е. Гурса (2) в следующем виде.

$$W = z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \bar{z}\varphi(z) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}), \tag{II.1}$$

где $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ функции комплексного переменного

$$z = x + iy,$$

$\bar{\varphi}(\bar{z})$ и $\bar{\chi}(\bar{z})$ — сопряженные функции комплексного переменного

$$\bar{z} = x - iy.$$

Задача заключается в определении бигармонической функции вне контура шайбы при известных условиях на контуре (S) шайбы, т. е. при заданных значениях самой функции и ее производной по нормали к контуру.

Так как функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ регулярны в области пластины, то эти функции могут быть представлены внутри этой области рядом Лорана и при этом единственным образом. Имея это в виду, представим функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ рядами вида:

$$\varphi(z) = \sum_{0}^{\infty} a_k z^{-k}$$

$$\chi(z) = \sum_{0}^{\infty} b_k z^{-k} \tag{II.2}$$

Коэффициенты ряда функций (II.2) должны удовлетворять условию равенства перемещения нулю на бесконечном расстоянии от шайбы

$$W/_{R\to\infty} = 0, \tag{II.3}$$

где R — расстояние до произвольной точки пластины. Так как в любой точке пластины $z = Re^{i\upsilon}$, то при

$$R \to \infty \quad \text{и} \quad z \to \infty.$$

Рассмотрим, какие ограничения накладываются на коэффициенты ряда, чтобы выполнялось условие (II.3).

Запишем равенство (II.1), учитывая (II.2) и переходя к пределу при $z \to \infty$.

Тогда мы получим

$$\lim \Big[z\bar{a}_0 + \frac{z\bar{a}_1}{\bar{z}} + \frac{z\bar{a}_2}{\bar{z}^2} + \ldots + \bar{z}a_0 + \frac{\bar{z}}{z}a_1 + \frac{\bar{z}}{z^2}a_2 + \ldots +$$

$$+ b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + \bar{b}_0 + \bar{b}_1\bar{z}^{-1}\Big] = 0]. \tag{II.4}$$

Равенство (II.4) будет иметь место при выполнении следующих равенств:

$$z\bar{a}_0 + \bar{z}a_0 = 0,$$

$$\frac{z}{\bar{z}}\bar{a}_1 + \frac{\bar{z}}{z}a_1 = 0,$$

$$b_0 + \bar{b}_0 = 0.$$

Легко показать, что в этом случае

$$a_0 = \bar{a}_0 = a_1 = \bar{a}_1 = 0.$$

После этих предварительных замечаний мы можем представить аналитические функции в виде рядов Лорана:

$$\varphi(z) = \sum^{\infty} a_k z^{-k}\ , \overline{\varphi}(\overline{z}) = \sum_{2}^{\infty} \overline{a}_k\ \overline{z}^{-k} \tag{II.5}$$

функцию $\chi(z)$ представим в виде

$$\chi(z) = b_0 + \sum_{1}^{\infty} b_k z^{-k},$$

$$\overline{\chi}(\overline{z}) = \overline{b}_0 + \sum_{1}^{\infty} \overline{b}_k\ \overline{z}^{-k}. \tag{II.6}$$

Запишем граничные условия на контуре шайбы.

1. Перемещение на контуре шайбы можно записать в виде

$$W_s = b\varphi_0 \cos\theta \tag{II.6'}$$

или

$$\left[\ z\,\overline{\varphi}(\overline{z}) + \overline{z}\,\varphi(z) + \chi(z) + \overline{\chi}(\overline{z})\ \right]_s = b\varphi_0 \frac{\sigma + \sigma^{-1}}{2}\ , \tag{II.6''}$$

где $\sigma = e^{iv}$ — единичный вектор нормали.

2. Для составления второго условия на контуре шайбы примем во внимание, что производная по внешней нормали будет [3]

$$\frac{\partial W}{\partial n} = n\ \frac{\partial W}{\partial \overline{z}} + \overline{n}\ \frac{\partial W}{\partial z}, \tag{II.7}$$

где $n = e^{iv} = \sigma$ — единичный вектор нормали,

$\overline{n} = e^{-iv} = \overline{\sigma}$ — величина сопряженная.

Тогда из геометрических соображений можно записать, что на контуре

$$\left|\frac{\partial w}{\partial n}\right| = \left|\frac{w_s}{b}\right| = \left|\ \varphi_0 \cos\theta\ \right|.$$

Учитывая, что производная берется по внутренней нормали, окончательно запишем граничное условие на контуре в виде:

$$\left[\ z\,\overline{\varphi}(\overline{z}) + \overline{z}\,\varphi(z) + \varphi'(z) + \overline{\varphi'}(\overline{z}) + z\,\chi'(z) + \overline{z}\,\overline{\chi'}(\overline{z})\ \right]_s = -\varphi\ \frac{z + z^{-1}}{2}\ . \tag{II.8}$$

В уравнение (II.6′) подставим значение (II.8) функций (II.5) и (II.6), учитывая, что на контуре шайбы

$$z = b\sigma = be^{iv},$$

тогда окончательно условие (II.6′) запишем:

$$\sum_{2}^{\infty} a_k b^{-(k-1)}\ \sigma^{-(k+1)} + \sum_{2}^{\infty} \overline{a}_k b^{-(k-1)}\ \sigma^{k+1} + \sum_{1}^{\infty} b_k b^{-k}\,\sigma^{-k} + \sum_{1}^{\infty} \overline{b}_k b^{-k} \sigma^{k} =$$

$$= b\,\varphi_0\ \frac{(\sigma + \sigma^{-1})}{2}. \tag{II.9}$$

Для определения коэффициентов b_k приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях σ. Это дает нам следующие равенства:

$$b_1 = \overline{b}_1 = \frac{b^2}{2}\varphi_0,$$

$$b_2 = \overline{b}_2 = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при σ^k и σ^{-k}, мы получаем

$$b_k = -b^2 a_{k-1},$$

$$\overline{b}_k = -b^2 \overline{a}_{k-1}. \tag{II.10}$$

Замечая, что разложение для $\varphi(z)$ вида (II.5), то есть начинается с $k=2$, второе граничное условие (II.8) представим в виде:

$$\sum_2^\infty \overline{a}_k b^{-k}\sigma^{k+1} - \sum_2^\infty k a_k b^{-k}\sigma^{-(k+1)} - \sum_1^\infty k b_k b^{-(k+1)}\sigma^k -$$

$$-\sum_2^\infty k\overline{a}_k b^{-k}\sigma^{k+1} + \sum_2^\infty a_k b^{-k}\sigma^{-(k+1)} - \sum_1^\infty k\overline{b}_k b^{-(k+1)}\sigma^k =$$

$$= -\varphi_0 \frac{\sigma + \sigma^{-1}}{2}. \tag{II.11}$$

Приравнивая коэффициенты при σ^k и σ^{-k}, мы получаем

$$\frac{a_{k-1}}{b^{k-1}} - \frac{(k-1)a_{k-1}}{b^{k-1}} - \frac{kb_k}{b^{k+1}} = 0,$$

$$\frac{\overline{a}_{k-1}}{b^{k-1}} - \frac{(k-1)\overline{a}_{k-1}}{b^{k-1}} - \frac{k\overline{b}_k}{b^{k+1}} = 0. \tag{II.12}$$

Из (II.10) и (II.12) получаем

$$\overline{a}_{k-1} = a_{k-1} = 0 \quad (k > 1),$$

а, следовательно, из (II.10) получаем

$$\overline{b}_k = b_k = 0 \qquad (k > 1).$$

Таким образом, функция $\varphi(z)$ тождественно равна нулю и, следовательно, перемещение пластины представляем в виде

$$W = b_0 + \overline{b}_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{\overline{b}_1}{z}. \tag{II.13}$$

Учитывая $b_0 + \overline{b}_0 = 0$, получаем прогиб

$$W = \frac{b^2\varphi_0}{z^2}\, x, \tag{II.14}$$

где
$$x = R\cos\theta$$

или
$$W = \frac{b^2\varphi_0 \cos\theta}{R} \tag{II.14'}$$

Определим величины моментов M_θ, M_r и $M_{r\theta}$, для чего обратимся к выражениям, принадлежащим С. Г. Лехницкому [4]

$$M_\theta - M_r + 2iM_{r\theta} = 4(1-\mu)De^{iv}[\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)]$$

$$M_r + M_\theta = -8(1-\mu)DRe[\varphi'(z)].$$

Нам необходимо получить значения моментов на контуре шайбы при $z = be^{iv} = b\sigma$.

После несложных преобразований, отделив вещественную и мнимую части, получаем

$$M_\theta - M_\rho = 4(1-\mu)D\frac{\varphi_0}{b}\cos\theta,$$

$$M_\theta + M_\rho = 0. \tag{II.15}$$

Решая (II.15), получим значение изгибающих моментов

$$M_\theta = 2(1-\mu)D\frac{\varphi_0}{b}\cos\theta,$$

$$M_r = -2(1-\mu)D\frac{\varphi_0}{b}\cos\theta. \tag{II.16}$$

Приравнивая мнимые части, получаем

$$M_{r\theta} = -2(1-\mu)\,D\frac{\varphi_0}{b}\sin\theta. \tag{II.17}$$

Мы рассмотрим равновесие жесткой круглой шайбы под действием изгибающих и крутящих моментов, а также перерезывающих сил.

Реакция в месте примыкания шайбы к пластинке выражается

$$V_r = Q_r + \frac{1}{r}\left.\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial\theta}\right|_{r=b}$$

или

$$V_r = -2(1-\mu)\,D\frac{\varphi_0}{b^2}\cos\theta.$$

Запишем условие равновесия шайбы

$$M = \int_0^{2\pi}[M_\theta\cos\theta + V_r b\cos\theta]bd\theta, \tag{II.18}$$

откуда получаем

$$M = 4(1-\mu)\pi D\varphi_0,$$

где M—внешний момент, приложенный к шайбе, или угол поворота шайбы

$$\varphi_0 = -\frac{M}{4\pi(1-\mu)D}. \tag{II.19}$$

Для стали ($\mu = 0{,}3$) получаем

$$\varphi_0 = -1{,}24\frac{M}{Eh^3}.$$

Выражение для изгибающих моментов

$$M_\theta = -\frac{M\cos\theta}{2\pi b}, \tag{II.20}$$

$$M_r = \frac{M\cos\theta}{2\pi b}. \tag{II.21}$$

Для прогиба пластины окончательно получаем

$$W = \frac{Mb^2\cos\theta}{4\pi(1-\mu)D.R}. \tag{II.22}$$

Для стальной пластины прогиб на контуре шайбы будет

$$W = 1{,}24\ \frac{Mb\cos\theta}{Eh^3}.$$

Перерезывающая сила в месте примыкания шайбы к пластине представится

$$V_r(b) = -\frac{M\cos\theta}{2\pi b^2}. \tag{II.23}$$

Полученные нами выражения (II.19), (II.20), (II.21), (II.22), (II.23) совпадают соответственно с выражениями (19), (21), (22), (20) и (23), полученными в I из решения для конечной круглой пластины при предельном переходе, когда наружный радиус a пластины бесконечно возрастает, а радиус шайбы не изменяется.

Мы пришли к этим результатам совершенно различными методами, это совпадение результатов подтверждает правильность выкладок.

Автор выражает благодарность проф.-доктору В. И. Блох за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Диментберг Ф. М. Об одном случае изгиба круглой пластинки. Вестник инженеров и техников, № 7, стр. 415—418, 1938.

2. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. III, стр. 402.

3. Лурье А. И. Некоторые задачи об изгибе круглой пластинки. Прикладная математика и механика, вып. I, том IV, стр. 93—102, 1940.

4. Лехницкий С. Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит—ПММ, вып. 2, том II, стр. 181—210, 1938.