

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ СО СТУПЕНЧАТО-ПЕРЕМЕННЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Г. Е. ПУХОВ

Ниже рассмотрена общая задача об определении токов и напряжений в линейной электрической цепи с сосредоточенными параметрами, одно из сопротивлений которой следующим образом изменяется во времени:

$$r(t) = \begin{cases} r_1 & \text{от } t_0 & \text{до } t_1, \\ r_2 & \text{" } t_1 & \text{" } t_2, \\ \dots & \dots & \dots \\ r_k & \text{" } t_{k-1} & \text{" } t_k, \end{cases} \quad (0.1)$$

и т. д.,

а также частная задача, соответствующая случаю циклического изменения $r(t)$ по закону периодической ступенчатой функции:

$$r(t) = \begin{cases} \left. \begin{array}{l} r_1 \text{ от } t_0 \quad \text{до } t_1, \\ r_2 \text{ " } t_1 \quad \text{" } t_2, \\ \dots \\ r_s \text{ " } t_{s-1} \quad \text{" } t_s = T, \end{array} \right\} & \text{Первый цикл} \\ \left. \begin{array}{l} r_1 \text{ от } T \quad \text{до } T + t_1 \\ r_2 \text{ " } T + t_1 \quad \text{" } T + t_2, \\ \dots \\ r_s \text{ " } T + t_{s-1} \quad \text{" } T + t_s = 2T, \end{array} \right\} & \text{Второй цикл} \\ \left. \begin{array}{l} r_1 \text{ от } 2T \quad \text{до } 2T + t_1, \\ r_2 \text{ " } 2T + t_1 \quad \text{" } 2T + t_2, \\ \dots \end{array} \right\} & \text{и т. д.} \end{cases} \quad (0.2)$$

Здесь $t_0 = 0$ — начало отсчета времени t , T — период изменения $r(t)$ или, что то же, продолжительность цикла, s — число ступеней времени цикла.

В течение каждой ступени времени $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots, s$) сопротивление $r(t)$ постоянно и равно r_k . Для некоторых ступеней времени сопротивление может обращаться в бесконечность (цепи с прерывателями).

Ступенчатое изменение $r(t)$, соответствующее (0.1) и (0.2), практически осуществляется электронными и механическими переключающими устройствами.

1. Изучение процессов в цепи со ступенчато-переменными сопротивлениями обычно ведется при помощи метода припасовывания, предложен-

ного еще в 1912 году академиком Н. Д. Папелекси [1] для расчета цепи с выпрямителем, то есть нелинейной цепи. Применение этого метода для решения рассматриваемой линейной и поэтому принципиально более простой задачи ведет к несколько менее сложным, но все-таки к достаточно громоздким вычислениям и кратко сводится к следующему.

В течение промежутка времени τ_k сопротивление цепи остается неизменным и равным r_k , и поэтому ее состояние описывается системой интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Решив эту систему в общем виде для k -той ступени времени и полагая в решении $k = 1, 2, \dots$, можно затем, зная начальные условия для первой ступени, шаг за шагом, то есть „припасовывая“ к первой ступени вторую, ко второй третью и т. д., определить искомые токи и напряжения в любой момент времени.

Будучи достаточно общим, метод припасовывания обладает и недостатками, из которых существенными для рассматриваемой задачи являются следующие два: 1) определение состояния цепи в заданной ступени времени связано с необходимостью предварительного расчета токов и напряжений всех предыдущих ступеней и 2) при ступенчато-периодическом изменении сопротивления согласно (0,2) метод припасовывания дает возможность получить лишь приближенное решение, если исследуется установившийся режим.

Повидимому, именно эти недостатки и привели к появлению иных методов расчета, в частности, основанных на применении уравнений в конечных разностях. В [2; 3], например, указано, как при помощи разностных уравнений произвести расчет генератора пилообразных напряжений, в [4] описаны методы расчета некоторых процессов прерывистого регулирования, в [5], где разностные уравнения алгебраизируются путем применения так называемого дискретного преобразования Лапласа, рассчитана принципиальная схема инвертора и т. д.

Несмотря на несомненные успехи, достигнутые в направлении использования аппарата разностных уравнений, необходимо иметь в виду, что этот аппарат совершенно непригоден для решения упомянутой общей задачи, отвечающей согласно (0.1) непериодическому процессу, а также непригоден для определения токов и напряжений внутри цикла периодического процесса. Как видно из [2], процесс внутри цикла и при использовании уравнений в конечных разностях исследуется методом припасовывания.

Предлагаемый метод расчета основан на замеченной аналогии между уравнениями так называемых проходных цепных схем, то есть схем, состояние звеньев (подсхем) которых может быть описано только входными и выходными величинами [6] и уравнениями процесса в рассматриваемой цепи со ступенчато-переменным сопротивлением. Такому процессу отвечает „временная“ цепная схема, подсхемами которой являются последовательно соединенные ступени времени („выход“ данной ступени непосредственно сочленен с „входом“ следующей ступени).

Аналогия между обычной цепной схемой и „временной“ цепной схемой получается наиболее полной, если условиться называть „входом“ любой ступени времени ее конец, а „выходом“—начало. Тогда „вход“ „временной“ цепной схемы будет соответствовать рассматриваемому моменту времени, а „выход“—началу процесса. Временная цепная схема изображена на фиг. 1.

Заметим, что полученные ниже расчетные выражения (2.13) и (2.14) являются, по существу, некоторым обобщением известной в матричной теории дифференциальных уравнений так называемой формулы продолжения [8].

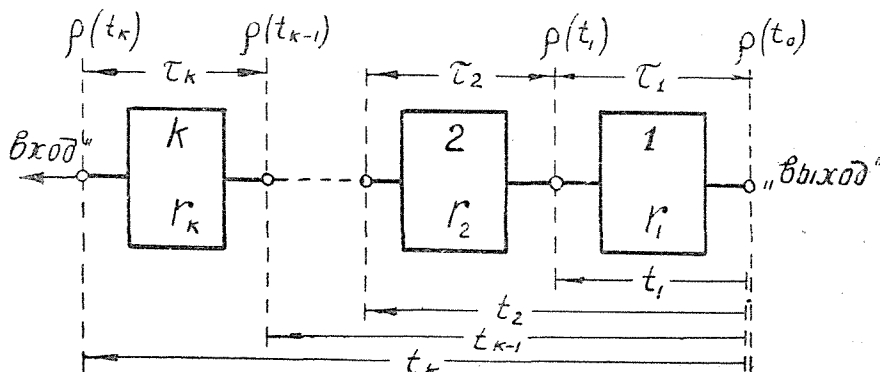
2. Рассмотрим метод расчета цепи для общего случая, когда сопротивление $r(t)$ изменяется согласно (0.1). Для сокращения записи закона изменения $r(t)$ воспользуемся понятием единичной функции $\sigma_0(t)$ и введем обозначение:

$$\gamma_k = \sigma_0(t - t_{k-1}) - \sigma_0(t - t_k) = \begin{cases} 0 & \text{для } t < t_{k-1}, \\ 1 & \text{„ } t_{k-1} \leq t \leq t_k, \\ 0 & \text{„ } t > t_k. \end{cases} \quad (2.1)$$

Очевидно, γ_k представляет прямоугольный единичный импульс длительностью $\tau_k = t_k - t_{k-1}$, равный единице в промежутке времени от t_{k-1} до t_k , а в остальных промежутках равный нулю. При посредстве γ_k зависимость (0.1) запишется короче:

$$r(t) = r_k \gamma_k \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2.2)$$

В качестве переменных уравнений состояния цепи выберем переменные, которые не могут изменяться скачком. Тогда как в обычной цепной схеме выходные величины данного звена (ступени времени) одновременно будут являться входными величинами для следующего звена. Если индук-



Фиг. 1

тивности катушек и емкости конденсаторов цепи постоянны, то непрерывными будут токи в катушках и напряжения на конденсаторах. Эти токи и напряжения условимся называть непрерывными переменными и обозначать $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$.

Переменные ($k = 1, 2, \dots, m$) удобно считать компонентами m -мерного вектора вида

$$\rho = \rho(t) = \begin{bmatrix} \rho_1 = \rho_1(t) \\ \rho_2 = \rho_2(t) \\ \vdots \\ \rho_m = \rho_m(t) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Порядок вектора ρ равен порядку дифференциального уравнения, описывающего состояние цепи или, что приводит к такому же результату, числу независимых накопителей электрической и магнитной энергии цепи. В общем случае, когда каждая из B ветвей цепи содержит и индуктив-

ности и емкости, порядок вектора ρ будет равен $2B$. Например, для цепи фиг. 2 вектор ρ будет двухмерным:

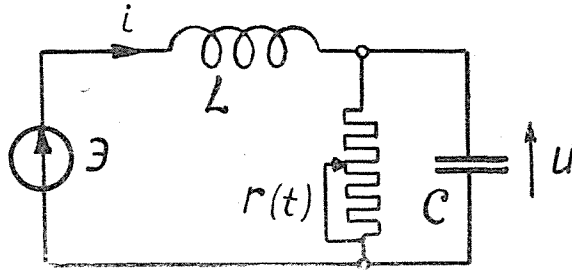
$$\rho(t) = \begin{bmatrix} \rho_1 = u(t) \\ \rho_2 = i(t) \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

где $u(t)$ — напряжение на емкости, а $i(t)$ — ток в индуктивности.

В силу предполагаемой линейности цепи закон изменения непрерывных переменных в промежутке времени от t_{k-1} до t_k должен выражаться зависимостью:

$$\rho(t) = \gamma_k \zeta(t-t_{k-1}) \rho(t_{k-1}) + \gamma_k \zeta_0(t-t_{k-1}), \quad (2.5)$$

где $\zeta(t-t_{k-1})$ и $\zeta_0(t-t_{k-1})$ — соответственно матрица и вектор, компоненты которых зависят от времени, а $\rho(t_{k-1})$ — значение вектора $\rho(t)$ в начале k -той ступени, то есть при $t=t_{k-1}$ ($k=1, 2, \dots$).



Фиг. 2

Зависимость (2.5) для каждой конкретной цепи находится путем составления и решения ее интегро-дифференциальных уравнений для k -той ступени времени. Так, для цепи фиг. 2 при $E = \text{пост.}$ после решения очевидных уравнений:

$$u + L \frac{di}{dt} = E \quad \text{и} \quad C \frac{du}{dt} + \frac{u}{r} = i, \quad (2.6)$$

получаем

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \gamma_k \zeta(t-t_{k-1}) \begin{bmatrix} u(t_{k-1}) \\ i(t_{k-1}) \end{bmatrix} + \gamma_k \zeta_0(t-t_{k-1}), \quad (2.7)$$

где

(2.8a)

$$\zeta(t-t_{k-1}) = \begin{bmatrix} \sin[\omega_k(t-t_{k-1}) - \Theta_k] & \frac{\sin \omega_k(t-t_{k-1})}{\omega_0 C} \\ -\frac{\sin \omega_k(t-t_{k-1})}{\omega_0 L} & \sin[\omega_k(t-t_{k-1}) - \Theta_k] \end{bmatrix} \frac{e^{-\delta_k(t-t_{k-1})}}{\sin \Theta_k},$$

$$\zeta_0(t-t_{k-1}) = \begin{bmatrix} E - E e^{-\delta_k(t-t_{k-1})} \frac{\sin \omega_k(t-t_{k-1}) + \Theta_k}{\sin \Theta_k} \\ \frac{E}{r} - \frac{E}{r} e^{-\delta_k(t-t_{k-1})} \frac{\sin[\omega_k(t-t_{k-1}) + 2\Theta_k]}{\sin 2\Theta_k} \end{bmatrix}, \quad (2.8б)$$

$$\delta_k = \frac{1}{2r_k C}, \quad \omega_k = \sqrt{\omega_0^2 - \delta_k^2}, \quad \omega_0 = \frac{1}{LC},$$

$$\Theta_k = \arctg \frac{\omega_k}{\delta_k} \quad (2.8b)$$

(при вычислении предполагалось, что $\omega_0 > \delta_k$).

Общее уравнение (2.5) позволяет выразить непрерывные переменные в конце ступени времени через значения их в начале ступени. Подставляя в (2.5) вместо t время t_k , соответствующее концу k -той ступени, и замечая, что $(\gamma_k)_{t=t_k} = 1$, получаем:

$$\rho(t_k) = \zeta(\tau_k) \rho(t_{k-1}) + \zeta_0(\tau_k). \quad (2.9)$$

Отметим, что (2.9) отвечает системе обычных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами. Например, для схемы фиг. 2 согласно (2.7) можем написать:

$$\begin{aligned} u(t_k) &= \zeta_{11}(\tau_k) u(t_{k-1}) + \zeta_{12}(\tau_k) i(t_{k-1}) + \zeta_{10}(\tau_k), \\ i(t_k) &= \zeta_{21}(\tau_k) u(t_{k-1}) + \zeta_{22}(\tau_k) i(t_{k-1}) + \zeta_{20}(\tau_k). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Уравнение (2.9) построено таким образом, что входные переменные ступени выражены через выходные. Так как по такому же принципу составляются уравнения обычных цепных схем, то теория последних в значительной степени может быть использована при изучении процессов в цепи со ступенчато-переменным сопротивлением. В частности, процесс в цепи фиг. 2 может изучаться на основе теории цепной схемы, состоящей из четырехполюсников, так как уравнения (2.10) по форме совпадают с уравнениями активного четырехполюсника [6;7].

Зависимость (2.9) естественно назвать уравнениями k -того звена „временной“ цепной схемы, а $\zeta(\tau_k)$ и $\zeta_0(\tau_k)$ соответственно матричным и векторным параметрами такого звена.

Для каждой конкретной цепи параметры $\zeta(\tau_k)$ и $\zeta_0(\tau_k)$ всех ступеней могут быть вычислены очень просто, если составлено уравнение (2.5). Так, например, для цепи фиг. 2 компоненты этих параметров для любой ступени времени определяются формулами (2.8) путем замены t на t_k .

Следует отметить, что матричные параметры не зависят от формы э. д. с., действующих в цепи, а только от ее первичных параметров (p_k, L, C) и продолжительности ступени времени τ_k .

Матричные и векторные параметры „временной“ цепной схемы, состоящей из нескольких ступеней времени, находятся так же, как и для цепной схемы, звенья которой характеризуются лишь входными и выходными величинами [6]. Так, для „временной“ схемы, состоящей из двух звеньев, матричный параметр равен произведению матричных параметров составляющих звеньев, а векторный параметр — сумме, слагаемыми которой являются векторный параметр второго звена и произведение его матричного параметра на векторный параметр первого звена, то есть

$$\zeta(t_2) = \zeta(\tau_2) \zeta(\tau_1), \quad (2.11)$$

$$\zeta_0(t_2) = \zeta_0(\tau_2) + \zeta(\tau_2) \zeta_0(\tau_1). \quad (2.12)$$

Для „временной“ схемы, состоящей из $k-1$ звеньев, матричный и векторный параметры будут равны:

$$\zeta(t_{k-1}) = \zeta(\tau_{k-1}) \zeta(\tau_{k-2}) \dots \zeta(\tau_1), \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \zeta_0(t_{k-1}) &= \zeta_0(\tau_{k-1}) + \zeta(\tau_{k-1}) \zeta_0(\tau_{k-2}) + \\ &+ \dots + \zeta(\tau_{k-1}) \zeta(\tau_{k-2}) \dots \zeta(\tau_{k-2}) \zeta_0(\tau_1). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Параметры $\zeta(t_{k-1})$ и $\zeta_0(t_{k-1})$ позволяют наиболее простым способом получить значение вектора $\rho(t_{k-1})$, характеризующего начало k -той ступени. Очевидно, этот вектор равен:

$$\rho(t_{k-1}) = \zeta(t_{k-1})\rho(t_0) + \zeta_0(t_{k-1}). \quad (2.15)$$

Это уравнение можно назвать уравнением „временной“ цепной схемы, состоящей из $k-1$ звеньев (ступеней времени).

Таким образом, в отличие от метода припасовывания, величины непрерывных в начале k -той ступени получаются согласно (2.15) непосредственно по матричному и векторному параметрам промежутка времени, равного t_{k-1} и известным значениям переменных в начале первой ступени.

В частном случае, когда непрерывные переменные, то есть токи в индуктивностях напряжения на конденсаторах цепи, в начале первой ступени равны нулю, вектор

$$\rho(t_{k-1}) = \zeta_0(t_{k-1}), \quad (2.16)$$

так как $\rho(t_0) = 0$.

Определив вектор $\rho(t_{k-1})$, можно затем подставить его в общее уравнение (2.5) и тем самым определить все токи и напряжения цепи в промежутке времени от t_{k-1} до t_k .

Отметим, что нахождение параметров цепной схемы может быть сведено исключительно к операции умножения клеточных матриц вида:

$$\xi(\tau_k) = \begin{vmatrix} \zeta(\tau_k) & \zeta_0(\tau_k) \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (2.17)$$

так как непосредственным вычислением легко доказать, что

$$\xi(t_{k-1}) = \prod_{\tau=k-1}^1 \xi(\tau_k) = \begin{vmatrix} \zeta(t_{k-1}) & \zeta_0(t_{k-1}) \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.18)$$

Практически использование таких „удлиненных“ параметров достаточно удобно. Из (2.18) видно, что для нахождения удлиненного параметра „временной“ схемы достаточно перемножить удлиненные параметры ее звеньев.

Способ составления удлиненных параметров звеньев ясен из рассмотрения (2.17). В частности, для цепи фиг. 2 удлиненный параметр k -того звена равен

$$\xi(\tau_k) = \begin{vmatrix} -e^{-\delta_k \tau_k} \frac{\sin(\omega_k \tau_k - \Theta_k)}{\sin \Theta_k} & e^{-\delta_k \tau_k} \frac{\sin \omega_k \tau_k}{\omega_0 C \sin \Theta_k} & \mathcal{D} - \mathcal{D} e^{-\delta_k \tau_k} \frac{\sin(\omega_k \tau_k + \Theta_k)}{\sin \Theta_k} \\ -e^{-\delta_k \tau_k} \frac{\sin \omega_k \tau_k}{\omega_0 L \sin \Theta_k} & e^{-\delta_k \tau_k} \frac{\sin(\omega_k \tau_k + \Theta_k)}{\sin \Theta_k} & \frac{\mathcal{D}}{r_k} - \frac{\mathcal{D}}{r_k} e^{-\delta_k \tau_k} \frac{\sin(\omega_k \tau_k + 2\Theta_k)}{\sin 2\Theta_k} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.19)$$

При написании (2.19) мы воспользовались выражениями (2.8) и (2.18).

Можно рекомендовать следующую технику расчета цепи со ступенчато-переменным сопротивлением по предлагаемому методу:

а) решив интегро-дифференциальные уравнения цепи, составленные относительно непрерывных переменных, и представив решение в форме

(2.9), можно определить матричные $\zeta(\tau_k)$ и $\zeta(\tau_k)$ векторные $\zeta_0(\tau_k)$ параметры для каждого звена „временной“ цепной схемы, полагая $k=1,2,\dots$;

б) по выражениям (2.13), (2.14) или (2.18) следует найти матричный $\zeta(t_{k-1})$ и векторный $\zeta_0(t_{k-1})$ параметры промежутка времени t_{k-1} , соответствующего $k-1$ звеньям;

в) по уравнениям (2.5) определить непрерывные переменные, а затем и все остальные токи и напряжения цепи в заданном промежутке времени от t_{k-1} до t_k .

Изложенный метод расчета без больших изменений может применяться и к цепи с несколькими ступенчато-переменными сопротивлениями. Под ступенью времени в этом случае следует понимать промежуток времени, в течение которого все сопротивления цепи остаются постоянными.

3. Рассмотрим теперь случай, когда ступенчато-переменное сопротивление $r(t)$ изменяется во времени периодически, то есть согласно (0.2).

Период изменения $r(t)$ назовем продолжительностью цикла и допустим, что в каждом цикле законы изменения э.д.с. цепи одинаковы. Пусть далее в соответствии с (0.2) цикл состоит из s ступеней в общем случае неодинаковой длительности. Параметры цикла могут быть определены способом, указанным в п. 2. Поскольку законы изменения сопротивления $r(t)$ и э.д.с. цепи во всех циклах одинаковы, то параметры всех циклов также будут одинаковы.

Имея в виду сказанное, найдем матричный $\zeta(nT)$ и векторный $\zeta_0(nT)$ параметры промежутка времени nT , равного n циклам (T —продолжительность цикла).

На основании выражений (2.13) и (2.14) находим

$$\zeta(nT) = [\zeta(T)]^n, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \zeta_0(nT) &= [1 + \zeta(T) + \zeta^2(T) + \dots + \zeta^n(T)] \zeta_0(T) = \\ &= [1 - \zeta(T)]^{-1} [1 - \zeta^n(T)] \zeta_0(T), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\zeta(T)$ и $\zeta_0(T)$ —соответственно матричный и векторный параметры цикла.

Эти формулы для частного случая, когда в цепи имеется лишь один конденсатор, приведены в [3], где они были получены при помощи разностных уравнений.

Зная параметры $\zeta(nT)$ и $\zeta_0(nT)$, легко определить непрерывные токи и напряжения в начале $(n+1)$ -го цикла:

$$\begin{aligned} p(nT) &= \zeta(nT) p(t_0) + \zeta_0(nT) = \\ &= \zeta^n(T) p(t_0) + [1 - \zeta(T)]^{-1} [1 - \zeta^n(T)] \zeta_0(T), \end{aligned} \quad (3.3)$$

а затем по общему уравнению (2.5)—законы их изменения в течение всего цикла.

Таким образом, для заданного номера n и параметрам только одного цикла без каких-либо промежуточных вычислений по уравнениям (3.3) и (2.5) непосредственно определяются искомые токи и напряжения цепи.

Как видно из выражений (2.8), все компоненты матрицы $\zeta(nT)$ содержат показательные функции в отрицательной степени, благодаря чему:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta^n(T) \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

Это дает возможность решить важную задачу о распределении токов и напряжений в цепи при установившемся режиме. Действительно, полагая в (3.3) $n = \infty$, находим непрерывные переменные в начале цикла установившегося режима:

$$p_0 = [1 - \zeta(T)]^{-1} \zeta_0(T), \quad (3.5)$$

а затем, подставляя ρ_0 в уравнение (2.5) вместо $\rho(t_{k-1})$, можно определить и законы изменения $\rho(t)$ в течение всех ступеней цикла (при этом время t целесообразно отсчитывать от начала цикла).

Заметим, что ρ_0 не зависит от n . Поэтому при установившемся режиме непрерывные токи и напряжения в начале и конце цикла будут принимать одни и те же значения, и, следовательно, процесс в цепи будет в полном смысле периодическим, так как $\rho(t) = \rho(t+T)$.

4. Приведем примеры расчета цепей со ступенчато-переменными сопротивлениями.

Пример 1. Определим ток установившегося режима в цепи, показанной на фиг. 3, для случая, когда э.д.с. источника и сопротивление следующим образом зависят от времени:

$$u(t) = 14,1 \sin(314 t) \text{ в}, \quad r(t) = \begin{cases} r_1 = 1 \text{ ом}, & \text{когда } u(t) < 0, \\ r_2 = 6 \text{ ом} & \text{„ } u(t) > 0. \end{cases}$$

$$\text{Индуктивность } L = \frac{8}{314} \text{ гн.}$$

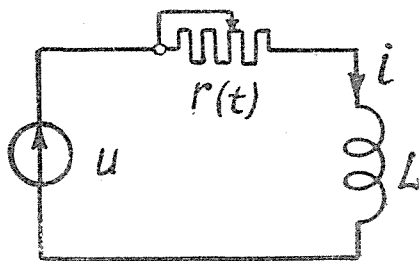
В k -той ступени времени ток цепи, очевидно, равен:

$$i(t) = \gamma_k e^{-\delta_k(t-t_{k-1})} i(t_{k-1}) + \gamma_k I_{m(k)} \{ \sin[\omega(t-t_{k-1}) - \varphi_k] + e^{-\delta_k(t-t_{k-1})} \sin \varphi_k \}, \quad (4.1)$$

$$\text{где } \delta_k = \frac{r_k}{L}, \quad I_{m(k)} = \frac{u_m}{\sqrt{r_k^2 + (\omega L)^2}}, \quad \varphi_k = \arctg \frac{\omega}{r_k} L. \quad (4.2)$$

Подставляя в (4.1) $t = t_k$, получаем уравнение k -того звена „временной“ цепной схемы:

$$i(t_k) = e^{-\delta_k \tau_k} i(t_{k-1}) + I_{m(k)} [\sin(\omega \tau_k - \varphi_k) + e^{-\delta_k \tau_k} \sin \varphi_k]. \quad (4.3)$$



Фиг. 3

Сравнивая эту зависимость с общим уравнением (2.9), заключаем, что в рассматриваемом случае параметры k -того звена равны

$$\zeta(\tau_k) = e^{-\delta_k \tau_k}, \quad (4.4)$$

$$\zeta_0(\tau_k) = I_{m(k)} [\sin(\omega \tau_k - \varphi_k) + e^{-\delta_k \tau_k} \sin \varphi_k].$$

Полагая $k = 1$ и 2 и замечая, что $\tau_1 = \tau_2 = \frac{T}{2} = 0,01 \text{ сек}$ и $\omega \tau_k = \pi$,

после подстановки в (4.4) цифр получаем параметры звеньев цикла:

$$\zeta(\tau_1) = e^{-\delta_1 \tau_1} = e^{-0,392} = 0,677, \quad \zeta(\tau_2) = e^{-\delta_2 \tau_2} = 0,0944, \quad (4.5)$$

$$\zeta_0(\tau_1) = I_{m(1)} \sin \varphi_1 (1 + e^{-\delta_1 \tau_1}) \approx 2,91 \text{ а},$$

$$\zeta_0(\tau_2) = I_{m(2)} \sin \varphi_2 (1 + e^{-\delta_2 \tau_2}) \approx 1,24 \text{ а}.$$

Параметры цикла, согласно (2.11) и (2.12), равны

$$\zeta(T) = \zeta(\tau_2)\zeta(\tau_1) = 0,0639, \quad (4.6)$$

$$\zeta_0(T) = \zeta_0(\tau_2) + \zeta(\tau_2)\zeta_0(\tau_1) = 1,513 \text{ а.}$$

По формуле (3.5) определяем ток в начале цикла при установившемся режиме

$$i_0 = [1 - \zeta(T)]^{-1} \zeta_0(T) = 1,615 \text{ а.} \quad (4.7)$$

Если начало отсчета времени совместить с началом цикла установившегося режима, то законы изменения тока в первой и во второй ступенях выразятся уравнениями:

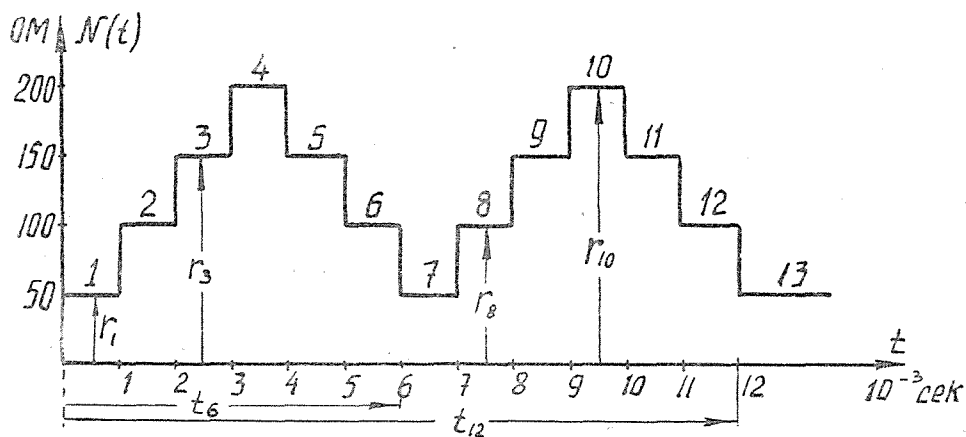
$$\text{а) в первой ступени } (0 \leq t \leq 0,01 \text{ сек}) \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} i(t) &= i_0 e^{-\delta_1 t} + I_{m(1)} [\sin(\omega t - \varphi_1) + e^{-\delta_1 t} \sin \varphi_1] = \\ &= 1,615 e^{-39,2 t} + 1,75 \sin(18000 t - 83^\circ 10') \text{ а;} \end{aligned}$$

$$\text{б) во второй ступени } (0,01 \leq t \leq 0,02 \text{ сек.})$$

$$\begin{aligned} i(t) &= i(\tau_1) e^{-\delta_2(t-\tau_1)} + I_{m(2)} \{ \sin[\omega(t-\tau_1) - \varphi_2] + \\ &+ e^{-\delta_2(t-\tau_2)} \sin \varphi_2 \} = \\ &= 54,5 e^{-236 t} + 1,41 \sin(18000 t - 233^\circ) \text{ а.} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Из (4.8) и (4.9) видно, что ступенчато-переменное сопротивление цепи ведет себя в данном случае как выпрямитель, так как ток $i(t) > 0$ в течение всего цикла.



Фиг. 4

Пример 2. Пусть сопротивление $r(t)$ в цепи фиг. 2 в течение двух циклов изменяется, как показано на фиг. 4, а затем остается постоянным и равным $r_{13} = 50 \text{ ом}$. Предполагая нулевые начальные условия, найдем токи и напряжения в тринадцатой ступени времени ($t \geq 0,012 \text{ сек.}$) для случая, когда

$$\mathcal{E} = 100 \text{ в, } L = 0,1 \text{ гн, } C = 25 \text{ мкф.}$$

По формулам (2.19) и (2.8в) определяем удлиненные параметры ступеней цикла¹⁾:

$$\xi(\tau_1) = \begin{bmatrix} 0,3341 & 25,8738 & 23,9210 \\ -0,0065 & 0,7608 & 0,9463 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0,5209 & 30,9387 & 16,9020 \\ -0,0077 & 0,8310 & 0,9414 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{bmatrix} = \xi(\tau_2),$$

$$\xi(\tau_3) = \begin{bmatrix} 0,6068 & 32,7559 & 14,9310 \\ -0,0082 & 0,8507 & 1,0040 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0,6478 & 34,2467 & 17,6632 \\ -0,0085 & 0,8234 & 0,9316 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{bmatrix} = \xi(\tau_4),$$

$$\xi(\tau_5) = \begin{bmatrix} 0,6068 & 32,7559 & 14,9310 \\ -0,0082 & 0,8507 & 1,0040 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0,5209 & 30,9387 & 16,9020 \\ -0,0077 & 0,8310 & 0,9414 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{bmatrix} = \xi(\tau_6).$$

Перемножая удлиненные параметры ступеней, находим удлиненный параметр цикла

$$\xi(t_6) = \xi(\tau_6) \xi(\tau_5) \dots \xi(\tau_1) = \begin{bmatrix} -0,0514 & -7,5791 & 133,5724 \\ 0,0012 & -0,4156 & 0,7040 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{bmatrix}$$

Параметры циклов одинаковы. Поэтому удлиненный параметр двух циклов будет равен квадрату параметра одного цикла, т. е.

$$\xi(t_{12}) = [\xi(t_6)]^2 = \begin{bmatrix} -0,0065 & 3,5395 & 121,3711 \\ -0,0006 & 0,1636 & 0,5717 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{bmatrix}.$$

Так как по условию начальный запас энергии в схеме отсутствует, то согласно выражению (2.16) напряжение на конденсаторе и ток в индуктивности будут просто равны векторному параметру $\zeta_0(t_{12})$, т. е. $u(t_{12}) = 121,3711$ в и $i(t_{12}) = 0,5717$ а. Подставляя $u(t_{12})$ и $i(t_{12})$ в уравнение (2.7) и используя (2.19), определяем напряжение и ток в заданной тринадцатой ступени времени

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \frac{\gamma_{13} e^{-\delta_{13}(t-t_{12})}}{\sin \Theta_{13}} \begin{bmatrix} \sin [\omega_{13}(t-t_{12}) - \Theta_{13}] & \frac{\sin \omega_{13}(t-t_{12})}{\omega_0 C} \\ \frac{\sin \omega_{13}(t-t_{12})}{\omega_0 L} & \sin [\omega_{13}(t-t_{12}) + \Theta_{13}] \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} u(t_{12}) \\ i(t_{12}) \end{bmatrix} + \gamma_{13} \begin{bmatrix} \partial - \partial e^{-\delta_{13}(t-t_{12})} \frac{\sin [\omega_{13}(t-t_{12}) + \Theta_{13}]}{\sin \Theta_{13}} \\ \frac{\partial}{r_{13}} - \frac{\partial}{r_{13}} e^{-\delta_{13}(t-t_{12})} \frac{\sin [\omega_{13}(t-t_{12}) + 2\Theta_{13}]}{\sin 2\Theta_{13}} \end{bmatrix}$$

¹⁾ Вычисления произведены асп. Н. П. Довгановским.

или после вычислений

$$u(t) = \gamma_{13} 100 + \gamma_{13} 2630 e^{-400t} \sin(28074t + 108^\circ 11') \text{ в,}$$

$$(t \geq t_{12} = 0,012 \text{ сек}),$$

$$i(t) = \gamma_{13} 2 + \gamma_{13} 341,5 e^{-400t} \sin(28074t + 233^\circ 46') \text{ а.}$$

Изложенный метод „временных цепных схем“ может быть применен и для приближенного анализа цепей, параметры которых непрерывно изменяются во времени.

Расчет цепей с непрерывно изменяющимися параметрами изложен в работе „Метод цепочек“, которая публикуется в настоящем томе „Известий ТПИ“.

ЛИТЕРАТУРА

1. Папелекси Н. Д. О процессах в цепи переменного тока, содержащей электрический вентиль. Собрание трудов. Изд. АН СССР, 1948.
2. Гарднер М. Ф., Бэрне Д. Л. Переходные процессы в линейных системах. Гостехиздат, 1949.
3. Громштейн А. О приближении процесса в линейной электрической цепи с переменными параметрами, содержащей один реактивный элемент, к установившемуся режиму. 11, 1950.
4. Ольденбург Р., Сарториус Г. Динамика автоматического регулирования. Госэнергоиздат, 1949.
5. Цыпкин Я. З. Переходные и установившиеся процессы в импульсных цепях. Госэнергоиздат, 1951.
6. Пухов Г. Е. Теория метода подсхем. Электричество № 8, 1952.
7. Зелях Э. В. Общая теория линейных электрических схем. Изд. АН СССР, 1951.
8. Фрезер Р., Дункан В., Коллер А. Теория матриц. Изд. ин. лит., 1950.