

МЕТОД ЦЕПОЧЕК

Г. Е. ПУХОВ

Хотя цепи с переменными параметрами $r(t)$, $L(t)$, $C(t)$ встречаются не менее часто, чем цепи, параметры которых не зависят от времени, методы их расчета разработаны достаточно полно лишь для немногих частных случаев, имеющих, правда, очень большое практическое значение. Мы имеем в виду цепи с вращающимися трехфазными машинами [1], микрофонные цепи [2—4] и ряд других.

Состояние цепи, параметры которой зависят лишь от времени, описывается системой линейных интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Поэтому расчет ее в сущности сводится к нахождению решения системы уравнений с переменными коэффициентами. В трехфазных цепях путем замены переменных часто возможно исходные уравнения преобразовать в уравнения с постоянными коэффициентами [1]. Когда же соответствующую подстановку найти затруднительно, приходится прибегать к непосредственному решению исходных уравнений, что весьма усложняет задачу. Даже в такой сравнительно простой цепи, какой является трансформатор с переменной взаимной индуктивностью, расчет оказывается слишком громоздким [5] и притом не наглядным, так как искомые токи и напряжения выражаются в виде бесконечных рядов Фурье.

Рассматриваемый ниже приближенный метод расчета основан на замеченной ранее в [9] возможности применения хорошо разработанной теории цепных электрических схем [6—9] к решению уравнений с переменными коэффициентами. Установленная математическая аналогия позволяет расчет цепи с переменными параметрами в любом режиме свести к расчету некоторой „временной цепной схемы“. Метод поэтому называется далее „методом цепочек“. С математической точки зрения он является небольшим обобщением известной в теории дифференциальных уравнений так называемой формулы продолжения и метода осреднения коэффициентов [10].

1. Коэффициенты системы уравнений цепи с переменными параметрами в достаточно малом промежутке времени $\tau_s = t_s - t_{s-1}$ приблизительно могут считаться постоянными. Поэтому решение такой системы, в силу предполагаемой линейности цепи, возможно представить в форме:

$$\begin{aligned} \rho_1(t_s) &= \zeta_{11}(\tau_s) \rho_1(t_{s-1}) + \zeta_{12}(\tau_s) \rho_2(t_{s-1}) + \dots + \zeta_{1n}(\tau_s) \rho_n(t_{s-1}) + \zeta_{10}(\tau_s), \\ \rho_2(t_s) &= \zeta_{21}(\tau_s) \rho_1(t_{s-1}) + \zeta_{22}(\tau_s) \rho_2(t_{s-1}) + \dots + \zeta_{2n}(\tau_s) \rho_n(t_{s-1}) + \zeta_{20}(\tau_s), \\ \rho_n(t_s) &= \zeta_{n1}(\tau_s) \rho_1(t_{s-1}) + \zeta_{n2}(\tau_s) \rho_2(t_{s-1}) + \dots + \zeta_{nn}(\tau_s) \rho_n(t_{s-1}) + \zeta_{n0}(\tau_s), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\rho_i(t_{s-1})$ и $\rho_i(t_s)$ i -тый ток или напряжение цепи соответственно в начале и конце s -того интервала времени, продолжительность которого равна $\tau_s = t_s - t_{s-1}$, $\zeta_{ik}(\tau_s)$ — некоторые коэффициенты, зависящие от длительности интервала τ_s и от времени (точнее от номера интервала), которые получаются путем решения заданной системы интегро-дифференциальных уравнений в предположении, что коэффициенты уравнений постоянны и что при $t = t_{s-1}$ (начало интервала) токи и напряжения цепи равны $\rho_1(t_{s-1}), \rho_2(t_{s-1}), \dots, \rho_n(t_{s-1})$. Число уравнений (1.1) равно порядку цепи n ¹⁾.

Уравнения (1.1) удобно записать короче, применив матричную символику, в виде:

$$\rho(t_s) = \zeta(\tau_s) \rho(t_{s-1}) + \zeta_0(\tau_s), \quad (1.2)$$

где

$$\rho(t_s) = \begin{bmatrix} \rho_1(t_s) \\ \rho_2(t_s) \\ \vdots \\ \rho_n(t_s) \end{bmatrix}, \quad \rho(t_{s-1}) = \begin{bmatrix} \rho_1(t_{s-1}) \\ \rho_2(t_{s-1}) \\ \vdots \\ \rho_n(t_{s-1}) \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

$$\zeta(\tau_s) = \begin{bmatrix} \zeta_{11}(\tau_s) & \zeta_{12}(\tau_s) & \dots & \zeta_{1n}(\tau_s) \\ \zeta_{21}(\tau_s) & \zeta_{22}(\tau_s) & \dots & \zeta_{2n}(\tau_s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{n1}(\tau_s) & \zeta_{n2}(\tau_s) & \dots & \zeta_{nn}(\tau_s) \end{bmatrix}, \quad \zeta_0(\tau_s) = \begin{bmatrix} \zeta_{10}(\tau_s) \\ \zeta_{20}(\tau_s) \\ \vdots \\ \zeta_{n0}(\tau_s) \end{bmatrix}$$

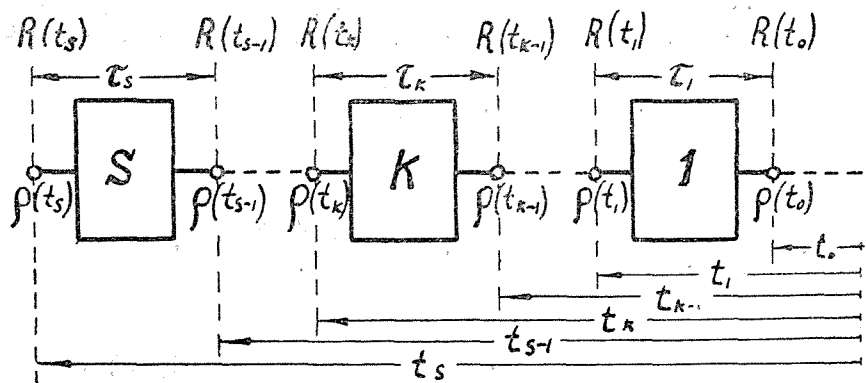
Остановимся на некоторых свойствах матрицы $\zeta(\tau_s)$ и вектора (матрицы-столбца) $\zeta_0(\tau_s)$. Условимся называть $\zeta(\tau_s)$ — матричным, а $\zeta_0(\tau_s)$ — векторным параметрами процесса в цепи, относящегося к интервалу τ_s . Нетрудно заметить, что компоненты $\zeta_{io}(\tau_s)$ векторного параметра представляют собой токи и напряжения цепи в конце малого интервала τ_s , определенные в предположении нулевых начальных условий для этого интервала, когда $i(t_{s-1}) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Поэтому $\zeta_{io}(\tau_s)$ будет зависеть как от параметров цепи в интервале τ_s , так и от э.д.с. источников. Что же касается компонент ζ_{ik} матричного параметра $\zeta(\tau_s)$, то величины их не будут зависеть от формы э.д.с. действующих в цепи, так как член $\zeta(\tau_s) \rho(t_{s-1})$ в уравнении (1.2) определяет те составляющие токов и напряжений, которые обусловлены только запасом энергии в цепи в начале интервала.

Уравнение (1.2) и эквивалентная ему система уравнений (1.1) при выполнении определенных условий может трактоваться как уравнение звена некоторой цепной схемы. Действительно, если в качестве переменных ρ выбрать непрерывные токи и напряжения цепи, которыми являются токи в индуктивностях и напряжения на конденсаторах, то $\rho(t_{s-0}) = \rho(t_{s+0})$, то есть токи и напряжения в конце данного интервала времени будут равны токам и напряжениям в начале следующего интервала. В обычной цепной схеме аналогичное условие выполняется в отношении пространственных координат: токи и напряжения в конце звена равны токам и напряжениям в начале следующего звена.

Таким образом, если в качестве ρ выбрать непрерывные токи и напряжения, то уравнение (1.1) и (1.2) можно трактовать как уравнение звена „временной цепной схемы“, входными величинами которого являются не-

¹⁾ Порядком цепи n мы называем порядок дифференциального уравнения, служащего для описания состояния цепи. Если в каждой из b ветвей имеются и индуктивности и емкости, порядок цепи равен $n = 2b$. Например, контур, состоящий из r , L и C , представляет цепь второго порядка.

Отмеченная аналогия позволяет почти без изменения применить известные методы расчета обычных цепных схем для определения токов и напряжений в цепях с переменными параметрами. Получим соответствующие расчетные уравнения.



В целях получения более удобных расчетных формул уравнения (1.1) целесообразно заменить на уравнения:

$$\begin{aligned} \rho_1(t_s) &= \zeta_{11}(t_s)\rho_1(t_{s-1}) + \zeta_{12}(t_s)\rho_2(t_{s-1}) + \dots + \zeta_{1n}(t_s)\rho_n(t_{s-1}) + \zeta_{10}(t_s)1, \\ \rho_2(t_s) &= \zeta_{21}(t_s)\rho_1(t_{s-1}) + \zeta_{22}(t_s)\rho_2(t_{s-1}) + \dots + \zeta_{2n}(t_s)\rho_n(t_{s-1}) + \zeta_{20}(t_s)1, \\ &\vdots \\ \rho_n(t_s) &= \zeta_{n1}(t_s)\rho_1(t_{s-1}) + \zeta_{n2}(t_s)\rho_2(t_{s-1}) + \dots + \zeta_{nn}(t_s)\rho_n(t_{s-1}) + \zeta_{no}(t_s)1, \\ 1 &= o\rho_1(t_{s-1}) + o\rho_2(t_{s-1}) + \dots + o\rho_n(t_{s-1}) + 1.1, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\left| \frac{\rho(t_s)}{1} \right| = \zeta(\tau_s) \left| \frac{\rho(t_{s-1})}{1} \right| = \left| \frac{\zeta(\tau_s)}{0} \right| \left| \frac{\zeta_0(\tau)}{1} \right| \times \left| \frac{\rho(t_{s-1})}{1} \right| \quad (1.5)$$
$$R(t_s) = \mathfrak{F}(\tau_s) R(t_{s-1}), \quad (1.6)$$
$$R(t_s) = \begin{bmatrix} \rho_1(t_s) \\ \rho_2(t_s) \\ \vdots \\ \rho_n(t_s) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad R(t_{s-1}) = \begin{bmatrix} \rho_1(t_{s-1}) \\ \rho_2(t_{s-1}) \\ \vdots \\ \rho_n(t_{s-1}) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1.7)$$

$$\xi(\tau_s) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \zeta_{11}(\tau_s) & \zeta_{12}(\tau_s) & \cdot & \zeta_{1n}(\tau_s) & \zeta_{10}(\tau_s) \\ \hline \zeta_{21}(\tau_s) & \zeta_{22}(\tau_s) & \cdot & \zeta_{2n}(\tau_s) & \zeta_{20}(\tau_s) \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \zeta_{n1}(\tau_s) & \zeta_{n2}(\tau_s) & \cdot & \zeta_{nn}(\tau_s) & \zeta_{no}(\tau_s) \\ \hline 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad (1.8)$$

Вектор $R(t)$ естественно назвать удлинненным вектором непрерывных переменных, а матрицу $\xi(\tau_s)$ —удлинненным параметром звена временной цепочки. При $t=t_s$ вектор $R(t)=R(t_s)$, при $t=t_{s-1}$ $R(t)=R(t_{s-1})$ и т.д.

Уравнение (1.6) представляет удлинненное уравнение звена временной цепочки. Заменяя в этом уравнении s на $s-1$, $s-2$ и т.д., легко получить зависимости

$$\begin{aligned} R(t_s) &= \xi(\tau_s) R(t_{s-1}), \\ R(t_{s-1}) &= \xi(\tau_{s-1}) R(t_{s-2}), \\ \vdots \\ R(t_1) &= \xi(\tau_1) R(t_0), \end{aligned} \quad (1.9)$$

из которых следует, что

$$R(t_s) = \xi(\tau_s) \xi(\tau_{s-1}) \dots \xi(\tau_1) R(t_0) = \xi(t_s) R(t_0). \quad (1.10)$$

Это основное расчетное уравнение связывает значения непрерывных токов и напряжений в начале процесса ($t=t_0$) со значениями, которые они принимают в s -тый момент времени ($t=t_s$). Полагая в (1.10) $s=1, 2, 3, \dots$ и т.д., можно определить токи и напряжения в цепи для любого момента времени. Удлиненные параметры $\xi(\tau_s)$ целесообразно перемножать в следующем порядке:

$$\begin{aligned} \xi(\tau_2) \xi(t_1) &= \xi(t_2), \quad \xi(\tau_3) \xi(t_2) = \xi(t_3), \\ \dots, \xi(\tau_s) \xi(t_{s-1}) &= \xi(t_s), \end{aligned} \quad (1.11)$$

так как в этом случае по уравнениям

$$\begin{aligned} R(t_1) &= \xi(\tau_1) R(t_0), \\ R(t_2) &= \xi(t_2) R(t_0), \\ \dots \\ R(t_{s-1}) &= \xi(t_{s-1}) R(t_0) \end{aligned} \quad (1.12)$$

определяются токи и напряжения не только в момент времени $t=t_s$, но и в промежуточные моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_{s-1}$.

Величина

$$\xi(t_s) = \xi(\tau_s) \xi(\tau_{s-1}) \dots \xi(\tau_1) = \prod_{v=s}^1 \xi(\tau_v) \quad (1.13)$$

представляет удлинненный параметр процесса в промежутке от t_0 до t_s . Очевидно, что продолжительность такого промежутка равна сумме интервалов времени τ_v , т.е.

$$\sum_{v=1}^s \tau_v = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_s = t_s - t_0. \quad (1.14)$$

Из (1.13) видно, что как и для обычных цепных схем [8], удлинненный параметр временной цепочки, состоящей из s звеньев, равен произведению удлиненных параметров составляющих звеньев.

Пользуясь (1.13), нетрудно проверить, что матричные $\zeta(t_s)$ и векторные $\zeta_0(t_s)$ параметры для промежутка времени $t_s - t_0$ будут следующим образом выражаться через параметры составляющих звеньев:

$$\zeta(t_s) = \zeta(\tau_s) \zeta(\tau_{s-1}) \dots \zeta(\tau_1) = \prod_{v=s}^1 \zeta(\tau_v), \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \zeta_0(t_s) &= \zeta(\tau_s) \zeta_0(\tau_{s-1}) + \dots \\ &\dots + \zeta(\tau_s) \zeta(\tau_{s-1}) \dots \zeta(\tau_2) \zeta_0(\tau_1). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Выражениями (1.15) и (1.16) мы воспользуемся ниже при расчете цепи с периодически изменяющимися параметрами.

На основании изложенного представляется возможным сформулировать следующий порядок расчета цепей с переменными параметрами рассмотренным методом цепочек:

а) составляются интегро-дифференциальные уравнения цепи относительно непрерывных переменных (токов в катушках, напряжений на конденсаторах, зарядов, потокосцеплений). Время t в коэффициентах уравнений заменяется на t_s ;

б) полученная система уравнений решается в предположении, что коэффициенты не зависят от времени и что начальные условия при $t = t_{s-1}$ не являются нулевыми. Заменяя в таком решении t на t_s и полагая $t_s - t_{s-1} = \tau_s$, получаем уравнения (1.1) для s -го звена временной цепочки, которые затем целесообразно заменить на уравнения вида (1.4);

в) определяются удлиненные параметры всех звеньев временной цепочки, для чего в удлиненном параметре $\xi(\tau_s)$, составленном на основании уравнений (1.4), следует положить $s = 1, 2$ и т.д.;

г) при помощи основного расчетного уравнения (1.10) производится определение искомых токов и напряжений цепи в заданные моменты времени.

Выбор интервалов времени τ_s до некоторой степени произволен. При уменьшении τ_s точность расчета будет повышаться. Точность расчета можно несколько улучшить также, если принимать параметры $\xi(\tau_s)$ равными их средним значениям в интервале от t_{s-1} до t_s , как это, например, рекомендуется в методе осреднения коэффициентов [9].

2. Переменные параметры цепи очень часто являются периодическими функциями времени. Рассмотрим этот важный для практики случай, предположив, что период изменения э.д.с. источников или равен, или кратен периоду изменения параметров цепи.

Если изучается переходный режим, то изложенный выше в п. 1 метод расчета, очевидно, без всяких изменений оказывается применимым и для данного случая. Поэтому рассмотрим здесь только расчет установившегося режима.

При сделанных предположениях процесс в цепи может быть представлен из ряда циклов одинаковой продолжительности T . Разбив время T на несколько, допустим l , подинтервалов, можем определить удлиненный параметр цикла

$$\xi(T) = \prod_{v=1}^l \xi(\tau_v) = \begin{vmatrix} \zeta(T) & \zeta_0(T) \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (2.1)$$

где $\zeta(T)$ и $\zeta_0(T)$ — матричный и векторный параметры цикла.

Параметры процесса во всех циклах, очевидно, будут одинаковы. Поэтому для m циклов

$$\xi(mT) = [\xi(T)]^m. \quad (2.2)$$

Таким образом, значения токов и напряжений в начале $(m+1)$ -го цикла будут определяться уравнением

$$R(mT) = [\xi(T)]^m R(t_0). \quad (2.3)$$

Чтобы перейти к установившемуся режиму, необходимо (2.3) положить $m = \infty$. Перехода к пределу, однако, можно избежать, если заметить, что при периодическом режиме непрерывные переменные должны принимать одни и те же значения R_0 в начале любого цикла, вследствие чего оказывается справедливым матричное равенство

$$R_0 = \xi(T) R_0. \quad (2.4)$$

Из (2.1) и (2.4) следует, что

$$R_0 = \frac{[I - \zeta(T)]^{-1} \zeta_0(T)}{1}, \quad (2.5)$$

где I — единичная матрица.

Можно рекомендовать следующую технику расчета установившегося режима в цепи с периодически изменяющимися параметрами:

а) цикл разделяется на l подинтервалов и затем определяются удлиненные параметры подинтервалов способом, рассмотренным в п. 1;

б) вычисляется удлиненный параметр цикла, как произведение параметров подинтервалов;

в) по формуле (2.5) находятся значения непрерывных переменных в начале цикла установившегося режима;

г) определяются токи и напряжения цепи внутри цикла, для чего следует воспользоваться выражением

$$R(t_s) = \xi(t_s) R_0; \quad (s = 1, 2, \dots, l). \quad (2.6)$$

3. Рассмотренный выше метод расчета цепей с переменными параметрами приводит к простым вычислениям в случае цепей первого и второго порядка, но оказывается практически сложным уже для цепи третьего порядка, так как при этом появляется необходимость в нахождении корней кубического характеристического уравнения. Такая трудность, впрочем, имеет место и при исследовании переходных режимов и в цепях с постоянными параметрами.

В тех случаях, когда порядок цепи больше двух, представляется целесообразным выяснить возможность нахождения удлиненных параметров звеньев временной цепочки, не прибегая к решению дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которые все равно только приближенно описывают процесс в заданном интервале времени. Такая возможность имеется и может быть реализована путем привлечения к изучению процесса известного метода последовательных интервалов. Покажем это.

Интегро-дифференциальные уравнения цепи, как известно, всегда могут быть приведены к системе уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= a_{11} p_1 + a_{12} p_2 + \dots + a_{1n} p_n + a_{10}, \\ \frac{dp_2}{dt} &= a_{21} p_1 + a_{22} p_2 + \dots + a_{2n} p_n + a_{20}, \\ \frac{dp_n}{dt} &= a_{n1} p_1 + a_{n2} p_2 + \dots + a_{nn} p_n + a_{n0}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $p_i = p_i(t)$ — непрерывные переменные, а $a_{ik} = a_{ik}(t)$ — заданные функции времени.

Применяя матричную символику, записываем уравнения (3.1) в более компактной форме:

$$\frac{dp(t)}{dt} = a(t)p(t) + a_0(t). \quad (3.2)$$

Согласно методу последовательных интервалов это уравнение можно заменить приближенным

$$p(t_s) = p(t_{s-1}) + [a(t_{s-1})p(t_{s-1}) + a_0(t_{s-1})] \tau_s. \quad (3.3)$$

Здесь $\rho(t_{s-1})$ и $\rho(t_s)$ употреблены в том же смысле, как и во всех предыдущих зависимостях, а $a(t_{s-1}) = a(t)_{t=t_{s-1}}$ и $a(t_s) = a(t)_{t=t_s}$.

Выражение (3.3) отвечает системе алгебраических уравнений и может быть переписано так:

$$\rho(t_s) = [I + \tau_s a(t_{s-1})] \rho(t_{s-1}) + \tau_s a_0(t_{s-1}). \quad (3.4)$$

Это уравнение по своему виду не отличается от уравнения (1.2). Коэффициенты (1.2) и (3.4) при достаточно малом интервале τ_s будут приблизительно одинаковыми, т.е.

$$\zeta(\tau_s) \approx I + \tau_s a(t_{s-1}) \text{ и } \zeta_0(\tau_s) \approx \tau_s a_0(t_{s-1}). \quad (3.5)$$

Из изложенного видно, что удлиненные параметры временной цепочки можно находить, непосредственно используя коэффициенты дифференциальных уравнений (3.1) или (3.2), путем подстановки зависимостей (3.5) в ранее полученное выражение

$$\xi(\tau_s) = \begin{vmatrix} \zeta(\tau_s) & \zeta_0(\tau_s) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.6)$$

См. еще (1.5).

После того, как найдены удлиненные параметры звеньев временной цепочки, расчет процесса производится, как было указано в п. 1 или, в случае периодического изменения параметров, как в п. 2.

Заметим, что, если желательно несколько увеличить точность расчетов при заданном τ_s , то следует вместо (3.3) воспользоваться более точной зависимостью

$$\rho(t_s) = \rho(t_{s-1}) + \frac{\tau_s}{2} [a(t_{s-1})\rho(t_{s-1}) + a_0(t_{s-1}) + a(t_s)\rho(t_s) + a_0(t_s)]. \quad (3.7)$$

В этом случае параметры $\zeta(\tau_s)$ и $\zeta_0(\tau_s)$ определяются формулами

$$\zeta(\tau_s) = \left[I - \frac{\tau_s a(t_s)}{2} \right]^{-1} \left[I + \frac{\tau_s a(t_{s-1})}{2} \right], \quad (3.8)$$

$$\zeta_0(\tau_s) = \left[I - \frac{\tau_s a(t_s)}{2} \right]^{-1} \frac{\tau_s}{2} [a_0(t_{s-1}) + a_0(t_s)],$$

несколько более сложными, чем (3.5).

4. В заключение отметим, что рассмотренный метод цепочек отличается от других приближенных методов математического исследования цепей с переменными параметрами тем, что он позволяет производить не только численные расчеты, но также получать и некоторые общие формулы для искомых величин. Иллюстрацией этого являются, в частности, формулы (2.5) и (2.6), относящиеся к установившемуся периодическому режиму.

Если индуктивности и емкости цепи постоянны, а сопротивления являются ступенчатыми функциями времени, то зависимости, приведенные в п. п. 1 и 2, дают точное решение задачи. Применительно к такому случаю они ранее рассматривались в [9]. Законы изменения во времени непрерывных переменных в $(s+1)$ интервале определяются при этом уравнением

$$R(t) = \xi(t - t_s) \xi(t_s) R(t_0), \quad (4.1)$$

так как при $t = t_{s+1}$ вектор $R(t)$, на основании (1.10), должен принять значение $R(t_{s+1}) = \xi(t_{s+1}) R(t_0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горев А. А. Переходные процессы синхронной машины. Госэнергоиздат, 1950.
 2. Азбукин П. А. Микрофон, как генератор. Электричество, № 2, 1924.
 3. Цыпкин Я. З. Нерезонансные электрические цепи с переменным параметром. Электричество, № 8, 1946.
 4. Яковлев А. И. Задача о токе микрофона. Труды МЭИ им. В. М. Молотова, в. 3, Госэнергоиздат, 1948.
 5. Эфрос А. М. Теория магнито-связанных контуров с переменным коэффициентом взаимной индукции. Прикладная математика и механика, нов. сер, т. 1. в. 2, 1937.
 6. Зелях Э. В. Общая теория линейных электрических схем. Изд. АН СССР, 1951.
 7. Воронов Р. А. Общая теория четырехполюсников и многополюсников. Госэнергоиздат, 1951.
 8. Пухов Г. Е. Теория метода подсхем. Электричество, № 8, 1952.
 9. Пухов Г. Е. Расчет электрической цепи со ступенчато-переменным сопротивлением. (Публикуется в настоящем томе „Известий ТПИ“).
 10. Фрезер Р., Дункан В., Коллар. А. Теория матриц и ее приложения. Издательство ин. лит. 1950.
-