ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
Том 76 ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА 1954 г.

К РАСЧЕТУ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ В ЦЕПИ С СИНУСОИДАЛЬНЫМИ Э.Д.С.

Б. А. БОРКОВСКИЙ, Г. Е. ПУХОВ

1. Рассмотрим возможности упрощения решения задачи о нахождении токов и напряжений в линейной цепи при переходном режиме для случая, когда э.д.с. источников являются синусоидальными функциями времени.

Контурные уравнения цепи имеют вид:

$$L\frac{di}{dt}+ri+k\int_{-\infty}^{t}idt=e, \tag{1}$$

где L, r и k — матрицы вида:

$$L=\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdot & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \cdot & L_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdot & L_{nn} \end{vmatrix}, \quad r=\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdot & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdot & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdot & r_{nn} \end{vmatrix},$$

$$k=\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdot & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdot & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdot & k_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

(n — число независимых контуров), а ток i и э.д.с. e — векторы

$$i = \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \cdot \\ i_n \end{vmatrix}, \quad e = \begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ e_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Э_1 \sin(\omega t + \alpha_1) \\ Э_2 \sin(\omega t + \alpha_2) \\ \cdot \\ Э_n \sin(\omega t + \alpha_n) \end{vmatrix} \qquad (3$$

Решение уравнения (1), записанное в операторной форме, будет

$$I(p) = \left(pL + r + \frac{1}{p} k \right)^{-1} \left[Э(p) + pLi(0) - u(0) \right] \qquad (4)$$

Здесь
$Э(p)$ — операторное изображение вектора e,
$I(p)$ — то же для тока i,
$i(0)$ — начальное значение тока i,
$u(0)$ — начальное значение напряжения

$$u = k \int_{-\infty}^{0} idt. \qquad (5)$$

Из уравнения (4) видно, что операторный ток цепи состоит из трех частей, соответственно равных

$$I_1(p) = Y(p)\, Э(p), \qquad (6)$$

$$I_2(p) = Y(p)\, p\, Li(0), \qquad (7)$$

$$I_3(p) = -\, Y(p)\, u(0), \qquad (8)$$

где

$$Y(p) = \left(pL + r + \frac{1}{p} k \right) \qquad (9)$$

— операторная проводимость цепи.

Токи $i_2 \doteqdot I_2(p)$ и $i_3 \doteqdot I_3(p)$, обусловленные запасом энергии в индуктивных и емкостных элементах цепи в начальный момент времени, не зависят от формы приложенных э.д.с. и должны определяться обычным путем.

Что касается тока $i_1 \doteqdot I_1(p)$, то его вычисление, как это показано ниже, может быть несколько упрощено за счет замены операторной функции $Э(p)$ некоторым постоянным комплексным числом.

2. Ток i_1 и э.д.с. e возможно представить в виде полусумм комплексно-сопряженных векторов

$$i' = \dot{I}(t) e^{j\omega t} = \begin{vmatrix} \dot{I}_1(t) \\ \dot{I}_2(t) \\ \cdot \\ \dot{I}_n(t) \end{vmatrix} e^{j\omega t}, \quad i'' = \hat{I}(t)\, e^{-j\omega t}, \qquad (10)$$

$$e' = \dot{Э}\, e^{j\omega t} = \begin{vmatrix} \dot{Э}_1 \\ \hline \dot{Э}_2 \\ \hline \cdot \\ \hline \dot{Э}_n \end{vmatrix} e^{j\omega t}, \quad e'' = \hat{Э} e^{-j\omega t}. \tag{11}$$

Действительно,

$$i_1 = \frac{1}{2}\,(i' + i'') \tag{12}$$

и

$$e = \frac{1}{2}\,(e' + e'') \tag{13}$$

Комплексная амплитуда тока $\dot{I}(t)$, вследствие несинусоидальности i_1, будет функцией времени, а комплексная амплитуда э.д.с. постоянным вектором, равным:

$$\dot{Э} = -j \begin{vmatrix} Э_1 e^{j\alpha_1} \\ \hline Э_2 e^{j\alpha_2} \\ \hline \cdot \\ \hline Э_n e^{j\alpha n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{Э}_1 \\ \hline \dot{Э}_2 \\ \hline \cdot \\ \hline \dot{Э}_n \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Известно, что если произвести какие-либо линейные операции над комплексным числом $\bar{z}$, а затем точно такие же операции над сопряженным числом $\hat{z}$, то результаты будут взаимно сопряженными числами.

Поэтому уравнение (1) будет справедливо и для тока i' при замене e на e', т.е.

$$L\,\frac{di'}{dt} + ri' + k \int i' dt = e'. \tag{15}$$

Если отсюда определить ток i', то действительный ток найдется из уравнения

$$i_1 = \frac{1}{2}\,(i' + \hat{i}'), \tag{16}$$

так как $i'' = \hat{i}'$ (i' и i'' — комплексные числа).

Решение уравнения (15) будем искать в форме

$$i' = \dot{I}(t)\, e^{j\omega t}. \tag{17}$$

Подставляя в (15), получаем

$$L\,\frac{d}{dt}\left[\dot{I}(t)\, e^{j\omega t}\right] + r\left[\dot{I}\,(t) e^{j\omega t}\right] + k \int \left[\ \dot{I}(t)\, e^{j\omega t}\right] dt = \dot{Э}\, e^{j\omega t}.$$

На основании теоремы смещения операционное изображение последнего уравнения можно записать в виде:

$$\left(Lp + r + \frac{1}{p}\,к\right) \dot{I}\,(p - j\omega) = \dot{Э}\,. \tag{18}$$

При получении этого выражения начальные условия были приняты нулевыми, так как, в соответствии со сказанным выше, токи цепи, получающиеся за счет начального запаса энергии, мы условились определять обычным способом.

Комплексную амплитуду операторного тока найдем, заменив в уравнении p на $p+j\omega$. Имеем

$$\dot{I}(p) = Y(p+j\omega)\dot{Э}, \tag{19}$$

где величину

$$Y(p+j\omega) = \left[L(p+j\omega) + r + \frac{1}{p+j\omega} k \right]^{-1} \tag{20}$$

естественно назвать смещенной операторной проводимостью, так как она получается из обычной проводимости, $Y(p)$ заменой p на $p+j\omega$.

Таким образом, задача о расчете неустановившихся режимов в цепи с синусоидальными э.д.с. формально свелась к задаче о цепи с постоянными э.д.с., в роли которых выступают комплексные амплитуды синусоид. При $\omega=0$ формула (19) вообще начинает совпадать с формулой для постоянных э.д.с.

Нахождение тока i_1 практически сводится к выполнению следующих операций:

а) определяется изображение комплексной амплитуды тока $\dot{I}(p)$, для чего вектор комплексных амплитуд синусоидальных э.д.с. $\dot{Э}$ умножается на смещенную операторную проводимость $Y(p+j\omega)$;

б) при помощи теоремы разложения или формул, основанных на теории вычетов, производится переход от операторной функции $\dot{I}(p)$ к оригиналу, которым будет комплексная амплитуда тока $\dot{I}(t)$;

в) по формуле $i_1 = \frac{1}{2}\left[\dot{I}(t)\,e^{j\omega t} + \hat{\dot{I}}(t)\,e^{-j\omega t}\right] = Im\left[\dot{I}(t)\,e^{j\omega t}\right]$ находится ток i_1.

После определения тока i_1 значение действительного тока цепи в любой момент времени определяется как сумма токов i_1, i_2 и i_3.

Заметим, что выражение (19) является обобщением формулы, полученной ранее для простой цепи с одной синусоидальной э.д.с. [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Пухов Г. Е. Об одном обобщении символического метода. Научные записки ЛПИ., вып. II, 1948.