

## ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ „ГЕНЕРАТОР С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМ—ДВИГАТЕЛЬ С НЕЗАВИСИМЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ“

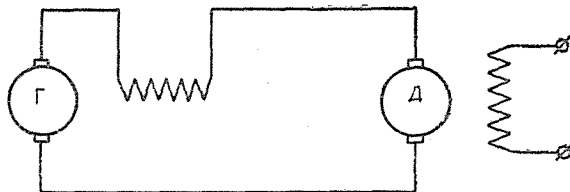
Л. И. ГАНДЖА

### Введение

Вопросы изучения колебаний в электромеханических системах стали особо актуальными с тех пор, как только принципы электромашиной автоматики и теории автоматического регулирования получили широкое применение в теории и практике электрического привода [1].

Среди разнообразных электромеханических систем, склонных к колебаниям, особое место занимают системы, в которых колебания обуславливаются нелинейностью характеристик намагничивания электрических машин и наличием у них последовательных обмоток возбуждения, создающих, при известных условиях, „отрицательное“ сопротивление в системе.

Сюда могут быть отнесены системы „генератор-двигатель“, в которых двигатель имеет независимое возбуждение, а генератор—либо последовательное, либо смешанное, либо параллельное при наличии компенсационной обмотки или обмотки дополнительных полюсов. При отключении в одной из последних двух систем независимой обмотки возбуждения генератора последний превращается в генератор последовательного возбуждения, а система в целом сводится к первой, склонной к колебаниям [1;11]. Сюда же может быть отнесена и система „генератор-двигатель“, в которой в качестве генератора применяется электромашинный усилитель с



Фиг. 1

поперечным полем. При отключении обмотки управления (независимое возбуждение) электромашинный усилитель может возбудиться от действия компенсационной обмотки и станет, таким образом, генератором с последовательным возбуждением [2]; наличие в нем двойного каскада усиления сути дела не меняет. Очевидно, что система „генератор с последовательным—двигатель с независимым возбуждением“ (фиг. 1) является, в указанном выше смысле, общей для всех перечисленных систем; поэтому изучение колебаний, возникающих в ней, позволит осветить природу колебаний, возникающих и в ряде других систем. Эти колебания представляют значительный интерес и с той точки зрения, что они могут быть

использованы для осуществления автоматического реверса в системе электропривода механизмов с возвратно-поступательным движением [3; 4], а также и с точки зрения общей теории электрических машин.

## История вопроса

Колебания, возникающие в рассматриваемой нами системе, описаны далеко неполно в [5; 6; 7; 8; 9; 10]. В [5; 6; 7] приведено только краткое описание явления без глубокого математического анализа. В [8] сделана попытка математического исследования системы, причем последняя трактуется как линейная, а возникающие в ней незатухающие колебания — как гармонические. Наиболее подробный математический анализ системы дан в трудах М. В. Шулейкина [9; 10]. Однако и этот анализ является недостаточным, поскольку задача трактуется попрежнему, как линейная.

Элементарное объяснение физической сущности рассматриваемых колебаний, приведенное в цитированной выше литературе, в основном сводится к следующим положениям. На фиг. 2 изображена характеристика намагничивания генератора с последовательным возбуждением  $e_2 = \varphi(I)$  и прямая  $\Delta U = I.R = \psi(I)$ , представляющая собой падение напряжения в силовой цепи (фиг. 1), обладающей сопротивлением  $R$ .

Если характеристика намагничивания в начале координат проходит круче, чем прямая  $\Delta U = I.R$ , то, как известно, точка  $A$  пересечения кривой  $e_2 = \varphi(I)$  и прямой  $\Delta U = I.R$  определит собой ту э.д.с. генератора  $e_{2A}$ , до которой возбудится генератор при включении его на нагрузку. С начала разгона двигателя его скорость будет возрастать; будет возрастать и его противо-э.д.с.  $e_d$ , поскольку последняя при постоянном и номинальном магнитном потоке двигателя определяется выражением:

$$e_d = c_e \cdot n,$$

где  $n$  — скорость двигателя,

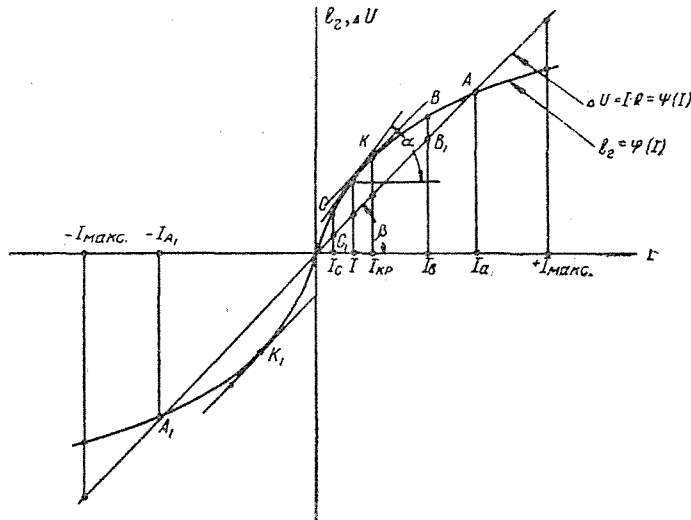
$c_e$  — коэффициент пропорциональности между  $n$  и  $e_d$  при постоянном и номинальном магнитном потоке  $\Phi_n$ .

Ток же в процессе разгона двигателя будет уменьшаться от значения  $I_A$  до значения, соответствующего нагрузке на его валу. При этом должно удовлетворяться равенство

$$e_2 = \Delta U + e_d = I.R + e_d, \quad (a)$$

справедливое только при рассмотрении статических режимов, когда можно пренебречь величиной противо-э.д.с. самоиндукции силового контура. Отсюда следует, что в тех же осях  $e_d$  изображается отрезком ординаты, лежащим между кривой  $e_2 = \varphi(I)$  и прямой  $\Delta U = I.R = \psi(I)$ , например — отрезком  $BB_1$ . Если ток  $I_B$  соответствует нагрузке, приложенной к валу двигателя, то при уменьшении тока от значения  $I_A$  и по достижении значения  $I_B$ , соответствующего точке  $B$ , дальнейшее повышение скорости и уменьшение тока прекратится и двигатель будет работать в устойчивом установившемся режиме. Эта область устойчивого режима лежит между точкой  $A$  и точкой  $K$ , определяемой касательной к кривой  $e_2 = \varphi(I)$ , параллельной прямой  $\Delta U = I.R = \psi(I)$ , и для нее справедливо соотношение (a). Если же момент сопротивления, приложенный к валу двигателя, настолько мал, что обусловленный им ток двигателя  $I_c < I_{кр}$ , то в процессе разгона ток двигателя будет уменьшаться, стремясь к значению  $I_c$ . По-прежнему с уменьшением тока будет возрастать скорость двигателя, а с ней и  $e_d$ . До точки  $K$  рост  $e_d$  будет удовлетворять уравнению (a). С точки же  $K$  отрезок, изображающий  $e_d$ , начнет уменьшаться (фиг. 2), что не соответствует росту  $e_d$  и  $n$  при уменьшении тока. Отсюда следует [5; 6], что дальнейшее повышение скорости двигателя невозможно, а так

как при дальнейшем уменьшении тока влево от точки  $K$   $e_d > e_2$ , то ток меняет свое направление, генератор перемагничивается до точки  $A_1$ , а двигатель оказывается в тормозном режиме. После остановки двигатель начнет разгоняться в обратную сторону, пока ток его снова не достигнет значения критического тока, соответствующего критической точке  $K_1$ . За этой точкой явление перемагничивания генератора повторяется и в схеме фиг. 1 возникают незатухающие колебания как электрических ( $e_2, e_d, I$ ),



Фиг. 2

так и механических ( $M, n$ ) величин. В [7] явление „опрокидывания“ электродвижущих сил в области между началом координат и критической точкой  $K$  объясняется инерцией якоря двигателя, достигшего высокой скорости, в силу чего  $e_d$  становится больше  $e_2$ , ток меняет свое направление на обратное и наступает колебательный режим.

### Критика взглядов на природу рассматриваемых колебаний

Резюмируем основные положения, к которым приходят авторы цитированной выше литературы:

1. Если ток нагрузки меньше критического тока  $I_{kp}$  (фиг. 2), то при переходе за критическую точку  $K$  в сторону начала координат дальнейшее повышение скорости, а следовательно, и противо-э.д.с. двигателя невозможно. При этом за точкой  $K$   $e_d > e_2$  происходит „опрокидывание“ электродвижущей силы генератора, ток меняет направление на обратное и наступает колебательный режим [5].

2. Начиная с точки  $K$ , двигатель продолжает вращаться по инерции, вследствие чего  $e_d$  становится больше  $e_2$  и наступает явление колебаний двигателя [7].

3. Так как двигатель имеет независимое возбуждение, то зависимость  $e_d = \varphi_1(I)$  будет представлять собой при различных скоростях вращения линию, параллельную оси абсцисс [6].

4. Несимметричный характер кривых  $I = f(t)$  и  $n = f_1(t)$  (фиг. 3) объясняется влиянием самоиндукции силовой цепи [6].

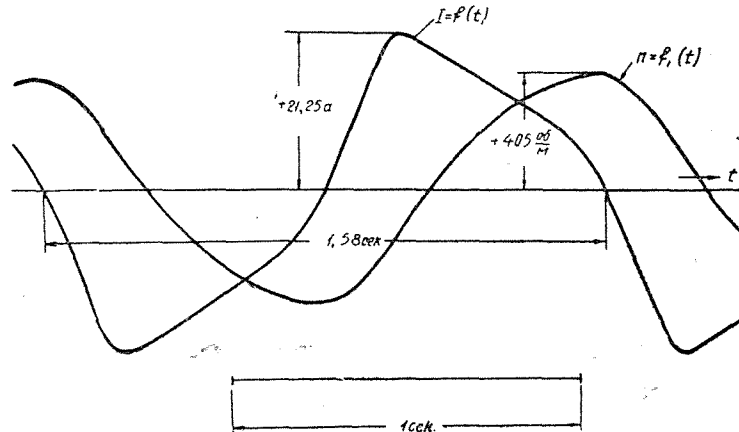
5. Устойчивая работа схемы фиг. 1 невозможна [7].

6. Предельными точками, определяющими амплитуду тока и э.д.с. генератора в процессе колебаний являются точки  $A$  и  $A_1$ , представляющие собой пороги возбуждения генератора.

Эти положения представляются не совсем достаточными, а иногда и неверными для того, чтобы удовлетворительно объяснить физическую картину возникновения колебаний.

Рассмотрим более подробно первые два положения.

Если при малой нагрузке двигателя ток его в процессе разгона будет убывать, то независимо от того, станет он меньше критического тока или нет, скорость двигателя будет возрастать. Поэтому утверждение, что за критической точкой повышение скорости невозможно—неверно; если ток двигателя стал меньше критического и продолжает убывать дальше—скорость двигателя, а с ней и  $e_d$  будет возрастать, правда,—не столь интенсивно, так как при питании от генератора с последовательным возбуждением последний при уменьшении тока будет развивать меньшее напряжение и тем самым в известной мере компенсировать повышение ско-



Фиг. 3

рости двигателя. Сказанное в полной мере подтверждается осциллограммой (фиг. 3), снятой при холостом ходе и щетках двигателя, установленных на нейтраль; на ней наблюдается непрерывное повышение скорости, достигающей своего максимума при токе, равном нулю; это положение подтверждается также и анализом уравнения движения, которое для случая разгона двигателя имеет вид:

$$M - M_{cm} = \frac{GD^2}{375} \frac{dn}{dt};$$

имея в виду, что при постоянном и номинальном магнитном потоке двигателя с независимым возбуждением

$$M = C_m' \cdot \Phi_n \cdot I = C_m I,$$

получим:

$$I - \frac{M_{cm}}{C_m} = I - I_{cm} = \frac{GD^2}{375 C_m} \frac{dn}{dt}. \quad (6)$$

В этих уравнениях:

$M$  — момент, развиваемый двигателем на валу,

$M_{cm}$  — статический момент, приведенный к валу двигателя,

$GD^2$  — маховой момент, приведенный к валу двигателя,

$\Phi_n$  — номинальный магнитный поток двигателя,

$C_m$  — коэффициент пропорциональности между током и моментом при номинальном и постоянном магнитном потоке,

$I_{cm}$  — статический ток, обусловленный приложенной к валу двигателя нагрузкой  $M_{cm}$ .

Так как при максимальной скорости двигателя ускорение его равно нулю, то на основании (б) получим, что при

$$\begin{aligned} n &= n_{\text{макс}}, \\ I &= I_{\text{см}}, \end{aligned}$$

откуда следует, что при холостом ходе, когда  $M_{\text{см}} = 0$  и  $I_{\text{см}} = 0$ , скорость достигает своего максимального значения при токе  $I = 0$ . Если же ток  $I_{\text{см}} \neq 0$  и меньше тока  $I_{\text{кр}}$ , то скорость достигает максимального значения при

$$I = I_{\text{см}}$$

в области между началом координат и критической точкой  $K$ . Отсюда же следует, что в рассмотренных случаях скорость неизбежно возрастает, если ток нагрузки двигателя принимает значения, меньшие  $I_{\text{кр}}$  (фиг. 2 и 3). Неверно также и утверждение, что за критической точкой двигатель вращается по инерции; хотя ток двигателя и стал меньше критического, но двигатель от генератора не отключен и, следовательно, не предоставлен свободному выбегу по инерции; закон изменения его скорости продолжает оставаться зависимым от закона изменения тока и э.д.с. генератора.

Не совсем верно и утверждение, что за критической точкой  $e_d > e_2$ . В самом деле, из фиг. 2 следует, что вблизи точки  $K$ , наоборот, э.д.с. генератора больше противо-э.д.с. двигателя, и лишь вблизи начала координат может соблюдаться неравенство  $e_d > e_2$ .

Третье положение явно ошибочно. При различных токах двигателя  $e_d$  не может оставаться постоянной, так как в соответствии с механической характеристикой двигателя с изменением тока изменяется и скорость его, а с ней и  $e_d$ .

Четвертое положение не совсем достаточно. Несимметрию кривых  $I = f(t)$  и  $n = f_1(t)$  (фиг. 3) следует объяснять не просто влиянием индуктивности силового контура, а влиянием индуктивности с железом; кроме того, форма кривых определяется и тем обстоятельством, что за полупериод двигатель находится в пусковом и тормозном режимах, для которых, как известно, кривые тока и скорости имеют различную форму. Кроме того, здесь безусловно сказывается влияние махового момента привода и величины нагрузки на его валу.

Пятое положение не совсем верно; неустойчивая работа двигателя имеет место при нагрузках, меньших, чем критический ток  $I_{\text{кр}}$ . При токах же, больших чем  $I_{\text{кр}}$ , система работает вполне устойчиво.

Наконец, последнее положение неверно. Точки  $A$  или  $A_1$  могут быть достигнуты генератором только в процессе возбуждения его при включении на неподвижный двигатель. В процессе же перемагничивания его в направлении от точки  $A$  к точке  $A_1$  знак  $e_2$  меняется на противоположный. При этом вращающийся двигатель оказывается в режиме противовключения, его противо-э.д.с. складывается с  $e_2$  и пик тока при перемагничивании генератора, определяемый как

$$I_{\text{макс}} = \frac{e_2 + e_d}{R},$$

окажется больше тока  $I_{A_1}$ , определяемого при неподвижном двигателе, как  $I_{A_1} = \frac{e_2}{R}$  (фиг. 2).

Помимо сказанного, все перечисленные положения не отвечают достаточно удовлетворительно на вопрос: как и почему происходит перемагничивание генератора? Ответить на этот вопрос можно, рассматривая систему фиг. 1 только как нелинейную и анализируя ее устойчивость.

## Дифференциальное уравнение движения привода

Электромеханический переходный процесс в системе, представленной на фиг. 1, может быть описан следующими уравнениями:

$$e_2 = I.R + L \frac{dI}{dt} + e_d, \quad (1)$$

$$M = M_{cm} + M = M_{cm} + \frac{GD^2}{375} \frac{dn}{dt}, \quad (2)$$

где  
 $M_j$  — динамический момент,  
 $L$  — коэффициент самоиндукции силового контура, полагаемый в дальнейшем постоянным.

Ограничиваясь рассмотрением холостого хода двигателя ( $M_{cm} = 0$ ) и полагая при постоянном и номинальном магнитном потоке двигателя

$$M = C_m \cdot I,$$

получим из (2):

$$I = \frac{GD^2}{375 C_m} \frac{dn}{dt}. \quad (3)$$

При том же условии имеем

$$e_d = C_e \cdot n. \quad (4)$$

Далее, в (1)  $e_2$  является нелинейной функцией тока:

$$e_2 = \varphi(I).$$

Подставляя (4) и (5) в (1) и дифференцируя, получим:

$$\varphi'(I) \frac{dI}{dt} = R \frac{dI}{dt} + L \frac{d^2 I}{dt^2} + C_e \frac{dn}{dt}, \quad (6)$$

а подставляя  $\frac{dn}{dt}$  из (3) в (6):

$$\varphi'(I) \frac{dI}{dt} = R \frac{dI}{dt} + L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{375 C_m \cdot C_e}{GD^2} \cdot I \frac{dI}{dt}$$

или

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + \left[ R - \varphi'(I) \right] \frac{dI}{dt} + \frac{375 C_m \cdot C_e}{GD^2} \cdot I = 0. \quad (7)$$

Полученное нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка описывает переходный процесс тока двигателя. В нем  $\varphi'(I)$  представляет собой тангенс угла  $\alpha$  наклона между касательной к кривой  $e_2 = \varphi(I)$  и осью абсцисс в рассматриваемой точке этой кривой (фиг. 2). Как это видно из фиг. 2, при

$$I > I_{кр}$$

$$\alpha < \beta$$

и  $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \beta,$

а при

$$I < I_{кр},$$

$$\alpha > \beta$$

и  $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta.$

Отсюда следует, что в (7) коэффициент при первой производной оказывается отрицательным при  $I < I_{кр}$  и положительным при  $I > I_{кр}$ .

В пределах незначительных изменений  $I$  система (7) может рассматриваться как линейная; поскольку знаки при коэффициентах дифференциального уравнения второго порядка являются критериями устойчивости, заключаем, что при  $I > I_{кр}$  рассматриваемая система устойчива и при  $I < I_{кр}$  — неустойчива.

Если положить  $L = 0$ , то (7) вырождается в

$$\left[ R - \varphi'(I) \right] \frac{dI}{dt} + \frac{375 C_m \cdot C_e}{GD^2} \cdot I = 0, \quad (8)$$

описывающее механический переходный процесс. Из него следует, что устойчивость или неустойчивость системы определяется только видом нелинейной характеристики  $e_2 = \varphi(I)$ .

Для того чтобы в дальнейшем судить о характере переходных процессов в системе, рассмотрим условия устойчивости работы ее отдельных звеньев: двигателя и генератора.

### Механическая характеристика и устойчивость работы двигателя

Статическая механическая характеристика двигателя может быть получена из выражения (а):

$$e_2 = I \cdot R + e_d,$$

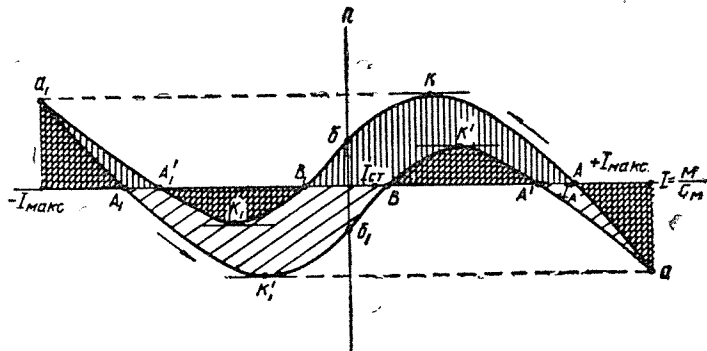
или

$$\varphi(I) = I \cdot R + C_e \cdot n = I \cdot R + C'_e \cdot \Phi_n \cdot n,$$

откуда

$$n = \frac{e_2 - I \cdot R}{C_e} = \frac{\varphi(I) - I \cdot R}{C_e \cdot \Phi_n}. \quad (9)$$

Следует иметь в виду, что в режиме колебаний генератор перематничивается не по кривой  $e_2 = \varphi(I)$ , представленной на фиг. 2, а по гистерезисной петле (фиг. 5); при этом при изменении тока от  $+I_{макс}$  до  $-I_{макс}$ , генератор перематничивается по кривой  $a b a_1$ , а при изменении тока



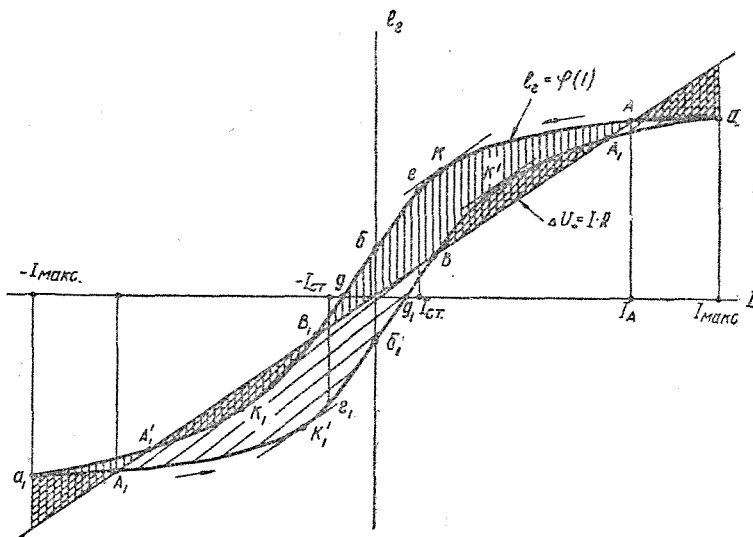
Фиг. 4

от  $-I_{макс}$  до  $+I_{макс}$  — по кривой  $a_1 b_1 a$ . Поэтому отрезки, заключенные между кривой  $e_2 = \varphi(I)$  и прямой  $\Delta U = IR$  и измеряющие в масштабе чертежа против-э.д.с. двигателя, должны измеряться в области, отмеченной вертикальной штриховкой — при изменении тока от  $+I_{макс}$  до  $-I_{макс}$  и в области, отмеченной наклонной штриховкой — при изменении тока от  $-I_{макс}$  до  $+I_{макс}$ . Величины этих отрезков, выраженные в вольтах, при

различных токах представляют собой значения числителя правой части (9). С учетом сказанного может быть построена механическая характеристика двигателя, представленная на фиг. 4. Из сопоставления фиг. 4 и 5 следует, что при изменении тока от  $+I_{\max}$  до  $-I_{\max}$  скорости по механической характеристике следует отсчитывать в области, отмеченной вертикальной штриховкой (фиг. 4), и при изменении тока от  $-I_{\max}$  до  $+I_{\max}$  — в области, отмеченной наклонной штриховкой. Из фиг. 4 и 5 также следует, что, в отличие от фиг. 2, получим не две, а четыре критических точки  $K, K_1, K'_1$  и  $K'$ , которые определяют собой пороги устойчивости системы, поскольку для них в (7) и (8)

$$[R - \varphi'(I)] = 0.$$

Далее из фиг. 4 следует, что участки механической характеристики  $aK, aK', a_1K_1$  и  $a_1K'_1$  являются падающими и характеризуют собой устойчивую работу привода при постоянном статическом моменте  $M_{ст}$ , а уча-



Фиг. 5

стки  $KK_1$  и  $K'K'_1$  —повышающимися и характеризуют неустойчивую работу привода при постоянном статическом моменте. В самом деле, пусть  $M_{ст}$  остается постоянным и пусть  $M$  и  $n$  —значения момента и скорости двигателя при установившемся равновесном состоянии, предшествующем нарушению равновесия. Пусть далее возникло возмущение в системе и имеют место переходные отклонения момента  $\Delta M$  и скорости  $\Delta n$ . Тогда новые значения момента и скорости в переходном процессе будут равны

$$M + \Delta M,$$

$$n + \Delta n$$

и уравнение движения примет вид:

$$(M + \Delta M) - M_{ст} = \frac{GD^2}{375} \frac{d(n + \Delta n)}{dt}. \quad (10)$$

Так как в установившемся режиме, предшествующем возмущению,  $M = M_{ст}$ , а скорость  $n$  есть величина постоянная, то из (10) получим:

$$\Delta M = \frac{GD^2}{375} \frac{d(\Delta n)}{dt}. \quad (11)$$



Поскольку  $M$  является функцией  $n$  (фиг. 4), то, рассматривая малые значения  $\Delta M$  и  $\Delta n$ , можно считать, что внутри этих значений  $M$  изменяется в функции  $n$  по линейному закону. Тогда

$$\Delta M = \frac{dM}{dn} \cdot \Delta n, \quad (12)$$

а подставляя (12) в (11), получим:

$$\frac{dM}{dn} \cdot \Delta n = \frac{GD^2}{375} \frac{d(\Delta n)}{dt},$$

откуда

$$\frac{d(\Delta n)}{\Delta n} = \frac{375}{GD^2} \cdot \frac{dM}{dn} \cdot dt$$

или

$$\ln(\Delta n) - \ln C = \frac{375}{GD^2} \cdot \frac{dM}{dn} \cdot t,$$

где

$C$  — постоянная интегрирования. Далее:

$$\Delta n = C \cdot e^{\frac{375}{GD^2} \cdot \frac{dM}{dn} \cdot t},$$

Постоянная  $C$  определится из начальных условий:

$$\text{при } t = 0, \quad \Delta n = C = \Delta n_{нач}.$$

Тогда

$$\Delta n = \Delta n_{нач} e^{\frac{375}{GD^2} \cdot \frac{dM}{dn} \cdot t}, \quad (13)$$

откуда следует, что для того, чтобы отклонение  $\Delta n$  скорости от состояния равновесия затухало с течением времени, необходимо условие

$$\frac{dM}{dn} < 0.$$

Как это видно из фиг. 4, этому условию соответствуют падающие участки механической характеристики, которые, таким образом, обеспечивают устойчивое движение привода в рассматриваемом случае. Тот же результат можно получить, если рассмотреть случай, когда  $M_{см}$  является функцией скорости и увеличивается с увеличением скорости [12].

### Устойчивость работы генератора

Как известно, генератор возбуждается до напряжения, соответствующего точке  $A$  пересечения его характеристики намагничивания с прямой падения напряжения в цепи якоря генератора и в цепи нагрузки (фиг. 6). Таким образом, точка  $A$  является точкой равновесия генератора, включенного на статическую нагрузку, и для нее справедливо

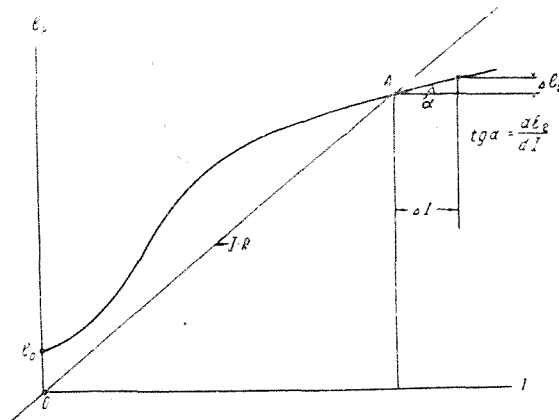
$$e_{zA} = I_A R. \quad (14)$$

Если в системе возникло нарушение равновесия, то система будет описываться уравнением:

$$e_z = I \cdot R + L \frac{dI}{dt}. \quad (15)$$

Если ток изменится на небольшую величину  $\Delta I$ , то соответствующие приращения э.д.с. генератора и падения напряжения будут  $\Delta e_2$  и  $\Delta(I \cdot R)$ . В пределах незначительных величин  $\Delta I$  мы можем считать, что  $\Delta e_2$  изменяется по линейному закону; тогда (фиг. 6)

$$\left. \begin{aligned} \Delta e_2 &= \frac{de_2}{dI} \cdot \Delta I, \\ \Delta(I \cdot R) &= \frac{d(I \cdot R)}{dI} \cdot \Delta I \end{aligned} \right\} \quad (16)$$



Фиг. 6

Очевидно далее, что,

$$\left. \begin{aligned} e_2 &= e_{2A} + \Delta e_2, \\ I \cdot R &= I_A \cdot R + \Delta(I \cdot R), \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

а подставляя (16) и (17) в (15), получим:

$$\begin{aligned} & \left[ e_{2A} + \frac{de_2}{dI} \cdot \Delta I \right] - \left[ I_A R + \frac{d(I \cdot R)}{dI} \cdot \Delta I \right] = \\ & = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d(I_A + \Delta I)}{dt} = L \frac{d(\Delta I)}{dt}, \end{aligned}$$

или, учитывая (14):

$$\frac{1}{L} \left[ \frac{de_2}{dI} - \frac{d(I \cdot R)}{dI} \right] \cdot \Delta I = \frac{d(\Delta I)}{dt},$$

откуда

$$\frac{1}{L} \left[ \frac{de_2}{dI} - \frac{d(I \cdot R)}{dI} \right] dt = \frac{d(\Delta I)}{\Delta I},$$

или

$$\ln(\Delta I) = \frac{1}{L} \left[ \frac{de_2}{dI} - \frac{d(I \cdot R)}{dI} \right] \cdot t + \ln K,$$

где  $K$  — постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий: при  $t = 0$   $\Delta I = \Delta I_{нач} = K$ .

Окончательно

$$\Delta I = \Delta I_{нач} \cdot e^{\frac{1}{L} \left[ \frac{de_2}{dI} - \frac{d(I \cdot R)}{dI} \right] \cdot t}. \quad (18)$$

Так как  $L$  есть величина положительная, то, очевидно, условием затухания  $\Delta I$  при  $t$ , стремящемся к бесконечности, является условие, что угол подъема прямой  $I, R$  должен быть больше угла подъема кривой  $e_2 = \varphi(I)$ .

Если для рассматриваемой точки равновесия системы это условие соблюдается, как в случае фиг. 6, то равновесие устойчиво, и наоборот.

Имея в виду, что при колебаниях перемагничивание генератора от точки  $a$  до точки  $a_1$  происходит по петле гистерезиса (фиг. 5) в направлении, указанном стрелками, убеждаемся, что точки  $A, A_1, A'$  и  $A'_1$  являются точками устойчивого равновесия, а точки  $B$  и  $B_1$  — точками неустойчивого равновесия генератора. Точки же  $K, K', K_1$  и  $K'_1$  являются точками смены устойчивости, поскольку в этих точках углы подъема прямой  $I, R$  и ветвей петли  $e_2 = \varphi(I)$  равны. В соответствии с (18) появившееся в системе отклонение  $\Delta I$  с увеличением  $t$  не затухает, а возрастает на участках петли  $KK_1$  и  $K'_1K'$ .

Если предположить далее, что система работает, например, в режиме, соответствующем точке  $B$  и ток изменяется на  $\Delta I$  в сторону положительных значений токов, то она будет удаляться от положения неустойчивого равновесия в направлении к точке  $a$ . Наоборот, для того чтобы система удалялась от того же положения неустойчивого равновесия к точке  $a_1$ , ток должен получить приращение  $\Delta I$  в сторону отрицательных значений. Таким образом, необходимым условием перемагничивания генератора от точки  $a$  до точки  $a_1$  является условие, чтобы ток при своем уменьшении от  $+I_{\max}$  обязательно перешел за значение  $I_{B_1}$ , соответствующее неустойчивому состоянию равновесия генератора в точке  $B_1$ .

### Влияние индуктивности на характер колебаний

Вернемся теперь к исследованию рассматриваемой системы в целом. Так как в соответствии с (1) ток в силовой цепи системы фиг. 1 определяется величиной индуктивности  $L$  контура, то существенным является вопрос: как величина индуктивности влияет на характер возникающих колебаний? Пусть (фиг. 4) ток в процессе колебаний в данный момент времени, оставаясь положительным, уменьшается; тогда генератор размагничивается по верхней части  $aAKb$  петли гистерезиса. Знак противо-э.д.с. самоиндукции при этом будет таким, что она, по закону Ленца, будет препятствовать уменьшению тока; с уменьшением тока будет уменьшаться и  $e_2$ , величина которой при  $I=0$  определится остаточным магнетизмом машины. Далее, с уменьшением тока противо-э.д.с. двигателя увеличивается с ростом скорости, которая, как было показано выше, при холостом ходе двигателя достигает максимального значения при  $I=0$ .

Соотношение величин

$$e_2 = \varphi(I), e_L = L \frac{dI}{dt}, e_D = C_e \cdot n \text{ и } IR$$

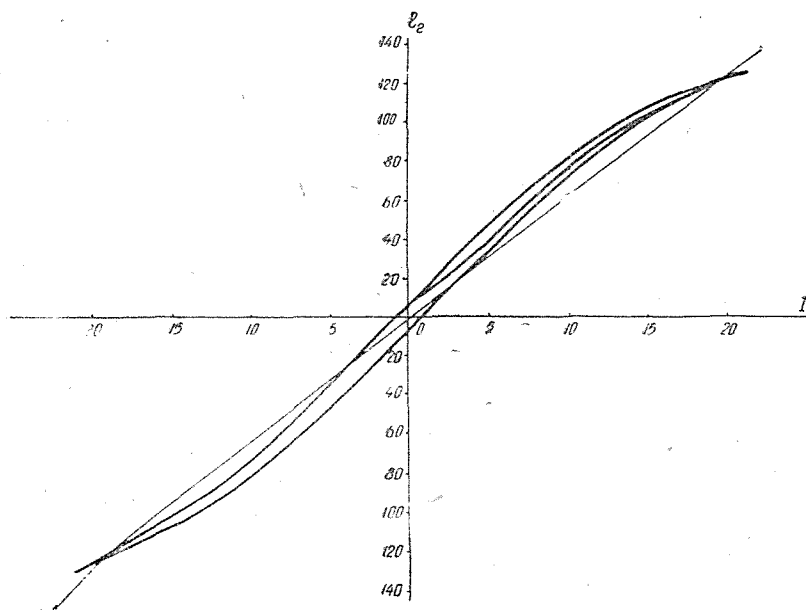
в частном случае может быть таково, что ток пройдет свое нулевое значение и начнет увеличиваться в сторону отрицательных значений. Так как при этом  $e_L$  не меняет своего знака, то она будет препятствовать увеличению тока в области отрицательных токов, и в силу этого и в зависимости от величины  $L$  ток может либо перейти, либо не перейти за значение

$$I = I_{B_1},$$

соответствующее точке  $B_1$  неустойчивого состояния равновесия генератора. Рассмотрим оба эти случая.

## 1. Случай малой индуктивности

При малом значении  $L$  ток переходит за значение  $I = I_{B_1}$ , и генератор удаляется от точки  $B_1$  неустойчивого состояния равновесия, стремясь к области  $K_1 A'_1 a_1$ , характеризующей его устойчивую работу. При этом  $I$  и  $e_2$  продолжают возрастать в сторону отрицательных значений. Так как отрицательный ток является для двигателя тормозным, а  $e_2$  и  $e_0$  при этом направлены согласно, то двигатель оказывается в режиме противовключения и интенсивно тормозится. Ток его в режиме противовключения достигает значения  $-I_{\max}$  и при торможении убывает. При возрастании тока от нуля до  $-I_{\max}$  генератор перемагнитится по ветви  $bB_1 K_1 A'_1 a_1$ ; при уменьшении тока от  $-I_{\max}$  он начнет размагничиваться по ветви  $a_1 A_1 K_1' b_1$  петли гистерезиса. Начиная с точки  $A_1$  (фиг. 4, 5), двигатель реверсируется, переходя таким образом из режима противовключения в двигательный режим. После прохождения тока через нулевое значение и при последующем увеличении тока в область положительных значений процесс перемагничивания генератора и реверсирования двигателя повторяется, в результате чего возникают периодические колебания, представленные осциллограммой на фиг. 3; последняя была снята при наименьшем значении  $L$ , соответствующем собственной индуктивности якорей машин. На фиг. 7 в масштабе представлена петля



Фиг. 7

гистерезиса испытанного генератора, соответствующая осциллограмме фиг. 3. Из рассмотрения фиг. 4 и фиг. 5 вытекают следующие возможные режимы работы двигателя в рассматриваемой системе:

а) во всей области  $AKб$  петли гистерезиса генератора двигатель работает в двигательном режиме ускорения при прямом вращении в случае если  $M_{ст} = 0$ ; при этом условии скорость достигает максимального значения при  $I = 0$ ;

б) если  $M_{ст} \neq 0$ , то в области  $AKг$  петли гистерезиса двигатель работает в двигательном режиме ускорения при прямом вращении и при  $I = I_{ст} = \frac{M_{ст}}{C_m}$  скорость двигателя достигает значения  $n_{\max}$ . В области

же  $2b$  петли гистерезиса двигатель работает в двигательном режиме торможения при прямом вращении;

в) в точке  $b$  петли гистерезиса двигатель работает в режиме идеального холостого хода при прямом вращении;

г) в области  $bd$  имеет место рекуперативное торможение двигателя при прямом ходе, поскольку  $e_d$  встречна  $e_2$  и  $e_d > e_2$ ;

д) в точке  $d$  петли гистерезиса двигатель работает в режиме динамического торможения при прямом ходе, поскольку генератор не возбужден;

е) в области  $\delta B_1 k_1 A_1' a_1 A_1$  двигатель находится в режиме противовключения при прямом ходе. При этом на ветви  $KbB_1 A_1' a_1$  механической характеристики (фиг. 4) двигатель не работает; в самом деле, при малом  $L$  можно пренебречь влиянием индуктивности и считать, что ток изменяется от  $I = I_{кр}$  до  $I = -I_{макс}$  практически мгновенно; при этом скорость мгновенно измениться не может, поскольку изменение скорости связано с изменением кинетической энергии, накопленной маховыми массами привода и равной при  $n_{макс}$ :

$$\frac{J \cdot \omega_{макс}^2}{2} = \frac{GD^2 (2\pi n_{макс})^2}{4g \cdot 60^2} = \frac{GD^2 \cdot 2\pi \cdot 2\pi n_{макс}^2}{4g \cdot 60 \cdot 60} = \frac{GD^2}{3583} \cdot n_{макс}^2.$$

Поэтому двигатель достигает точки  $a_1$  в режиме противовключения практически при неизменной скорости;

ж) в области  $A_1 K_1' b_1$  режим двигателя тот же, что и в п. а, но при обратном вращении двигателя;

з) при  $M_{ст} \neq 0$  в области  $A_1 K_1' \Gamma_1$  режим двигателя аналогичен описанному в п. б, но при обратном вращении двигателя;

и) в точке  $b_1$  режим двигателя тот же, что и в п. в, но при обратном вращении;

к) в области  $b_1 d_1$ —то же, что и в п. г при обратном вращении двигателя;

л) в точке  $d_1$ —то же, что и в п. д при обратном вращении двигателя;

м) в области  $\delta_1 B K' A' a A$ —то же, что и в п. е при обратном вращении двигателя; аналогично сказанному в п. е двигатель не работает на ветви  $K_1' b_1 B K' A' a$  механической характеристики (фиг. 4), достигая состояния, соответствующего точке  $a$ , практически при неизменной скорости.

Указанные границы режимов являются приближенными, поскольку они рассматривались применительно к статической механической характеристике фиг. 4 без учета электромагнитной и электромеханической инерции системы.

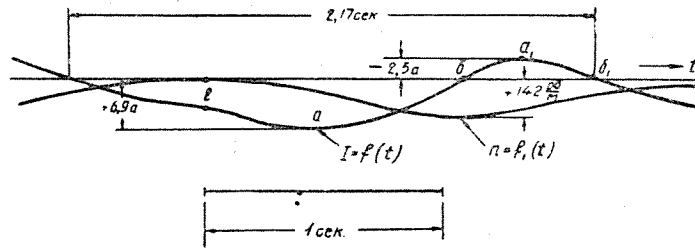
## 2. Случай большой индуктивности

При большом значении  $L$  может оказаться, что ток не достигнет значения  $I_{B_1}$  (фиг. 5). При этом перемагничивание генератора до состояния, определяемого точкой  $a_1$ , будет невозможно, так как генератор стремится удалиться от неустойчивого состояния равновесия, определяемого точкой  $B_1$ , в область  $KaA$  его устойчивой работы.

Таким образом, режим работы генератора будет определяться не прежней петлей гистерезиса (фиг. 5), а новой, представленной на фиг. 9.

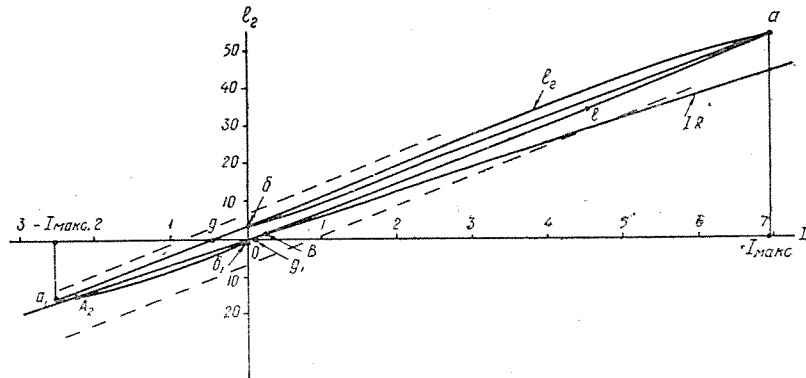
Сказанное подтверждается осциллограммой фиг. 8, снятой при большой дополнительной индуктивности, включенной в силовую контур схемы фиг. 1, и при всех прочих равных условиях, что и при получении осциллограммы фиг. 3. Осциллограмме фиг. 8 соответствует петля гистерезиса, снятая для испытанного генератора и приведенная на фиг. 9, на которой для сравнения показаны пунктиром соответствующие участки петли гистерезиса, представленной на фиг. 7 и снятой для случая малой индуктив-

ности. Как это видно на фиг. 8 и 9, в процессе колебаний абсолютные значения максимальных токов в положительной и отрицательной областях оказываются неодинаковыми. То же наблюдается и при малой индуктивности (фиг. 3), но там разница абсолютных значений максимальных токов значительно меньше, чем в случае большой индуктивности. Далее из



Фиг. 8

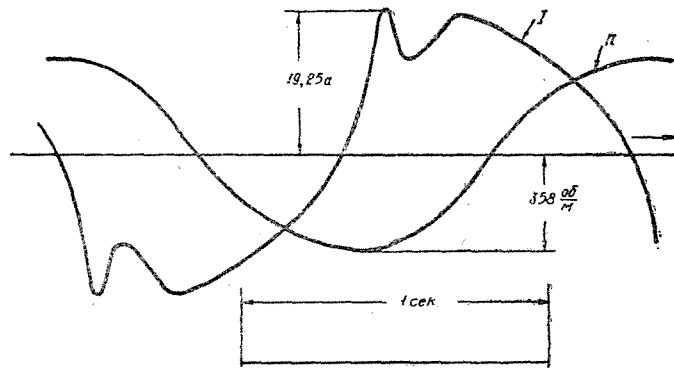
фиг. 8 следует, что при данном большом значении  $L$  явление реверса двигателя не наступает. При уменьшении тока от  $+I_{\text{макс}}$  до нуля скорость двигателя возрастает до  $n = n_{\text{макс}}$  при  $I = 0$  и холостом ходе двигателя, что соответствует сказанному ранее. При этом размагничивание генератора протекает по ветви  $ab$  петли гистерезиса и двигатель в этом



Фиг. 9

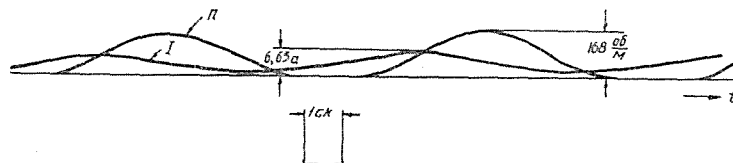
случае находится в двигательном режиме ускорения при прямом вращении. В точке  $b$  имеет место идеальный холостой ход двигателя при прямом вращении; на участке  $bd$  двигатель находится в режиме рекуперативного торможения при прямом вращении, поскольку  $e_2$  встречна  $e_d$ , а в точке  $d$ —в режиме динамического торможения при прямом вращении. Далее на участке  $da_1$  имеет место режим противовключения при прямом вращении, поскольку  $e_2$  совпадает с  $e_b$ ; так как при дальнейшем торможении скорость двигателя уменьшается, то ток двигателя, достигнув значения  $-I_{\text{макс}}$ , также уменьшается и генератор начинает размагничиваться по участку  $aA_1$  петли гистерезиса. Точка  $A_1$  является точкой устойчивого состояния равновесия генератора; однако она будет пройдена, так как при  $I = -I_{A_1}$  двигатель в режиме торможения продолжает снижать свою скорость, а с ней будет уменьшаться и тормозной ток. Это соответствует участку  $A_1b_1$  петли; вблизи точки  $b_1$  на участке  $A_1b_1$  генератор выходит на неустойчивую часть участка и стремится удалиться от точки  $A_1$  к точке  $a$ . В точке  $b_1$ , а также на участке  $b_1d_1$  имеет место любопытный случай, когда  $I = 0$  (точка  $b_1$ ) или принимает положительные значения (участок  $bd$ ) при

наличии в замкнутой цепи (фиг. 1) согласно направленных в сторону отрицательных значений токов  $e_2$ ,  $e_d$  и  $e_L$ . Это явление обусловлено, вероятно, тем обстоятельством, что изменение тока в процессе колебаний в данной работе рассматривалось на „статической“ петле гистерезиса генератора, тогда как, строго говоря, исследование должно проводиться по „динамической“ петле гистерезиса. Возвращаясь к фиг. 8 и 9, видим, что режим противовключения двигателя, соответствующий ветви  $da_1A_1b_1$  петли гистерезиса, характерен тем, что он, в силу зависимости  $e_2$  от  $I$  и влияния электромагнитной и электромеханической



Фиг. 10

инерции системы, не сопровождается реверсом двигателя, а переходит в идеальный холостой ход, соответствующий точке  $b_1$ ; скорость при этом оказывается меньше, чем  $n_{\text{макс}}$  идеального холостого хода, соответствующего точке  $b$  петли. Для участка  $b_1d_1$  режим двигателя оказывается двигательным тормозным при прямом вращении; при этом для генератора ток оказывается встречным относительно  $e_2$ . В точке  $b_1$  имеет место двигательный тор-



Фиг. 11

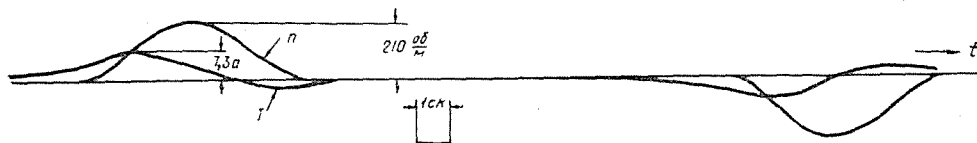
можной режим при  $e_2 = 0$ . Этот же режим продолжается до полной остановки двигателя, но при возрастающей в область положительных значений  $e_2$  (участок  $d_1e$ ). Наконец, в точке  $e$  имеем режим электромагнитного тормоза, а на участке  $eaб$ —двигательный режим ускорения двигателя при увеличивающейся (участок  $ea$ ) и уменьшающейся (участок  $ab$ )  $e_2$ .

При включении в силовую цепь схемы фиг. 1 некоторой меньшей индуктивности и при всех прочих неизменных условиях (в том числе и  $R$ ) была получена осциллограмма, представленная на фиг. 10 и характерная наличием двух экстремальных значений тока за полупериод.

Осциллограмма фиг. 11 получена при включении в силовую цепь схемы еще большей индуктивности, чем при опыте, соответствующем фиг. 8. Как это видно из фиг. 11, увеличение индуктивности вызывает разрыв в кривой скорости, сохраняющей один и тот же знак; ток же в процессе колебаний не выходит из области положительных значений. Наоборот, при индуктивности меньшей, чем в опыте, соответствующем

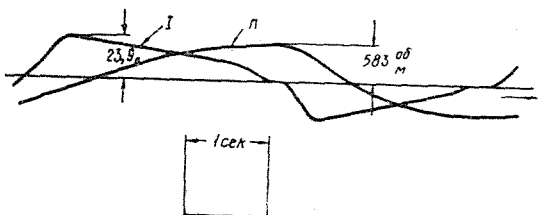
фиг. 8, но большей, чем в опыте, соответствующем фиг. 10, наблюдается значительный разрыв в кривой скорости при реверсировании двигателя (фиг. 12).

Все приведенные выше осциллограммы были получены на машинах с характеристиками: генератор 8 л. с., 220 в, 32,5 а, 1300 об/мин; возбуждение—последовательное; двигатель 3,7 л. с., 110 в, 31 а, 1180 об/мин; возбуждение—независимое.



Фиг. 12

При испытании схемы с тем же генератором, но с двигателем 3,25 л.с., 220 в, 13,5 а, 1375 об/мин. и при включении в силовую цепь незначительной индуктивности была получена осциллограмма, представленная на



Фиг. 13

фиг. 13. В отличие от всех, приведенных выше, на ней кривая скорости непрерывна, а кривая тока терпит разрыв при прохождении через нулевое значение.

## Выводы

1. Проведенное исследование удовлетворительно объясняет механизм колебаний в системе „генератор с последовательным—двигатель с независимым возбуждением“.

2. Показано, что физика этих колебаний и их различные варианты могут быть правильно объяснены только в том случае, если система рассматривается как нелинейная и исследуется приемами теории устойчивости.

3. Показано, что колебания возникают в результате перехода системы из области устойчивой в область неустойчивой ее работы и обратно.

4. Показано, что включение в систему дополнительной и различной индуктивности с железом в значительной степени изменяет форму нелинейных колебаний.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов Д. П. О колебательных процессах в электроприводах. Электричество, № 8, 1945.
2. Беляев М. В. Переходные режимы в простейшей схеме электромашинной автоматики. Электричество, № 6, 1950.
3. Говорков В. А. Работы акад. М. В. Шулейкина по электрическим машинам. Электричество, № 5, 1952.



4. Г а н д ж а Л. И. Самореверсирующиеся системы электроприводов. Известия ТПИ, т. 72, 1952.
  5. А р н о л ь д Э. Динамомашина постоянного тока, 1, 1909.
  6. А р н о л ь д и Л а к у р. Машины постоянного тока, т. 1, Гостехиздат, 1931.
  7. Ш е н ф е р К. И. Динамомшины и двигатели постоянного тока. Энергоиздат, 1934.
  8. Р у к а в и ш н и к о в Н. Н. Сборник задач по электрическим машинам постоянного и переменного тока. Кубуч, 1933.
  9. Ш у л е й к и н М. В. О свободных колебаниях в цепи серийного мотора и генератора. Известия С-Петербург. политех. института, XI, вып. 2, 1909.
  10. Ш у л е й к и н М. В. Самовозбуждение электрических колебаний в цепях коллекторных динамомашии. Отдельный оттиск из Известий С-Петербург. политех. института. т. XX, 1913.
  11. П о п о в В. К. Применение электродвигателей в промышленности, ч. II, вып. 1. Ленинград, 1935.
  12. П о п о в В. К. Основы электропривода. Госэнергоиздат, 1945.
-