

К РАСЧЕТУ БАЛОК И ПЛИТ, ОПИРАЮЩИХСЯ НА УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ

П. Б. АНТОНЕВИЧ

1. Постановка вопроса

В настоящее время расчет фундаментных балок и плит производится в основном двумя способами.

Первый способ—способ коэффициента постели—основан на предположении Фусса-Винклера о том, что осадка поверхности упругого основания в данной точке пропорциональна интенсивности действующего в этой точке нормального давления. Другими словами, по этой гипотезе свойства упругого основания отождествляются со свойствами тяжелой жидкости, лишенной поверхностного натяжения.

Способ коэффициента постели дает результаты, не всегда достаточно удовлетворительно согласующиеся с данными практики. Основным его недостатком является то, что вся совокупность вопросов, возникающих при расчете балок и плит, опирающихся на упругое основание, характеризуется только одним параметром—коэффициентом постели K_z . Как показали опыты, величина этого коэффициента определяется не только свойствами основания, но и рядом других факторов, среди которых наиболее важными являются размеры и форма подошв фундаментных балок и плит, а также характер приложенных к ним нагрузок.

В настоящее время способ коэффициента постели принято применять лишь для расчета сооружений, в основаниях которых ожидается развитие больших областей пластических деформаций. Он применим также для решения ряда задач, не имеющих никакого отношения к механике грунтов.

Второй более современный способ основан на представлении основания как идеально упругого полупространства. Его применение к расчету фундаментных балок и плит правомочно лишь в тех случаях, когда области пластических деформаций в их основаниях пренебрежимо малы.

Из сказанного следует, что в случаях достаточно умеренного развития областей пластических деформаций обоснованный выбор применения того или иного из двух названных способов становится затруднительным. В этих условиях для расчета сооружений, опирающихся на упругое основание, следовало бы пользоваться способом, промежуточным между способом коэффициента постели и способом упругого полупространства. Попыткой разработки такого способа и является наша работа. Ее целью является построение такой теории упругого основания, которая, обладая известной универсальностью, с одной стороны, давала бы возможность решать задачи о расчете фундаментных балок и плит с помощью сравнительно простых средств анализа, а с другой—была бы свободна от основных недостатков способа коэффициента постели и открывала бы возможность решать такие задачи, которые с помощью гипотезы Фусса Винклера вообще решить нельзя. Этого можно достигнуть, если в основу построения теории положить новую приближенную модель упругого основания,

свойства которой характеризуются параметрами, позволяющими удовлетворительно аппроксимировать имеющую место в реальных группах зависимость между осадками их поверхности и возникающей при этом реакцией.

К построению такой модели мы и перейдем.

2. Построение приближенной модели упругого основания

Основные требования, которым должна удовлетворять новая приближенная модель упругого основания, можно уяснить, сопоставив результаты решений задач об осадке жесткого штампа, опирающегося на упругое полупространство и на упругое основание Фусса-Винклера.

Как известно, осадка штампа, опирающегося на упругое полупространство, может быть вычислена по формуле Шлейхера

$$w = \frac{P}{A\sqrt{F}},$$

в которой P — приложенная к штампу внешняя нагрузка, уравниваемая реакцией упругого основания R , F — площадь штампа, A — коэффициент, зависящий от упругих свойств полупространства и формы штампа.

Из этой формулы легко усмотреть, что при прочих равных условиях полная реакция основания под штампом оказывается пропорциональной его периметру:

$$P = R_1 = wA\sqrt{F}.$$

С другой стороны, осадка штампа, поставленного на упругое основание Фусса-Винклера, определяется формулой

$$w = \frac{P}{K_z F},$$

из которой следует, что реакция винклерового основания пропорциональна площади штампа:

$$P = R_2 = wK_z F.$$

Опыты показывают, что осадки опирающихся на реальные грунты фундаментов при одинаковых значениях средних напряжений в их основаниях меняются с изменением величины их опорной площади. Это изменение в большинстве случаев характеризуется близкой к линейной зависимостью между размерами фундаментов и их осадками. Чаще всего осадки растут медленнее, чем это следует из расчетов по формуле Шлейхера. Однако бывают случаи, когда осадки фундаментов растут быстрее, чем дает упомянутая формула.

Рационально построенная модель упругого основания должна отображать эти экспериментально установленные факты. Этого можно добиться, разделив силы поддержания грунта на две системы реактивных сил: силы, распределенные по площади фундамента, и силы, распределенные вдоль его периметра.

Принимая во внимание, что реакции как основания Фусса-Винклера, так и упругого полупространства пропорциональны осадкам фундаментов, допустим наличие такой же пропорциональности у предлагаемой модели упругого основания. Тогда полная реакция такого основания выразится формулой:

$$R = R_1 + R_2 = (kF + mS)w, \quad (1)$$

в которой k — коэффициент пропорциональности реактивных сил R_1 , распределенных по площади фундамента F ; m — коэффициент пропорциональности реактивных сил R_2 , распределенных по его периметру.

Таким образом, свойства предлагаемой модели упругого основания, как и свойства упругого полупространства, характеризуются двумя параметрами вместо одного по способу коэффициента постели. Эти параметры k и m мы будем в дальнейшем называть упругими постоянными.

При помощи замены

$$R = pF$$

формулу (1) преобразуем к виду:

$$w = \frac{p}{k + \frac{ms}{F}}. \quad (2)$$

Эта формула при $k = 0$ превращается в формулу Шлейхера, при $m = 0$ — в формулу Фусса-Винклера, но сама по себе она в сущности построена эмпирически. Ее достоинства и недостатки можно выяснить, сравнив результаты вычисленных по ней осадок с данными соответствующих опытов. Некоторые результаты такого сравнения приведены в разделе 4.

3. Физическая интерпретация свойств модели

Дадим физическую интерпретацию входящих в формулу (2) коэффициентов k и m . Из этой формулы видно, что постоянная k по своему физическому смыслу вполне аналогична коэффициенту постели Фусса-Винклера. Постоянная m определяет возникающую при единичной осадке штампа некоторую систему удельных сил, распределенных вдоль периметра штампа — краевых реактивных сил. Эти силы схематически отражают концентрацию нормальных напряжений по краям штампа и влияние касательных напряжений, реально существующих по цилиндрической поверхности, проходящей через контур подошвы штампа. Можно предположить, что они возникают вследствие излома поверхности основания на границе штампа и вызываются силами, подобными силам поверхностного натяжения, аналогичными тем, которые возникают на поверхности всякой тяжелой жидкости.

Таким образом, мы приходим к модели упругого основания, представляющей собою нечто вроде тяжелой жидкости с поверхностным натяжением.

Постоянная k представляет удельный вес этой жидкости; постоянная m просто выражается через ее поверхностное натяжение.

Модель упругого основания, близкая к описанной, была предложена проф. М. М. Филоненко-Бородичем [3]. В числе прочих он предложил модель, по которой упругое основание представляет собою систему бесконечно часто расположенных пружин, соединенных поверху всесторонне растянутой мембраной.

Легко видеть, что эту модель проф. М. М. Филоненко-Бородича можно целиком уподобить тяжелой жидкости с поверхностным натяжением. В предлагаемой нами модели упругого основания такую аналогию до конца провести нельзя.

Так, в частности, она не исключает предположения о том, что постоянная k может принимать различные значения в различных точках основания. Как показал проведенный нами анализ экспериментальных данных, необходимость такого предположения иногда возникает. Кроме того, наша модель позволяет устранить излишние и не вытекающие из существа проблемы сложности, которые могут возникнуть, если при решении всех задач строго следовать мембранной модели проф. М. М. Филоненко-Бородича.

В общем, наша модель упругого основания является более гибкой, чем мембранная модель. Характеризующим ее константам k и m мы можем приписывать любые значения, руководствуясь при этом только данными опытов.

Вместе с тем, в качестве удобного рабочего аппарата мы будем иногда пользоваться аналогией нашей модели с тяжелой жидкостью с поверхностным натяжением. Но эта аналогия играет для нас чисто вспомогательную роль, в некоторой степени похожую на роль мембранной аналогии в теории кручения призматических стержней.

4. Некоторые результаты экспериментальной проверки модели упругого основания

С целью выяснения достоинств и недостатков предлагаемой приближенной модели упругого основания нами были проанализированы заимствованные из разных источников данные испытаний грунтов жесткими штампами, размеры которых в различных сериях опытов менялись от 0,02 до 15 квадратных метров.

Анализ этот производился по следующему общему плану.

По данным двух опытов с одним штампом или осредненным данным нескольких опытов определялись постоянные k и m , а затем по формуле (2) определялись осадки остальных штампов опытной серии. Эти теоретически вычисленные значения осадок сравнивались с осадками, непосредственно полученными на опытах.

Другой вид анализа экспериментальных данных предложен инж. О. А. Савиновым [2]. Он заключается в сравнении вычисленных по данным опытов коэффициентов постели при равномерном (k_z) и неравномерном (k_φ) сжатии с их приведенными величинами, вычисляемыми по специальным формулам, связывающим величину этих коэффициентов с упругими постоянными основания и размерами штампов. Указанные формулы, преобразованные нами для определения введенных выше постоянных k и m , имеют вид:

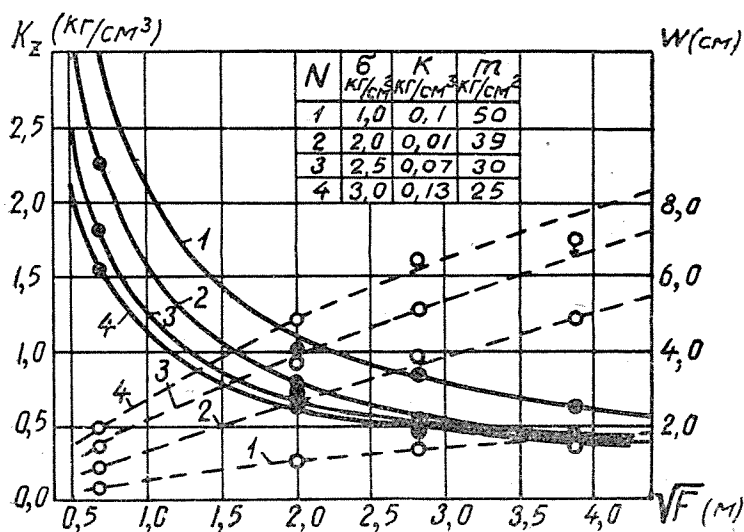
$$\left. \begin{aligned} k_z &= k + \frac{2(a+b)}{a \cdot b} m, \\ k_\varphi &= k + \frac{2(3a+b)}{a \cdot b} m, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где a и b — стороны прямоугольной подошвы штампа, причем сторона a параллельна, а b перпендикулярна оси поворота штампа.

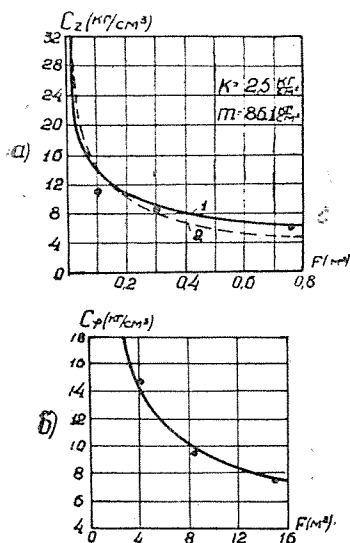
На фиг. 1 приведены результаты подобной обработки опытов ВАОС, данные которых заимствованы нами из работы инж. Х. Р. Хакимова [4]. Восходящие кривые выражают зависимость изменения осадок штампов разных размеров при одинаковых средних напряжениях в их основании. Нисходящие кривые представляют аналогичные зависимости, построенные для приведенных коэффициентов постели. Точками отмечены значения, полученные опытным путем.

На фиг. 2—4 представлены графики аналогичной обработки экспериментальных данных, заимствованные нами из работы инж. О. А. Савинова [2], в которой он рассмотрел задачу о равновесии жесткого прямоугольного штампа, опирающегося на мембранную модель проф. М. М. Филоненко-Бородича. При этом Савинов сделал ряд серьезных упрощений мембранной модели, в результате которых ее свойства могут быть описаны формулой (1).

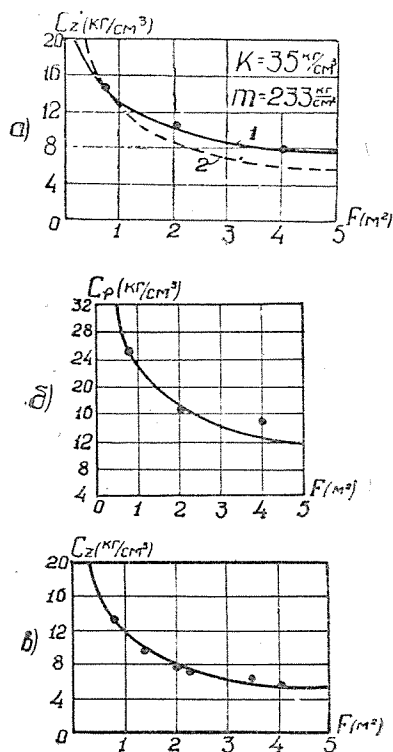
На фиг. 5—6 представлены графики, иллюстрирующие сделанную нами обработку результатов опытов Пресса [5] по испытанию пробными нагруз-



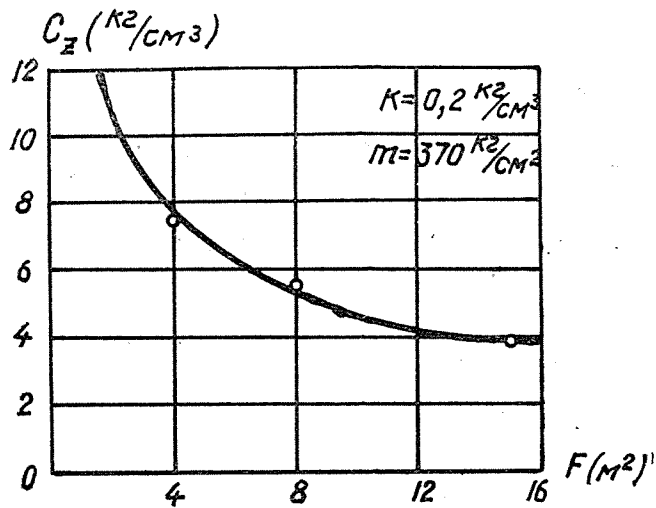
Фиг. 1. Опыты ВИОС на мелкозернистом песке: $\gamma = 1,87 \text{ т/м}^3$.



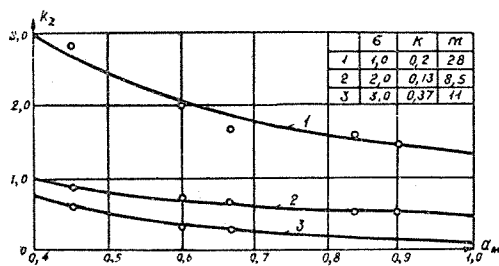
Фиг. 2. Опыты Кернера на среднезернистом песке. Кривая 1 построена по формуле (3); кривая 2—по формуле Шлейхера.



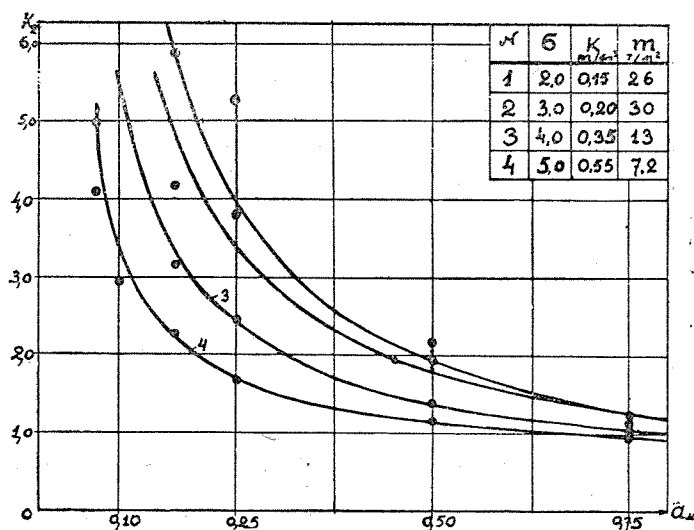
Фиг. 3. Опыты Баркана, Смоликова и Санчева (Фундаментстрой) на лесовидном суглинке. Кривая 1 на фиг. (а) построена по формуле (3); кривая 2—по формуле Шлейхера.



Фиг. 4. Опыты Смоликова (Фундаментстрой) на песчаном грунте.



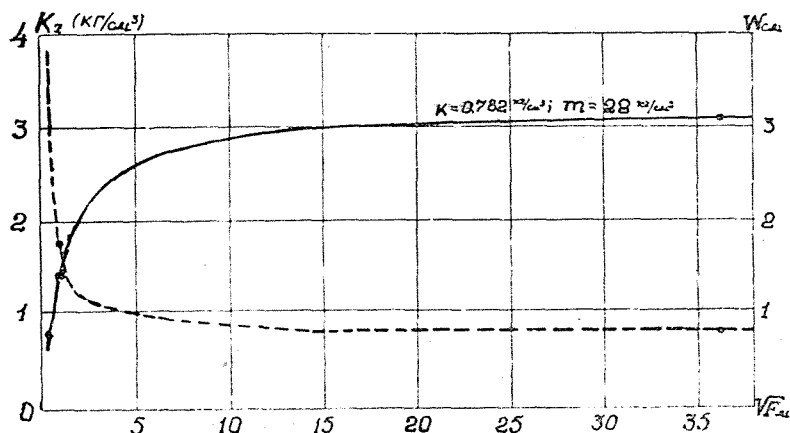
Фиг. 5. Опыты Пресса на песке; $\gamma = 1.52 \text{ т/м}^3$.



Фиг. 6. Опыты Пресса на глине; $\gamma = 2.3 \text{ т/м}^3$.

ками среднезернистых песков ($\gamma = 1,52 \text{ т/м}^3$) и тяжелых коричневых глин ($\gamma = 2,3 \text{ т/м}^3$).

Из рассмотрения графиков (фиг. 1—6), иллюстрирующих проведенный нами анализ экспериментальных данных, видно, что при надлежащем выборе упругих постоянных k и m результаты опытов удовлетворительно согласуются с выводами теории. При этом заслуживает внимания тот факт, что удовлетворительное совпадение результатов имеет место как для глинистых, так и для песчаных грунтов. Показательно, что аналогичные приведенным выше кривые, для сравнения построенные по формуле Шлейхера (кривые 2 на фиг. 2 и 3а), существенно отклоняются от данных, полученных из опытов.



Фиг. 7. Сопоставление осадок штампов ($F_1 = 0,09 \text{ м}^2$; $F_2 = 1,0 \text{ м}^2$) с осадками элеватора ($F_{np} = 1310 \text{ м}^2$), возведенного на мощном слое среднезернистых песков.

Удовлетворительная увязка теоретически построенных на основе предлагаемой модели кривых с данными опытов была получена и при весьма большой разнице в размерах штампов. Так, нами были сопоставлены осадки фундаментов реальных сооружений с осадками штампов, поставленных в котлованах фундаментов или в непосредственной от них близости. В качестве иллюстрации ограничимся здесь приведением результатов обработки одного из таких опытов, данные которого заимствованы нами из книги инж. В. И. Рыбакова [1].

На фиг. 7 представлены графики, построенные по осадкам штампов, площадью $0,09$ и $1,0 \text{ м}^2$ и фундамента элеватора с приведенной площадью 1310 м^2 . Они подтверждают сделанный выше вывод и дают наглядное представление о картине экстраполяции осадок для сооружений с большой опорной площадью, получаемой при помощи предлагаемой нами модели упругого основания.

Аналогичные приведенным выше результаты опытной проверки свойств приближенной модели были получены нами и в ряде других случаев.

5. Выводы

Проверенный нами анализ экспериментальных данных позволил сформулировать следующие выводы.

1. Осадки геометрически подобных штампов всегда растут медленнее, чем растут их периметры (или, что в сущности то же самое, $\sqrt{F}$).

2. В известных пределах грунт можно рассматривать, как линейно деформируемую среду, но этой последней следует приписывать свойства, не вполне тождественные свойствам упругого полупространства.

3. Располагаясь значениями постоянных k и m , можно добиться удовлетворительного совпадения данных вычислений по формуле (2) с данными опытов.

4. Как правило, коэффициенты k и m , в особенности коэффициент m , оказываются довольно устойчивыми величинами для данной категории грунтов и данных интервалов нагрузок и мало зависят от формы и размеров подошвы штампов.

Результаты проведенного нами анализа экспериментальных данных подтверждают возможность применения указанной модели упругого основания. Эта модель, как и модель проф. М. М. Филоненко-Бородича, хотя и страдает некоторой схематичностью и не позволяет анализировать напряженное состояние основания, но открывает возможности для разработки метода расчета фундаментных балок и плит, более точного, но не более сложного, чем расчет по способу коэффициента постели. Она свободна от отмеченных выше основных недостатков модели Фусса-Винклера, так как позволяет учитывать не только местные, но и общие деформации поверхности упругого основания. С ее помощью можно решать все задачи, которые решаются в теории расчета фундаментных балок и плит по способу коэффициента постели, и, кроме того, задачи, которые по этому способу вообще решить нельзя. К ним, например, относятся задачи о влиянии размеров и формы фундаментов на величину их осадки, о влиянии пригрузки и о взаимном влиянии близко расположенных фундаментов. Решению этих последних задач будет посвящена специальная статья. Здесь же мы ограничимся лишь рассмотрением задач о расчете фундаментных балок и плит, опирающихся на упругое основание предлагаемой приближенной модели. Этому и посвящаются остальные разделы настоящей работы.

6. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки на упругом основании

Вывод дифференциального уравнения изогнутой оси балки, опирающейся на упругое основание принятой модели, в сущности не отличается от аналогичного вывода для балки, опирающейся на упругое основание Фусса-Винклера. Здесь также можно исходить из общего уравнения изгиба бруса постоянного сечения:

$$EJw^{IV} = q(x) - r(x), \quad (4)$$

в котором через $q(x)$ обозначена интенсивность приложенной к балке распределенной нагрузки, а через $r(x)$ — погонная реакция упругого основания. Разница будет заключаться в том, что в рассматриваемом случае реакция основания определяется не по гипотезе коэффициента постели, а по более сложной формуле, в которую, кроме реакции основания, расположенного непосредственно под балкой, войдут также краевые реактивные силы. При принятых на фиг. 8 обозначениях эта формула будет иметь вид:

$$r(x) = 2bkw + 2mw. \quad (5)$$

Подставив в уравнение (4) вместо $r(x)$ его значение (5), получим:

$$EJw^{IV} = q(x) - 2(kb + m)w.$$

Теперь, перенеся в левую часть равенства все слагаемые, кроме $q(x)$, и выполнив несложные преобразования, будем иметь:

$$w^{IV} + \frac{2}{EJ}(kb + m)w = \frac{q(x)}{EJ}. \quad (6)$$

Обозначив для упрощения записи:

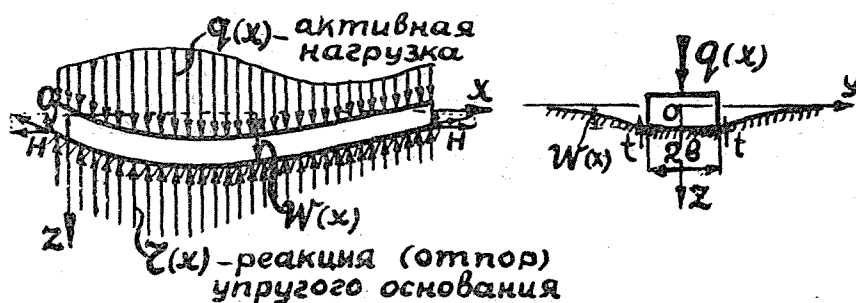
$$\sqrt[4]{\frac{kb+m}{2EJ}} = \lambda \text{ [м}^{-1}\text{]}, \quad (7)$$

приведем уравнение (6) к виду:

$$w^{IV} + 4\lambda^4 w = \frac{q(x)}{EJ}, \quad (8)$$

более удобному для последующих выкладок.

Таким образом, решение задачи об изгибе балки постоянного сечения, опирающейся на упругое основание принятой модели, сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения, совершенно аналогично-



Фиг. 8

го уравнению, вытекающему из гипотезы Фусса-Винклера. В нем λ — обобщенная упругая характеристика, зависящая не только от размеров и жесткости балки, но и двух упругих постоянных, характеризующих упругое основание предлагаемой модели, вместо одной по способу коэффициента постели.

Из рассмотрения формулы (7) можно заключить, что неточность в определении величин упругих постоянных k и m ведет к малой погрешности при вычислении всех расчетных эпюр, кроме эпюры осадок, так как эти постоянные стоят в формуле (7) под радикалом четвертой степени. Величины осадок линейно зависят от обеих упругих постоянных.

Сравним уравнение (8) с дифференциальным уравнением изгиба балки, опирающейся на упругое основание проф. М. М. Филоненко-Бородича. Это последнее имеет вид:

$$w^{IV} - 2a^2 w'' + 4\lambda^4 w = \frac{q(x)}{EJ}, \quad (9)$$

где $a = \sqrt{\frac{bH}{EJ}} \text{ [м}^{-1}\text{]}$, H — натяжение мембраны, а b — полуширина балки.

Трехчленное уравнение (9) отличается от уравнения (8) наличием среднего члена в левой части, учитывающего поддерживающее действие находящегося под балкой участка мембраны вследствие искривления ее срединной поверхности. Расчеты показывают, что для имеющих место на практике соотношений параметров балок и свойств реальных грунтов значений упругих постоянных, влияние среднего члена в уравнении (9) оказывается весьма малым по сравнению с другими его членами. Это означает, что интегралы уравнений (8) и (9), полученные при решении одних и тех же задач, весьма мало различаются между собою. Такое различие, выявленное нами путем сравнения результатов решений ряда частных задач, не превышало 1,5 процента, что значительно ниже возмож-

ной погрешности исходных данных—упругих постоянных основания k и m . Следовательно, уточнение решений, получаемое путем интегрирования дифференциального уравнения (9) вместо уравнения (8), не имеет практической ценности, хотя оно и сопряжено с более сложными вычислениями.

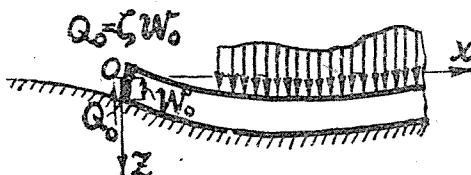
Таким образом, решение различных задач о расчете балок, опирающихся на упругое основание предлагаемой модели, сводится к интегрированию двухчленного дифференциального уравнения (8), решение которого хорошо разработано и широко известно в расчетной практике. Следовательно, замена модели Фусса-Винклера более точной моделью упругого основания не приводит к усложнению математических примеров решения и позволяет целиком использовать довольно богатый и совершенный расчетный арсенал теории, построенной на принятии гипотезы коэффициента постели. В этом состоит одно из существенных достоинств разрабатываемого способа. При этом решения по предлагаемому нами способу будут существенно отличаться от решений по способу коэффициента постели, так как в нашем случае обобщенная упругая характеристика дифференциального уравнения изгиба балки λ связана несколько иной зависимостью с двумя упругими постоянными основания, чем характеристика винклерового уравнения с коэффициентом постели.

7. Граничные условия

Интегрирование дифференциального уравнения (8) выполняется при граничных условиях, определяемых в каждом случае условиями задачи. Граничные условия для бесконечно длинной балки, а также для защемленных и шарнирно подпертых концов балок, лежащих на упругом основании, ничем не отличаются от аналогичных условий, имеющих место при решении по способу коэффициента постели. От них не отличается и одно из граничных условий на свободном конце балки, а именно, условие равенства нулю изгибающего момента, а следовательно, и второй производной прогибов

$$a) M(0) = -EIw''(0) = 0; w''(0) = 0.$$

Второе условие имеет некоторую особенность. Оно состоит в том, что вследствие осадки упругого основания за пределами балки поперечная сила на свободном конце не равна нулю, как было бы при решении по



Фиг. 9.

гипотезе Фусса-Винклера, а оказывается пропорциональной величине прогиба конца балки (фиг. 9). Напишем это условие отдельно для левого и правого концов балки.

На левом конце балки, при $x=0$ будем иметь:

$$b) [Q]_{x=0} = Q_0 = 2bm[w]_{x=0} = \zeta W_0 = -EJ[w''']_{x=0},$$

$$\left. \begin{aligned} \text{или } EJw'''(0) + \zeta w(0) &= 0; \text{ на правом конце балки при} \\ x=l \quad EJw'''(l) - \zeta w(l) &= 0. \text{ где } \zeta = 2bm. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Это необычное для решений по способу коэффициента постели граничное условие несколько усложняет решение балок конечной длины, концы которых свободны.

8. Расчет балок конечной длины, опирающихся на упругое основание

Так как расчет бесконечно длинных балок по предлагаемому способу формально ничем не отличается от расчета их по способу коэффициента постели, мы не будем здесь останавливаться на решении этой задачи, а перейдем сразу к расчету балок конечной длины.

Положив в основу решения задач об изгибе балок, лежащих на упругом основании принятой модели, дифференциальное уравнение (8), совершенно аналогичное уравнению способа коэффициента постели, мы получили возможность при построении решений пользоваться математическим аппаратом этого способа. Так, для расчета балок конечной длины мы будем пользоваться разработанным советскими учеными наиболее простым и доступным как с теоретической, так и прикладной стороны методом начальных параметров. По сравнению с другими методами он обладает тем преимуществом, что с его помощью можно решать любые задачи без интегрирования дифференциального уравнения балки на упругом основании, так как для определения всех расчетных величин по этому методу имеются готовые формулы:

$$\left. \begin{aligned} w &= W_0 Y_1 + \frac{\varphi_0}{\lambda} Y_2 - \frac{M_0}{EJ\lambda^2} Y_3 - \frac{Q_0}{EJ\lambda^3} Y_4 + \Phi(x), \\ \varphi &= w' = -4\lambda W_0 Y_4 + \varphi_0 Y_1 - \frac{M_0}{EJ\lambda} Y_2 - \frac{Q_0}{EJ\lambda^2} Y_3 + \Phi'(x), \\ M &= -EJw'' = 4EJ\lambda^2 W_0 Y_3 + 4EJ\lambda\varphi_0 Y_4 + M_0 Y_1 + \frac{Q_0}{\lambda} Y_2 - EJ\Phi''(x), \\ Q &= -EJw''' = 4EJ\lambda^3 W_0 Y_2 + 4EJ\lambda^2\varphi_0 Y_3 - 4\lambda M_0 Y_4 + Q_0 Y_1 - EJ\Phi'''(x). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Здесь Y_i ($i=1, 2, 3, 4$) — линейно независимые решения уравнения (8) — функции Н. П. Пузыревского — А. Н. Крылова, определяемые по формулам:

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= \operatorname{Ch} \lambda x \cdot \cos \lambda x, \\ Y_2 &= \frac{1}{2} (\operatorname{Ch} \lambda x \sin \lambda x + \operatorname{Sh} \lambda x \cdot \cos \lambda x), \\ Y_3 &= \frac{1}{2} \operatorname{Sh} \lambda x \cdot \sin \lambda x, \\ Y_4 &= \frac{1}{4} (\operatorname{Ch} \lambda x \cdot \sin \lambda x - \operatorname{Sh} \lambda x \cdot \cos \lambda x), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

W_0 , φ_0 , M_0 и Q_0 — начальные параметры — значения расчетных величин в начале координат, определяемые из граничных условий и $\Phi(x)$ — частное решение, зависящее от вида внешней нагрузки и определяемое точно так же, как при решении по способу коэффициента постели.

Поскольку граничные условия для балок с подпертыми и защемленными концами ничем не отличаются от условий, имеющих место при решении таких балок по способу коэффициента постели, то не представляет ничего нового и определение для них начальных параметров при решении поставленной нами задачи. Поэтому мы не будем здесь на ней останавливаться, а займемся решением балки со свободными концами, так как

оно несколько отличается от аналогичного решения по способу коэффициента постели.

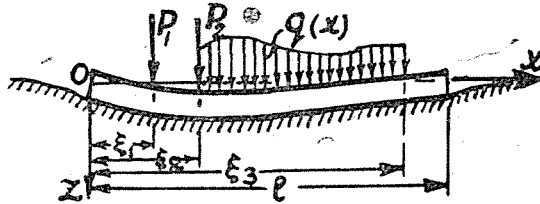
Пусть требуется рассчитать опирающуюся на упругое основание балку со свободными концами, нагруженную произвольной нагрузкой.

Приняв направление координатных осей, как показано на фиг. 10, и вспомнив сказанное в разделе 7 о граничных условиях для рассматриваемого случая, будем иметь:

$$\text{при } x=0 \quad [M_0]_{x=0}=0; \quad [Q_0]_{x=0}=\zeta[W_0]_{x=0}, \quad (13a)$$

$$\text{при } x=l \quad [M_l]_{x=l}=0; \quad [Q_l]_{x=l}=-\zeta[W_l]_{x=l}. \quad (13б)$$

Теперь для решения поставленной задачи воспользуемся формулами метода начальных параметров. Подставив в (11) начальные значения изги-



Фиг. 10.

бающих моментов и поперечных сил, определяемые граничными условиями на левом конце балки (13а), получим формулы для нахождения расчетных величин:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } w &= \left(Y_1 - \frac{\zeta Y_4}{EJ\lambda^3} \right) W_0 + \frac{\varphi_0}{\lambda} Y_2 + \Phi(x), \\ \text{б) } \varphi &= - \left(4\lambda Y_4 + \frac{\zeta Y_3}{EJ\lambda^2} \right) W_0 + \varphi_0 Y_1 + \Phi'(x), \\ \text{в) } M &= \left(4EJ\lambda^2 Y_3 + \frac{\zeta Y_2}{\lambda} \right) W_0 + 4EJ\lambda\varphi_0 Y_4 - EJ\Phi''(x), \\ \text{г) } Q &= (4EJ\lambda^3 Y_2 + \zeta Y_1) W_0 + 4EJ\lambda^2 \varphi_0 Y_3 - EJ\Phi'''(x) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Используя граничные условия на правом конце балки (13б), при помощи формул (а), (в) и (г) найдем величину прогиба W_0 и угла поворота сечения балки φ_0 в начале координат. Подставив найденные начальные значения W_0 и φ_0 в формулы (14), обратим эти последние в выражения для вычисления ординат эпюр расчетных величин.

При решении симметричных балок, несущих симметричную нагрузку, начало координат удобно помещать на середине балки, так как это даст некоторое упрощение решения, особенно в случае, когда $Q_0=0$.

9. Примеры расчета балок, опирающихся на упругое основание предлагаемой модели

1. Балка прямоугольного сечения указанных на фиг. 11 размеров опирается на упругое основание, характеризуемое постоянными: $k=500 \text{ т/м}^3$; $m=1500 \text{ т/м}^2$. Модуль упругости балки $E=3,5 \cdot 10^5 \text{ т/м}^2$. Требуется рассчитать ее на действие трех сосредоточенных сил, показанных на фиг. 11.

Найдем обобщенную упругую характеристику λ .

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{500 \cdot 1 + 1500}{2,3,5 \cdot 10^5 \cdot 0,1667}} = 0,3618 \text{ м}^{-1}.$$

Приняв начало координат по середине балки, будем иметь следующие граничные условия:

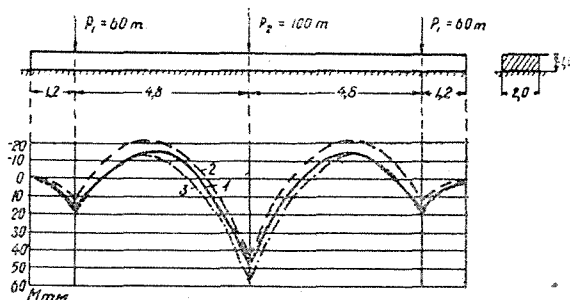
$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \quad [\varphi_0]_{x=0} &= 0, & [Q_0]_{x=0} &= -50 \text{ т}; \\ \text{при } x=l=12 \text{ м}; [M]_{x=l} &= 0, & [Q]_{x=l} &= -\zeta Wl, \\ \text{где } \zeta &= 2bm = 2,0 \cdot 1500 = 3000 \text{ т/м}. \end{aligned}$$

Приняв во внимание граничные условия, пользуясь формулами (10), составим уравнения для определения начальных параметров:

$$\begin{aligned} 4EJ\lambda^2 W_0 Y_3(\lambda l) + M_0 Y_1(\lambda l) + \frac{Q_0}{\lambda} Y_2(\lambda l) - \frac{P_2}{\lambda} Y_2[\lambda(l-\xi_1)] &= 0 \\ 4EJ\lambda^3 W_0 Y_2(\lambda l) - 4\lambda M_0 Y_4(\lambda l) + Q_0 Y_1(\lambda l) - P_2 Y_1[\lambda(l-\xi_1)] &= \\ = -\zeta \left\{ W_0 Y_1(\lambda l) - \frac{M_0}{EJ\lambda^2} Y_3(\lambda l) - \frac{Q_0}{EJ\lambda^3} Y_4(\lambda l) + \frac{P_2}{EJ\lambda^3} Y_4[\lambda(l-\xi_1)] \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим для упрощения записи $4EI/W_0 = \bar{W}_0$ и подставим в написанные уравнения вместо букв их цифровые значения¹⁾

Фиг. 11. Эпюры изгибающих моментов, построенные в результате расчета балки разными способами. Эпюра 1—по предлагаемому способу; 2—по способу коэффициента постели; 3—по способу упругого полупространства.



$$\begin{aligned} Y_1(\lambda l) &= Y_1(2,17) = -2,502; \quad Y_2(\lambda l) = 0,6129; \quad Y_3(\lambda l) = 1,785; \quad Y_4(\lambda l) = 1,525; \\ Y_1[\lambda(l-\xi)] &= Y_1(0,43) = 0,9943; \quad Y_2(0,43) = 0,4295; \quad Q_0 = -50 \text{ т}; \quad P_2 = 60 \text{ т}; \\ \lambda &= 0,3618 \text{ м}^{-1}. \end{aligned}$$

Сделав это, получим уравнения:

$$\begin{aligned} 0,23366 \bar{W}_0 - 2,502 M_0 - 155,93 &= 0, \\ -0,00314 \bar{W}_0 - 2,908 M_0 + 149,08 &= 0, \end{aligned}$$

решив которые, найдем следующие значения начальных параметров:

$$\begin{aligned} \bar{W}_0 &= 1202,3 \text{ тм}^3, \\ M_0 &= 49,96 \text{ тм}. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в формулы (11), получим уравнения расчетных величин. В частности, для изгибающих моментов уравнение будет:

$$M = 157,38 Y_3(\lambda x) + 49,96 Y_1(\lambda x) - 1,382 Y_2(\lambda x) - 165,84 Y_2[\lambda(x-\xi_1)].$$

Построенная по этому уравнению эпюра изгибающих моментов представлена на фиг. 11. Для сравнения там же нанесены эпюры изгибающих

¹⁾ Значения функций Н. П. Пузыревского—А. Н. Крылова взяты по таблицам, помещенным в книге инж. В. А. Киселева „Балки и рамы на упругом основании“, 1936.

моментов, полученные путем расчета этой же балки различными способами ¹⁾.

Сопоставление эпюр показывает, что величины изгибающих моментов, полученные по нашему способу расчета, оказываются промежуточными между величинами, полученными по способу коэффициента постели и теории упругого полупространства.

2. Железнодорожная шпала указанных на фиг. 12 размеров опирается на основание, характеризующееся упругими постоянными:

$$k = 240 \text{ м/м}^3, \quad m = 470 \text{ м/м}^2.$$

$$\text{Модуль упругости} \quad E = 10^6 \text{ м/м}^2, \quad J = \frac{bh^3}{6} = 8,533 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4.$$

Обобщенная упругая характеристика дифференциального уравнения изгиба будет

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{240 \cdot 0,125 + 470}{2 \cdot 10^6 \cdot 8,533 \cdot 10^{-5}}} = 1,308 \text{ м}^{-1}.$$

Приняв начало координат по середине балки, будем иметь следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \quad [\varphi_0]_{x=0} &= 0, & [Q_0]_{x=0} &= 0. \\ \text{при } x=l=1,35 \text{ м} \quad [M_l]_{x=l} &= 0, & [Q_l]_{x=l} &= -\zeta W_l, \\ \text{где } \zeta &= 2bm = 2 \cdot 0,125 \cdot 470 = 117,5 \text{ м/м}. \end{aligned}$$

Имея в виду эти граничные условия, пользуясь формулами (11), составим уравнения для определения начальных параметров M_0 и W_0 .

$$\begin{aligned} 4EJ\lambda^2 WY_3(\lambda l) + M_0 Y_1(\lambda l) - \frac{P_1}{\lambda} Y_2[\lambda(l - \xi_1)] &= 0, \\ 4EJ\lambda^3 W_0 Y_2(\lambda l) - 4\lambda M_0 Y_4(\lambda l) - P_1 Y_1[\lambda(l - \xi_1)] &= \\ = -\zeta \left\{ W_0 Y_1(\lambda l) - \frac{M_0 Y_3(\lambda l)}{EJ\lambda^2} + \frac{P_1}{EJ\lambda^3} Y_4[\lambda(l - \xi_1)] \right\}. \end{aligned}$$

Обозначив $4EJW_0 = \bar{W}_0$ и подставив в написанные уравнения вместо букв их цифровые значения:

$$\begin{aligned} Y_1(\lambda l) = Y_1(1,77) &= -0,5977; \quad Y_2(\lambda l) = 1,1984, \quad Y_3(\lambda l) = 1,3970; \\ Y_2[\lambda(l - \xi_1)] &= Y_2(0,77) = 0,7610, \quad Y_4(0,77) = 0,0760, \end{aligned}$$

получим уравнения

$$\begin{aligned} 2,3902 \bar{W}_0 - 0,5977 M_0 - 0,5818 P &= 0, \\ 2,4762 \bar{W}_0 - 5,7347 M_0 - 0,8948 P &= 0, \end{aligned}$$

решив которые, найдем следующие значения начальных параметров:

$$\begin{aligned} \bar{W}_0 &= 0,2291 P, \\ M_0 &= -0,05710 P. \end{aligned}$$

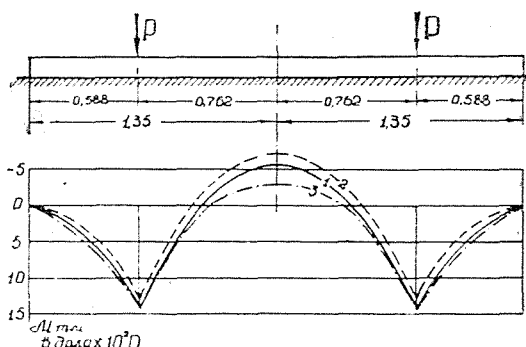
Подставив их в формулы (11), получим уравнения расчетных величин. В частности, для изгибающих моментов уравнение будет:

$$M = \{0,3920 Y_3(\lambda x) - 0,05710 Y_1(\lambda x) - 0,7645 Y_3[\lambda(x - \xi_1)]\} P.$$

¹⁾ Приведенные эпюры заимствованы нами из книги профессора П. П. Смиреникина „Основания и фундаменты в гражданском строительстве, ч. II, Фундаменты“, 1947. Здесь и в дальнейшем в основу сравнения положено равенство обобщенных упругих характеристик λ , вычисленных для рассматриваемой балки по нашему способу и способу коэффициента постели.

Построенная по этому уравнению эпюра изгибающих моментов представлена на фиг. 12. Для сравнения там же нанесены эпюры изгибающих моментов, полученные путем расчета железнодорожной шпалы по теории упругого полупространства ¹⁾ и способу коэффициента постели при $k_z = 4000 \text{ т/м}^3$.

Фиг. 12. Эпюры изгибающих моментов, построенные в результате расчета железнодорожной шпалы различными способами. Эпюра 1—по предлагаемому способу; 2—по способу коэффициента постели; 3—по способу упругого полупространства.



3. В заключение приведем результаты расчета балки, в первом случае загруженной по всей длине равномерно распределенной нагрузкой (фиг. 13), а во втором—нагрузкой, изменяющейся по линейному закону.

Упругие постоянные основания:

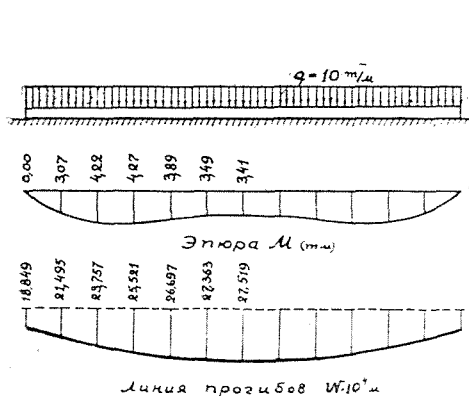
$$k = 500 \text{ т/м}^3, \quad m = 1500 \text{ т/м}^2.$$

Модуль упругости балки $E = 2.10^6 \text{ т/м}^2$, момент инерции $J = 0,03815 \text{ м}^4$, ширина подошвы балки $2b = 1,5 \text{ м}$.

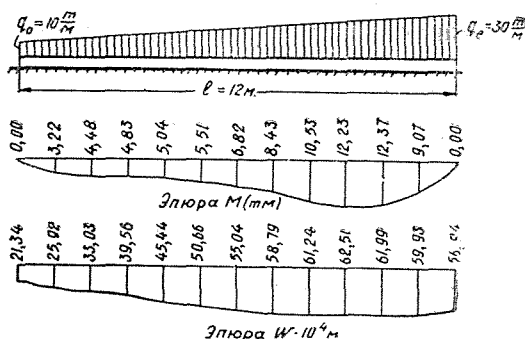
При расчете такой балки по способу коэффициента постели окажется, что в ней не возникает изгибающих моментов, а ее упругая линия представляет собою прямую, уравнение которой

$$W(x) = \frac{q(x)}{2b \cdot k_z}.$$

Другими словами, балка, сплошь загруженная распределенной по линейному закону нагрузкой, опирающаяся на основание Фусса-Винклера, оседает, не испытывая изгиба.



Фиг. 13.



Фиг. 14.

¹⁾ Заимствовано из книги В. И. Кузнецова, „Вопросы статического расчета верхнего строения пути“, 1940.

Если рассматриваемая балка опирается на упругое полупространство, то изгиб ее будет иметь место. Изгибается балка и в случае, если она опирается на принятое нами упругое основание, как это видно из эпюр, представленных на фиг. 13 и 14.

10. О расчете плит, опирающихся на упругое основание

Рассмотрев равновесие бесконечно малого элемента упругой тонкой плиты, вырезанного вдали от ее контура, получим дифференциальное уравнение срединной поверхности этой плиты, совершенно аналогичное уравнению, вытекающему из гипотезы коэффициента постели:

$$\nabla^2 \nabla^2 W(x, y) + \lambda^4 W = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (15)$$

где D — цилиндрическая жесткость плиты, $q(x, y)$ — приложенная к плите нагрузка и λ — обобщенная упругая характеристика плиты, определяемая по формуле

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{K}{D}} [m^{-1}].$$

К интегрированию уравнения (15) и сводится решение различных задач об изгибе плит, опирающихся на упругое основание принятого нами вида. Здесь, как и при решении балок, опирающихся на упругое основание, разница по сравнению с решениями по способу коэффициента постели будет состоять лишь в граничных условиях.

За исключением одного из условий на свободном краю плиты, интеграл уравнения (15) должен удовлетворять всем граничным условиям, имеющим место в теории тонких плит. Имеющее особенность граничное условие на свободном краю состоит в том, что поперечная сила, как и при расчете балок на упругом основании, не равна нулю, а оказывается пропорциональной прогибу свободного края плиты

$$[N_{nz}]_s = -m W_s. \quad (16)$$

Если s — контур плиты, а n — внешняя к нему нормаль, то, принимая во внимание значение поперечной силы на контуре (16), вместо известного комбинированного граничного условия на свободном краю тонких плит

$$N_{nz} + \frac{\partial H}{\partial S} = 0,$$

в рассматриваемом случае напомним условие

$$N_{nz} + \frac{\partial H}{\partial S} + m W_s = 0,$$

которое в развернутом виде переписывается так:

$$\frac{\partial^3 W_s}{\partial n^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 W_s}{\partial n \partial S^2} + m W_s = 0. \quad (17)$$

Удовлетворение этому условию и составляет единственное отличие решений по предлагаемому нами способу от решений по способу коэффициента постели. Разумеется, решение плит, не имеющих свободных краев, как и решение бесконечно больших плит, совершенно одинаково по обоим способам и приводит к одинаковым результатам.

Мы не имеем здесь возможности подробнее остановиться на расчете плит, опирающихся на упругое основание, поэтому ограничимся лишь сделанным указанием, отличающим наш расчет от расчета по способу коэффициента постели.

11. Общие выводы

1. Расчет балок на упругом основании по предлагаемому способу почти не требует внесения изменений в широко известный и довольно совершенный аппарат теории, основанной на гипотезе Фусса-Винклера.

2. Однако в нашем случае обобщенная упругая характеристика дифференциального уравнения изгиба балки λ и граничные условия на свободном конце отличаются от соответствующей характеристики и граничных условий способа коэффициента постели. Вследствие этого результаты расчетов по обоим способам могут существенно различаться между собою.

3. Это различие может привести как к преувеличению, так и уменьшению величин расчетных моментов. Как правило, расчеты по предлагаемому способу дают промежуточные значения экстремальных величин изгибающих моментов по сравнению с моментами, получаемыми при расчете по способу коэффициента постели и способу упругого полупространства.

Вообще расчет по нашему способу дает результаты, качественно совпадающие с аналогичными результатами, даваемыми решениями теории упругого полупространства.

4. Мы считаем, что для расчета фундаментных балок и плит, в основаниях которых ожидается умеренное и значительное развитие областей пластических деформаций, рациональнее пользоваться предлагаемым нами способом, нежели способом коэффициента постели. При расчете сооружений, в основаниях которых области пластических деформаций пренебрежимо малы, применение способа упругого полупространства дает результаты, ближе отвечающие действительности.

5. Предлагаемый нами способ нуждается еще в тщательной проверке на опытах, специально для этой цели поставленных. По результатам опытов должен быть накоплен статистический материал, позволяющий установить значения упругих постоянных k и m , свойственные часто встречающимся на практике грунтовым основаниям. Проведением этой работы мы намерены заняться в дальнейшем. Но и сейчас очевидно, что наш способ позволяет значительно лучше, чем способ коэффициента постели, отражать действительное напряженное состояние фундаментных балок и плит и решать значительно более широкий класс задач, встречающихся в инженерной практике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыбаков В. И. Осадки фундаментов сооружений, 1937.
2. Савинов О. А. Давление жесткого прямоугольного штампа на упругое основание. Труды НИС ЛО Треста глубинных работ, вып. 2, 1941.
3. Филоненко-Бородич М. М. Некоторые приближенные теории упругого основания. Ученые записки МГУ, вып. 46, 1940.
4. Хакимов Х. Р. Экспериментальные исследования деформаций оснований. Гидротехническое строительство, № 9, 1939.
5. Die Bautechnik H. 42, 1930.