

ТЕОРИЯ МЕТОДА НАИВЫГОДНЕЙШЕГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ НА ОДНУ ПЛОСКОСТЬ И ПРИЛОЖЕНИЕ ЕГО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Л. С. СКРИПОВ

Введение

Настоящая статья излагает метод наивыгоднейшего проектирования на одну плоскость, предложенный автором для более простого и быстрого решения метрических задач по курсу начертательной геометрии. Метод введен в курс лекции начертательной геометрии Томского политехнического института и не приводится ни в одном из существующих учебников.

Настоящая статья имеет целью устранить этот пробел и оказать помощь при изучении метода.

Метод наивыгоднейшего проектирования положен в основу прибора Аксонографа, созданного автором для механического построения аксонометрических изображений в 1940 году.

Теория начертательной геометрии предлагает три метода для решения метрических задач, а именно:

1. Метод вращения.
2. Метод совмещения.
3. Метод перемены плоскостей проекций.

С помощью этих методов решаются задачи на определение натуральных величин:

- 1) отрезков прямых линий,
- 2) площадей плоских фигур,
- 3) плоских и двугранных углов,
- 4) расстояния между точкой и прямой, между прямыми линиями, между точкой и плоскостью и между плоскостями.

Автор настоящей статьи предложил четвертый метод, преследующий те же цели, но дающий во многих случаях более простые и быстрые решения перечисленных задач, чем указанные выше три метода начертательной геометрии.

Метод назван автором методом наивыгоднейшего проектирования на одну плоскость потому, что в основу его положено проектирование искомого элемента на одну плоскость так, чтобы на этой плоскости и получить необходимый ответ.

Сущность метода состоит в следующем.

1. Представим себе первый октант (черт. 1) с расположенными в нем плоскостью Q — общего положения и точкой $A(a, a')$.

Если спроектировать ортогонально на плоскость Q данную точку $A(a, a')$, т. е. опустить из точки A перпендикуляр на плоскость Q , то точка a_1 , его встречи с плоскостью Q и будет искомой проекцией точки A . Если через перпендикуляр провести две плоскости R и T , перпендикулярные соответственно к плоскостям проекций H и V , то проведенные плоскости

пересекут плоскости H и V , дав следы R_n и T_v на плоскостях H и V и следы R_q и T_q на плоскости Q .

Следы R_n и R_q будут перпендикулярны к горизонтальному следу Q_n данной плоскости Q , как к ребру двугранного угла, образованного плоскостями H и Q . С другой стороны, след R_n должен совпадать с горизонтальной проекцией перпендикуляра Aa как след горизонтальной проектирующей плоскости R , проведенной через перпендикуляр Aa .

Следовательно, линии aa_q и R_q располагаются под углами 90° к следу Q_n (черт. 1).

Проводя аналогичное рассуждение относительно вертикально-проектирующей плоскости T , заключаем, что линия $a'a'_1$ (направление вертикальной проекции перпендикуляра Aa_1) и след T_q располагаются под углами 90° к вертикальному следу Q_v плоскости Q . Наконец, делаем заключение, что следы R_q и T_q обязательно пересекаются в точке a_1 —проекции точки A на плоскости Q .

Из сказанного вытекает простое правило для построения проекции a_1 точки A на плоскости Q :

Чтобы построить ортогональную проекцию точки A на плоскости Q , произвольно расположенной в пространстве, достаточно:

1. Из горизонтальной a и вертикальной a' проекций точки A опустить перпендикуляры на соответствующие следы Q_n и Q_v плоскости Q .

2. Из точек их встречи a_q и a'_1 со следами Q_n и Q_v продолжить проведение перпендикуляров уже на плоскости Q до их взаимного пересечения.

3. Полученная в пересечении точка a_1 и будет искомой проекцией точки A на плоскости Q .

Подобное построение проделано на эпилоре (черт. 2), на котором представлена плоскость общего положения $Q(Q_n, Q_v)$ и точка (a, a') . Проектируя точку A ортогонально на плоскость Q , проводим из проекций точки a и a' перпендикуляры на соответствующие следы Q_n и Q_v .

Отмечаем точки встречи их a_q и a'_1 со следами. Совмещаем далее плоскость Q с горизонтальной плоскостью H вращением около горизонтального следа Q_n по известному методу начертательной геометрии.

При таком совмещении вертикальный след займет положение Q_{v1} . Вместе с плоскостью Q совмещается с H и точка a'_1 , занимая положение a'_2 , получаемое в пересечении Q_{v1} с дугой окружности, проведенной из центра Q_x (точка схода следов), радиусом, равным $Q_x a'_1$. Продолжаем далее перпендикуляры по совмещенной плоскости из точек a_q и a'_2 до их взаимного пересечения в точке a_1 , которая и будет искомой проекцией точки A на эпилоре плоскостей Q и H .

Изложенное простое правило для проектирования точки следует положить в основу подобного проектирования линии, фигуры и тела.

Рассмотрим применение метода на ряде примеров, разрешаемых обычно одним из трех известных способов начертательной геометрии, и убедимся в простоте и быстроте получаемых результатов, доказывающих преимущество предлагаемого метода.

Пример 1. Определить натуральную величину треугольника ABC ($abc, a'b'c'$) (черт. 3).

Фигура треугольника может быть спроектирована в натуральную величину на плоскость Q , параллельную плоскости треугольника ABC . Для построения такой плоскости проводим в плоскости треугольника ABC горизонталь ($a1, a'1'$) и фронталь ($c2, c'2'$).

Из любой точки Q_x , взятой на оси OX , проводим следы Q_n и Q_v параллельно соответствующим проекциям горизонтали и фронтали треугольника.

Плоскость Q будет, как известно, параллельна плоскости треугольника ABC .

Проектируем ортогонально на плоскость Q вершины треугольника A, B, C по изложенному выше правилу предлагаемого метода.

Совместив плоскость Q с плоскостью H , строим проекции вершин треугольника на совмещенной плоскости Q , как это было выполнено на эюре (черт. 2).

Соединив полученные проекции a_1, b_1, c_1 вершин треугольника на плоскости Q (или, что все равно, на плоскости H) прямыми линиями, получим искомый ответ—натуральную величину $a_1b_1c_1$ треугольника ABC .

Пример 2. Определить натуральную величину двугранного угла пирамиды $SABC$ ($sabc, s'a'b'c'$) при ребре SC ($sc, s'c'$), (черт. 4).

Как известно, двугранный угол спроектируется в натуральную величину на плоскость Q , если плоскость Q будет расположена перпендикулярно к ребру заданного двугранного угла.

Взяв произвольную точку Q_x по оси OX , проводим через нее горизонтальный Q_h и вертикальный Q_v следы плоскости Q перпендикулярно к соответствующим проекциям sc и $s'c'$ ребра SC двугранного угла $ASCB$ данной пирамиды.

Опускаем перпендикуляры на построенные следы из соответствующих проекций вершин двугранного угла a, s, c, b и a', s', c', b' .

Отмечаем на следе Q_v точки встречи проведенных перпендикуляров—именно a'_1, b'_1, c'_1 .

Совмещаем плоскость Q с плоскостью H и находим совмещенное положение Q_{v1} вертикального следа Q_v .

Принадлежащие следу Q_v точки a'_1, b'_1, c'_1 переносим на Q_{v1} в точки a'_2, b'_2, c'_2 .

Продолжаем перпендикуляры на плоскости Q из полученных точек до пересечения их с перпендикулярами к следу Q_h , проведенными из горизонтальных проекций вершин пирамиды s, a, b, c . Отмечаем точки пересечения одноименных перпендикуляров a_1, s_1, c_1, b_1 и соединяем их прямыми линиями. Замечаем, что ребро SC спроектировалось в одну точку $s_1(c_1)$, грани ASC и BSC —в прямые линии, а искомый двугранный угол $ASCB$ —в угол $a_1s_1c_1b_1 = \alpha$, выражающий натуральную величину искомого угла.

Пример 3. Определить величину двугранного угла R_xMNS_x , образованного двумя пересекающимися плоскостями R и S (черт. 5).

Плоскости R и S , пересекаясь по линии MN , образуют двугранный угол R_xMNS_x с ребром по линии MN ($mn, m'n'$) и гранями R_xMN и S_xMN .

Двугранный угол R_xMNS_x спроектируется в натуральную величину на плоскость Q , если плоскость Q будет перпендикулярна к ребру MN данного угла.

В силу этого из произвольной точки на оси OX проводим следы Q_h и Q_v плоскости Q , перпендикулярные к соответствующим проекциям ребра MN , а именно $Q_h \perp mn, Q_v \perp m'n'$. Проектируем на построенную плоскость Q точки $R_x(m, m')$, $S_x(n, n')$. S_x , опуская перпендикуляры на соответствующие следы, например, из R_x на Q_h и Q_v (точка R_{x1}).

Совмещаем плоскость Q с плоскостью H и строим совмещенный след Q_{v1} на который и сносим все точки концов перпендикуляров, получая точки $R_{x2}, m'_2, n'_2, S_{x2}$.

Из полученных точек продолжаем перпендикуляры по плоскости Q (или, что все равно, по плоскости H) до пересечения с соответствующими, проведенными из горизонтальных проекций тех же точек к горизонтальному следу Q_h .

Отмечаем точки R_{x3}, m_1, n_1, S_{x3} пересечения их, которые соединяем прямыми линиями, замечая, что ребродвугранного угла ($mn, m'n'$) спроек-

тировалось в точку (m_1, n_1) , а грани $R_x M N$ и $S_x MN$ —в прямые линии $R_{x3} m_1(n_1)$ и $S_{x3} m_1(n_1)$.

Таким образом, двугранный угол спроектировался на плоскости Q в натуральную величину в виде линейного угла $R_{x3} m_1(n_1) S_{x3} = \alpha^\circ$.

Пример 4. Определить расстояние точки $D(d, d')$ до прямой $AB(ab, a'b')$ (черт. 6).

Расстояние точки до прямой определяется длиной перпендикуляра, опущенного из точки на прямую. Для решения задачи проектируем прямую $(ab, a'b')$ и точку (d, d') на плоскость $Q(Q_n, Q_v)$, перпендикулярную к данной прямой $(ab, a'b')$, в результате чего точка D и прямая AB спроектируются в точки d_1 и a_1 .

Расстояние $d_1 a_1$ между найденными проекциями и будет расстоянием между точкой и прямой в натуральную величину. Все построения ясны из черт. 6.

Пример 5. Определить расстояние точки $D(d, d')$ до плоского треугольника $ABC(abc, a'b'c')$, (черт. 7).

Для определения искомого расстояния достаточно опустить из точки D перпендикуляр на плоскость треугольника ABC и найти точку встречи его с плоскостью треугольника.

Для решения поставленной задачи строим плоскость $Q(Q_n, Q_v)$, перпендикулярную к плоскости треугольника $(abc, a'b'c')$.

Выбираем на оси OX произвольную точку Q_x , через которую проводим два следа плоскости Q_n и Q_v перпендикулярно к одной (любой) из сторон треугольника, например $(bc, b'c')$.

Такое положение плоскости Q должно быть выбрано для того, чтобы плоский треугольник спроектировался на нее в одну прямую линию, как на плоскость ему перпендикулярную.

Проектируем точку D и вершины треугольника ABC на построенную плоскость Q , опуская перпендикуляры на следы Q_n и Q_v из соответствующих проекций точек d, a, b, c и d', a', b', c' .

Отмечаем точки встречи перпендикуляров со следом Q_v — $d_1^1, a_1^1, b_1^1, c_1^1$.

Совмещаем затем плоскость Q с плоскостью H , находим совмещенное положение вертикального следа Q_{v1} , на которое и переносим найденные точки концов перпендикуляров, получая точки d_2', a_2', b_2', c_2' .

Из найденных точек продолжаем перпендикуляры по плоскости Q под углом 90° к Q_{v1} , до встречи с одноименными перпендикулярами, проведенными из горизонтальных проекций тех же точек к следу Q_n .

Отмечаем точки пересечения d_1, a_1, b_1, c_1 и замечаем, что точки b_1 и c_1 сливаются в одну (b_1, c_1) .

Соединяем полученные проекции вершин треугольника a_1, b_1, c_1 прямыми линиями и получаем проекцию данного треугольника в виде прямой линии $a_1 b_1(c_1)$, что и следовало ожидать по условиям выбора плоскости проекций Q .

Опускаем далее перпендикуляр из точки d_1 на проекцию треугольника $a_1 b_1 c_1$ и отмечаем точку его встречи k с плоскостью треугольника. Отрезок перпендикуляра $d_1 k$ и будет искомым расстоянием точки D до плоскости треугольника ABC .

Пример 6. Определить расстояние точки $A(a, a')$ до плоскости Q , заданной следами Q_n, Q_v , (черт. 8).

Расстояние точки до плоскости определяется длиной перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость Q .

Проводим через данную точку (a, a') горизонтально проектирующую плоскость (R_n, R_v) , одновременно перпендикулярную и к данной плоскости (Q_n, Q_v) .

Проектируем на выбранную плоскость R данную точку A и плоскость Q .

При таком выборе плоскости R плоскость Q спроектируется на R в виде прямой линии в силу их взаимной перпендикулярности.

Опускаем перпендикуляр из точки a' на след R_v и отмечаем точку его встречи a_1' со следом. Отмечаем также точки пересечения одноименных следов: m —пересечения следов R_n и Q_n , n' —пересечения следов R_v и Q_v .

Совмещаем затем плоскость R с плоскостью H вращением около следа R_n , определяем совмещенное положение следа R_{v_1} вместе с точками на нем a_2' и n_1' . Из точки a_2' продолжаем перпендикуляр к R_{v_1} до встречи его с одноименным перпендикуляром, проведенным из точки a к следу R_n , и отмечаем точку их встречи a_1 как проекцию точки A на выбранной плоскости R .

Точку n_1' соединяем с точкой m , оставшейся неподвижной, и получаем проекцию (след) плоскости Q на плоскости R .

Опускаем из точки a_1 перпендикуляр на линию (след) mn_1' и отмечаем точку k встречи его с линией mn' (с плоскостью Q).

Отрезок перпендикуляра a_1k и будет искомой величиной расстояния точки A до плоскости Q .

Пример 7. Определить расстояние между двумя параллельными прямыми AB и CD (черт. 9).

Для определения расстояния между данными прямыми спроектируем их на плоскость Q , перпендикулярную к ним, в силу чего прямые спроектируются в точки, а расстояние между ними—в натуральную величину.

Порядок решения задач и ход построения ясен из черт. 9 и не нуждается в особых пояснениях.

Пример 8. Определить кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми AB и CD (черт. 10).

Кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми измеряется длиной перпендикуляра к обоим прямым.

Для решения задачи достаточно спроектировать обе прямые AB и CD на плоскость Q , перпендикулярную к одной из прямых, например, AB .

При таком расположении плоскости Q прямая AB спроектируется на нее в точку $(a_1—b_1)$, а другая прямая CD —в некоторую прямую c_1d_1 . Теперь достаточно из точки $(a_1—b_1)$ опустить перпендикуляр на проекцию прямой c_1d_1 , отметить точку встречи k с прямой c_1d_1 и отрезок $a_1(b_1)k$ определит в натуральную величину кратчайшее расстояние между прямыми. Прямая $a_1(b_1)k$ будет именно искомым перпендикуляром потому, что она оказывается параллельной плоскости Q , как сторона прямого угла, образованного с прямой a_1b_1 , а следовательно, даст прямой угол в точке k с другой прямой c_1d_1 .

Подробности построения ясны из черт. 10.

Пример 9. Определить расстояние между двумя параллельными плоскостями Q и R , заданными следами (Q_n, Q_v) и (R_n, R_v) (черт. 11).

Расстояние между параллельными плоскостями определяется длиной перпендикуляра, опущенного из точки, взятой на одной плоскости, до точки встречи этого перпендикуляра с другой плоскостью.

Для решения задачи спроектируем данные плоскости (Q_n, Q_v) и (R_n, R_v) на плоскость $T(T_n, T_v)$, перпендикулярную к данным плоскостям и к плоскости проекций H .

Отмечаем точки пересечения одноименных следов m (следов Q_n и T_n), m_1 (следов R_n и T_n), n_1 (следов Q_v и T_v), n_1' (следов R_v и T_v).

Совмещаем затем плоскость T с плоскостью H , строим совмещенный след T_{v_1} вместе с точками на нем n_2' и n_3' , которые и соединяем соответственно с неподвижными точками m и m_1 прямыми линиями.

Полученные прямые mn_2' и m_1n_3' являются проекциями плоскости Q (следами) на выбранной плоскости T .

Взяв произвольную точку k на линии mn_2' и опустив из нее перпендикуляр на линию mn_3' в точку p , найдем искомое расстояние между плоскостями Q и R в натуральную величину, равную kp .

Пример 10. Повернуть данную точку k около оси AB , произвольно расположенной в пространстве, до положения k_3 , находящегося на данном расстоянии E от вертикальной плоскости проекций V (черт. 12).

Для решения задачи строим вспомогательную плоскость $Q(Q_n, Q_v)$, проходящую через данную точку $K(k, k')$ и в то же время перпендикулярную к заданной оси вращения $AB(ab, a'b')$.

Проектируем на выбранную плоскость Q данную точку (k, k') и ось вращения $(ab, a'b')$, в результате чего имеем две точки $(a_1 - b_1)$ и k_1 .

Вращаем точку k_1 около точки $(a_1 - b_1)$, как около центра, в направлении стрелки (черт. 12) до положения k_2 на фронте плоскости Q , проведенной на расстоянии $E(e)$ от плоскости V . Затем возвращаем плоскость Q в прежнее положение (Q_n, Q_v) , точка k_2 переместится в направлении перпендикулярном к следу Q_n в точку k_3 , расположенную на горизонтальной проекции заданной фронте.

Вертикальная проекция точки k_3' найдется на вертикальной проекции фронте.

Решение подобной задачи другими методами начертательной геометрии получается более сложным.

Пример 11. Повернуть данную точку K около оси AB , произвольно расположенной в пространстве, до положения K_3 , находящегося на данном расстоянии D от горизонтальной плоскости проекций H (черт. 13).

Порядок решения задачи аналогичен решению предыдущего примера с той только разницей, что вращение точки производится до совпадения ее с горизонталью плоскости Q , проведенной на данном расстоянии $D(d')$ от плоскости проекции H . Подробности произведенного построения ясны из черт. 13.

Пример 12. Повернуть отрезок прямой линии AB около заданной оси JJ , произвольно расположенной в пространстве на заданный угол α_0° (черт. 14).

Предположим, что ось вращения JJ проходит через точку A прямой AB .

Проводим плоскость $Q(Q_n, Q_v)$, перпендикулярную к направлению оси вращения JJ и проходящую через точку B .

Проектируем на выбранную плоскость Q_n ось JJ и прямую AB .

Получаем на плоскости Q спроектированными ось JJ и точку $A(a, a')$, слившимися в одну точку a_1, i_1, i_1 , а точку $B(b, b')$ в точку b_1 .

Прямая AB спроектировалась на плоскость Q в виде отрезка a_1b_1 .

Поворачиваем отрезок a_1b_1 на угол α_0° , равный заданному углу поворота, по направлению стрелки, около точки a_1, i_1, i_1 , как центра вращения, в силу чего точка b_1 переместится в положение b_2 . Для нахождения нового положения точки B после поворота на угол α_0° на первоначальном эюре, возвращаем плоскость Q в исходное положение. Точка b_2 при этом также переместится в новое положение b_3 , располагаясь на соответствующей горизонтали b_2n_1' , проведенной через точку b_2 и занявшей положение $b_3, n, b_3'n'$ в первоначальном положении плоскости Q .

При таком повороте точка b_2 перемещается по линии b_2b_3 , перпендикулярной к горизонтальному следу Q_n .

Проекция угла поворота будут α и $\alpha' (< b_0, b_3, b_0' b_3')$, где (O_1, O_1') точка встречи оси вращения $JJ(i, i')$ с плоскостью Q .

Пример 13. Построить основание прямого кругового конуса при заданной высоте его $SO(so, s'o')$ (черт. 15).

Строим плоскость $Q(Q_n, Q_v)$, проходящую через основание высоты конуса $O(o, o')$ и перпендикулярную к высоте конуса $(so, s'o')$.

Совмещаем плоскость Q с плоскостью проекций H и находим проекции

совмещенного центра O_1 , около которого описываем окружность данного радиуса, как натуральную величину основания кругового прямого конуса.

Делим окружность на равные части, например 12, через точки деления проводим горизонталы и перпендикуляры к совмещенному положению вертикального следа Q_v , плоскости Q .

Возвращаем плоскость Q в первоначальное положение, проводим в ней построенные горизонталы и перпендикуляры к первоначальному положению следа Q_v через те же точки.

Отмечаем точки пересечения вертикальных проекций горизонталей с перпендикулярами к Q_v —1', 2', 3', 4', 5', 6', 7', 8', 9', 10', 11', 12', которые и соединяем плавной кривой, получая эллипс, как вертикальную проекцию основания конуса.

Отмечаем далее точки пересечения горизонтальных проекций горизонталей с перпендикулярами к следу Q_n , проведенными из тех же точек деления круга 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Соединяем найденные точки плавной кривой, получая горизонтальную проекцию (эллипс) основания конуса.

Пример 14. Построить аксонометрическое изображение призматического тела, данного в ортогональных проекциях на черт. 16.

Построение аксонометрических проекций с любыми, наперед заданными коэффициентами искажения, выбор направления проектирования, расположение аксонометрических осей при заданных коэффициентах разобрано подробно в работе автора „Акснограф“ (прибор для механического построения аксонометрических изображений механическим путем по двум ортогональным проекциям тела).

В указанной работе дана теория прибора, с помощью которого построение аксонометрических проекций ускоряется до 5 раз сравнительно с обычным построением.

Описание и пользование прибором изложено в библиотечке ТЭХСО за № 939/21—1942, серия 26. В настоящей статье дается только пример построения аксонометрических изображений на произвольно выбранной плоскости Q .

Построение такого изображения ясно из черт. 16, на котором представлены две проекции угольника. Из всех точек данного тела проведены проектирующие лучи ортогонально к плоскости Q , как и в предыдущих примерах.

Проекция точек на плоскости Q получены в виде точек пересечения перпендикуляров к соответствующим следам, опущенных из точек данных проекций тела.

Построение аксонометрического изображения тела легко уясняется при рассмотрении черт. 16 на примере построения проекций точек 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Соединяя полученные проекции точек прямыми линиями, получаем искомую аксонометрическую проекцию тела на плоскости Q .

Пример 15. Построить аксонометрическую проекцию тела произвольного очертания (черт 17).

В случае тела произвольного очертания, например, цилиндрической формы с ребрами, построение аксонометрического изображения производится по точкам, взятым в достаточном количестве на ортогональных проекциях тела. На черт. 17 показано подробно построение аксонометрии окружности основания цилиндра.

Для этой цели взят ряд точек на круге и по правилам, нам уже известным, спроектирован на произвольно взятую плоскость Q .

Проекция точек на плоскости Q затем соединяем плавной кривой дающей эллипс, как аксонометрическую проекцию круга.

Интересующихся теорией и подробностями построения таких изображений отсылаем к упомянутому выше труду автора—Акснограф.

Пример 16. Построить собственную тень на шаре при заданном направлении лучей света $S(s, s')$ (черт. 18).

Для построения собственной тени на шаре при данном направлении лучей света (s, s') строится плоскость $Q(Q_n, Q_v)$, перпендикулярная к направлению лучей, на которую проектируется центр данного шара (o_1, o_1') в точку o_2 .

Около точки o_2 описывается окружность радиусом данного шара, которая и будет проекцией линии на эюре, разделяющей освещенную половину шара от неосвещенной, иначе линию касания проектирующего цилиндра к поверхности шара.

Разделим окружность на несколько равных частей, например 12, и переносим полученные точки на проекции шара.

Среди взятых точек необходимо иметь точки 1 и 7, на концах диаметра круга, параллельного вертикальному следу Q_{v1} , как дающие крайние верхнюю и нижнюю переходные точки тени вертикальной проекции шара. Точно так же точки 3 и 9 на диаметре окружности, параллельном горизонтальному следу плоскости Q_n , как дающие крайние левую и правую переходные точки на горизонтальной проекции контура шара.

Имея в виду, что контур тени на шаре будет изображаться на проекциях в виде эллипсов, можно, кроме найденных четырех характерных точек 1, 1', 3, 3', 7, 7', 9, 9', легко отметить на проекциях шара симметричные, а именно точки 11, 11', 5, 5'.

Найденных точек уже достаточно для построения контуров эллипсов теневой линии.

Если желательно определить и малые диаметры теневых эллипсов, то можно прибегнуть к построению дополнительной плоскости R , которую рекомендуем провести как горизонтально проектирующую и на нее спроектировать шар в виде окружности диаметра $6', 12'$, равного диаметру данного шара с центром в точке o_2 .

На плоскости R следует спроектировать также и направление светового луча в s_1' и параллельно ему провести касательные линии к окружности $6_1'$ и $12_1'$ в точках $6_1'$ и $12_1'$, которые затем перенести на горизонтальную проекцию шара в точки 6 и 12 пересечения с продолжением линии 6_1 и 12_1 , параллельной направлению горизонтальной проекции луча s . Подобным же образом находим точки 4' и 10' по вертикальной проекции теневых эллипсов.

В случае необходимости получить еще ряд точек очертания теневых эллипсов, следует рассечь шар рядом горизонтально проектирующих плоскостей, проходящих через намеченные ранее точки на окружности плоскости Q . Спроектировать окружности, получившиеся от таких сечений шара, на плоскость R , провести к ним касательные линии параллельно направлению s_1' , а точки касания перенести на горизонтальную и вертикальную проекции шара, как показано на черт. 18.

Пример 17. Построить линию пересечения призмы $DEFD_1E_1F_1$ и пирамиды $SABC$ (черт. 19).

Для решения поставленной задачи строим плоскость $Q(Q_n, Q_v)$, перпендикулярную к ребрам призмы $DEFD_1E_1F_1$.

Точку схода Q_x следов можно взять произвольно на оси OX .

Проектируем данную призму и пирамиду на выбранную плоскость Q и получаем проекцию призмы в виде треугольника $d_2e_2f_2$ и пирамиды в виде фигуры $s_1a_1b_1c_1$.

Отмечаем на полученных фигурах точки входа и выхода ребер пирамиды в теле призмы:

- у ребра s_1a_1 — точки 1, и 2₁,
- у ребра s_1b_1 — точки 3₁ и 4₁,
- у ребра s_1c_1 — точки 5₁ и 6₁.

Переносим найденные точки на горизонтальную проекцию пирамиды в точки 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Далее замечаем по проекциям тел на плоскости Q , что ребро призмы DD (точка d_2) пересекает грани пирамиды $SAB(s_1a_1b_1)$ и $SAC(s_1a_1c_1)$. Для нахождения точек встречи ребра DD_1 с указанными гранями пирамиды продолжаем плоскость грани призмы DD_1E_1E до пересечения с ребром пирамиды s_1a_1 в точке 7, что выполнено на плоскости Q .

Переносим полученную точку на горизонтальную проекцию ребра sa и соединяем точку 7 с точками 3 и 5 ребер sa, sc , получая, таким образом, линии пересечения грани призмы DD_1E_1E с гранями пирамиды SAB и SAC — 37 и 57.

Отмечаем на этих линиях точки 8 и 9 встречи ребра со сторонами 37 и 57 фигуры сечения, которые и будут искомыми точками входа и выхода ребра призмы DD_1 в гранях пирамиды.

Теперь соединяем по общеизвестным правилам полученные точки входа и выхода ребер каждого тела на гранях другого и получаем две замкнутые фигуры линий пересечения тел 2—4—6 и 1—8—3—5—9.

Остается найденные точки перенести на вертикальные проекции фигур и получить очерки 2'—4'—6' и 1'—8'—3'—5'—9', линии пересечения на плоскости V .

Пример 18. Построить линию пересечения конуса и цилиндра, заданных своими проекциями на плоскостях H и V (черт. 20).

Как и в предыдущем примере, строим вспомогательную плоскость $Q(Q_H, Q_V)$, располагая ее перпендикулярно к оси цилиндра O_1O_2 . На плоскость Q проектируем цилиндр и конус, получая проекцию цилиндра в виде эллипса $r_1 m_1 u_1 q_1 t_1 g_1 n_1$, проекцию круга основания конуса в виде эллипса $a_1 k_1 d_1 f_1 c_1 l_1 b_1 e_1$ и проекцию вершины конуса в виде точки s_1 .

Для построения линии пересечения поверхностей цилиндра и конуса проводим на новой проекции конуса ряд образующих и пересекающих фигуру эллипса $r_1 m_1 u_1 q_1 t_1 g_1 n_1$.

Переносим затем эти образующие на горизонтальную проекцию конуса, например образующие $s_1 l_0, s_1 b_1, s_1 l_1, s_1 c_1, s_1 f_1, s_1 d_1, s_1 k_1$, причем обязательно следует брать образующие на конусе, касательные к контуру проекции цилиндра на плоскости Q , как например, образующую $s_1 t_0$, касающуюся эллипса $r_1 m_1 u_1 q_1 t_1 g_1 n_1$ в точке l_1 .

Точка 1 важна потому, что в ней должен произойти поворот кривой линии пересечения (точка 1—на горизонтальной проекции конуса).

Далее точки 1 образующих на конусе проводить не следует, так как они не пересекают уже тела цилиндра.

Таким образом найдены точки входа и выхода ряда образующих конуса на поверхности цилиндра, например, 1₁—2₁—3₁ и т. д., которые затем перенесены на соответствующие образующие конуса на горизонтальной проекции, а после уже и на вертикальную проекцию.

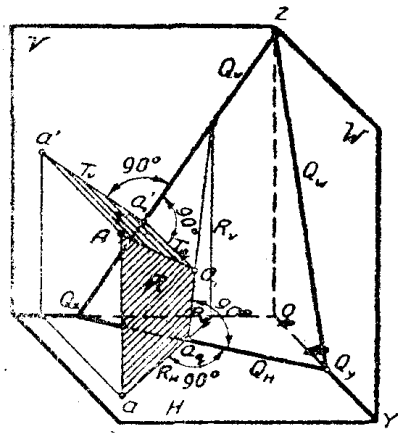
Полученные точки соединены плавной кривой с учетом ее видимости и в предположении, что цилиндр остается неповрежденным.

Применение метода наимыгоднейшего проектирования на одну плоскость значительно упрощает построение линий пересечения тел во многих случаях практики.

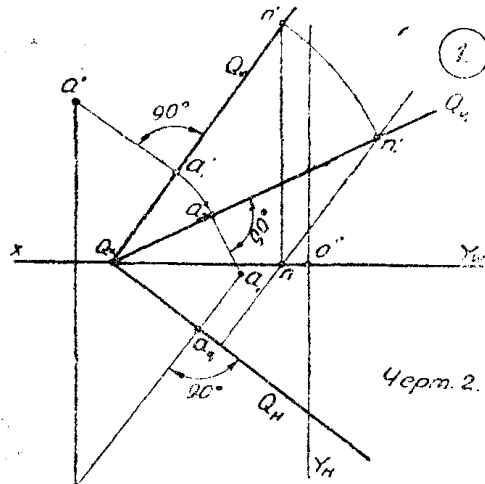
Приведенных примеров вполне достаточно, чтобы можно было судить о положительных сторонах предложенного метода, имеющего преимущества перед существующими до сих пор в теории начертательной геометрии.

Остается только предложенный метод применить к решению и других задач, не разобранных еще в настоящей статье и исследовать его выгоду более широко.

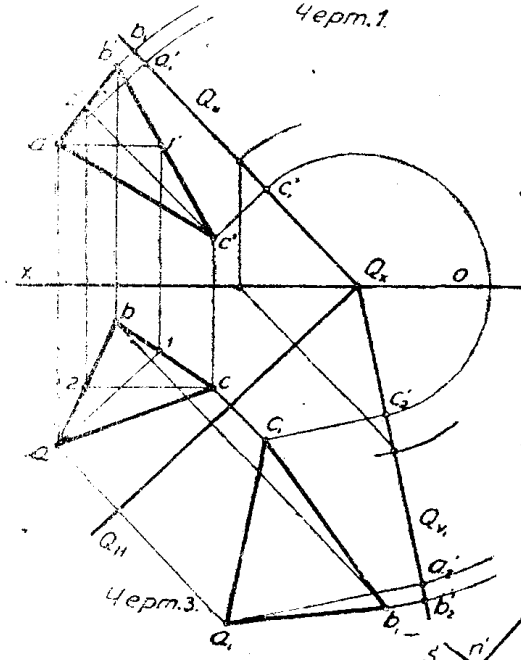
Таблица I



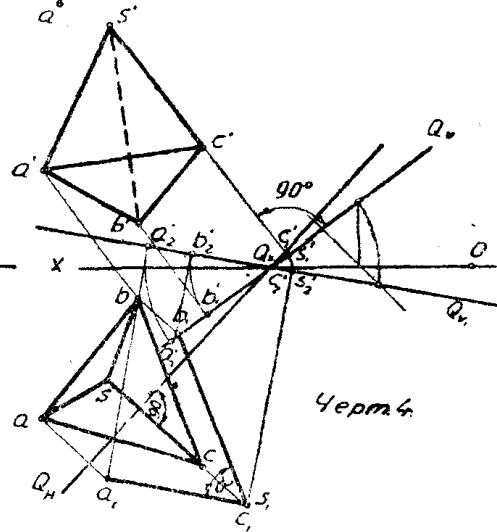
Черт.1



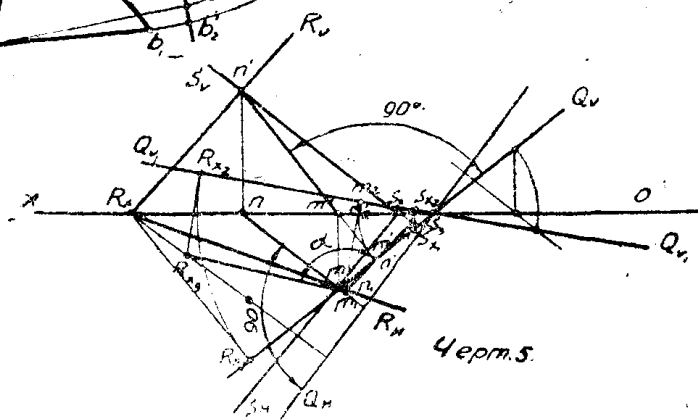
Черт.2



Черт.3



Черт.4



Черт.5

Таблица 11

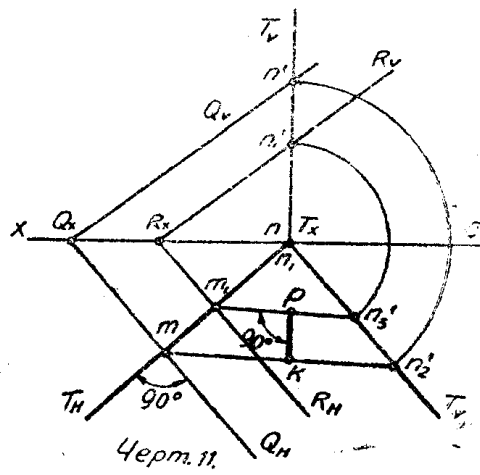
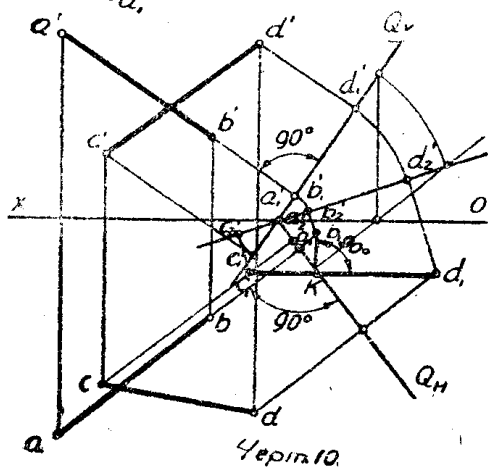
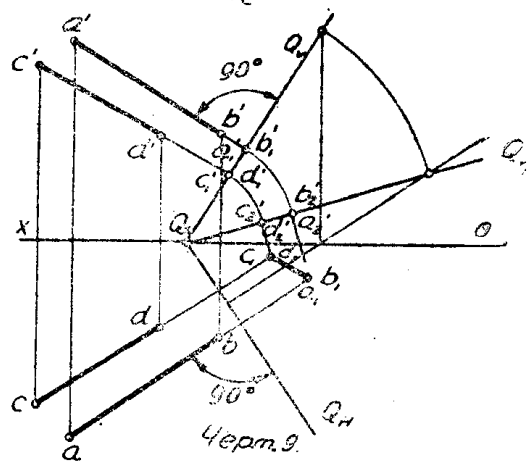
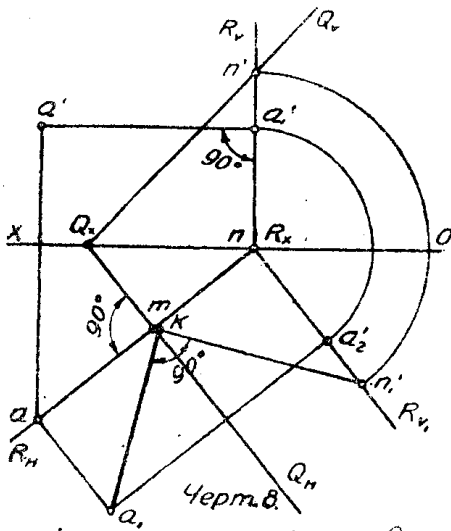
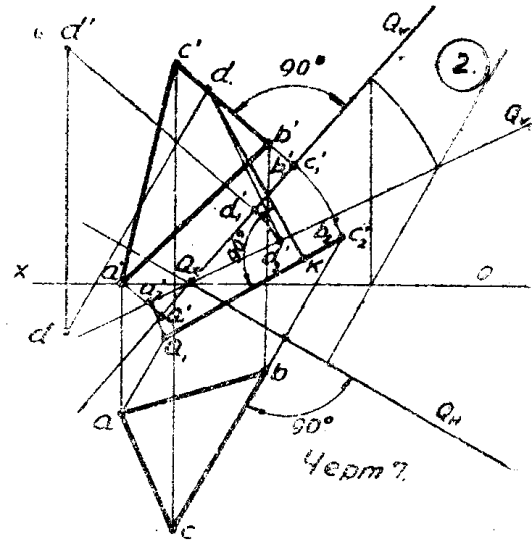
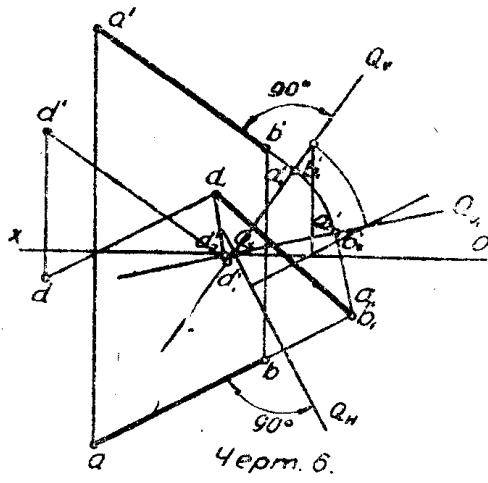


Таблица III

3

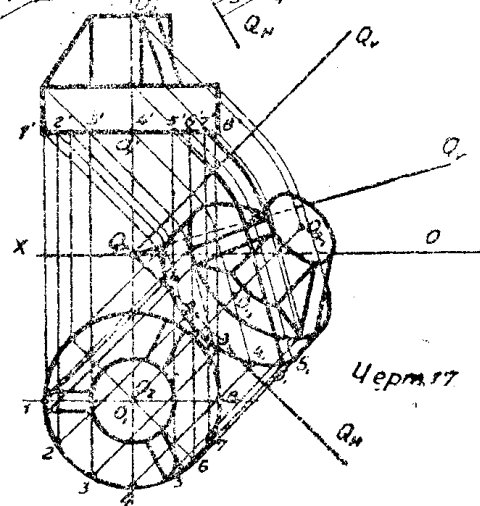
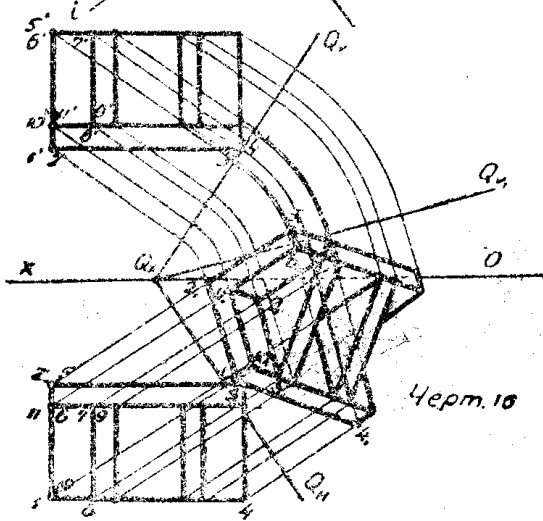
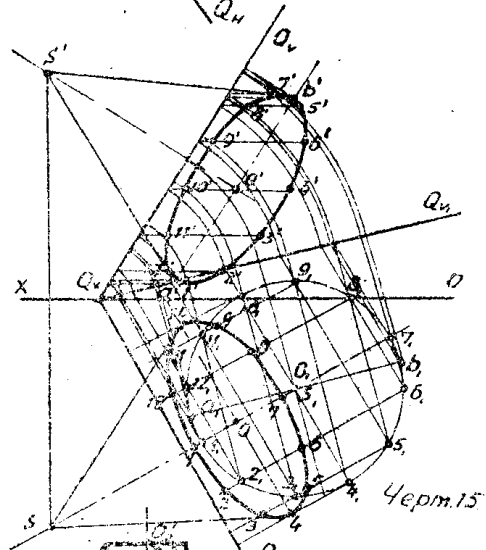
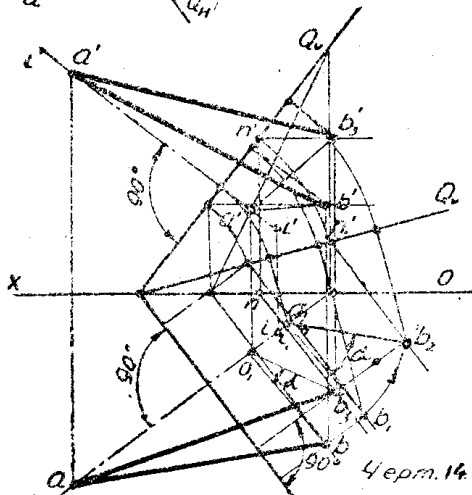
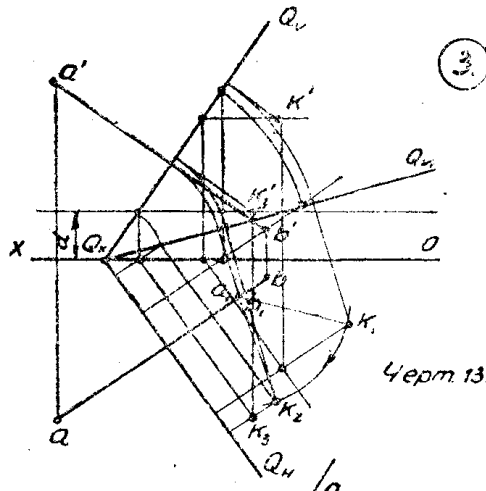
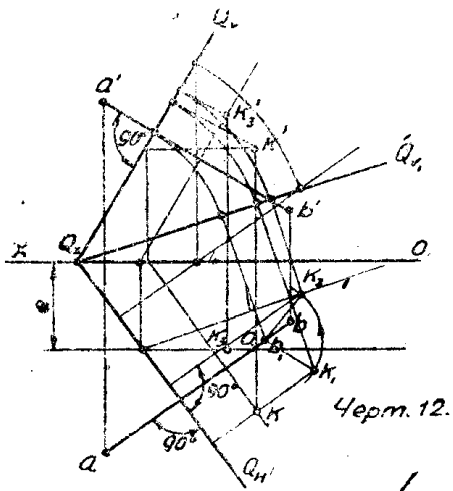
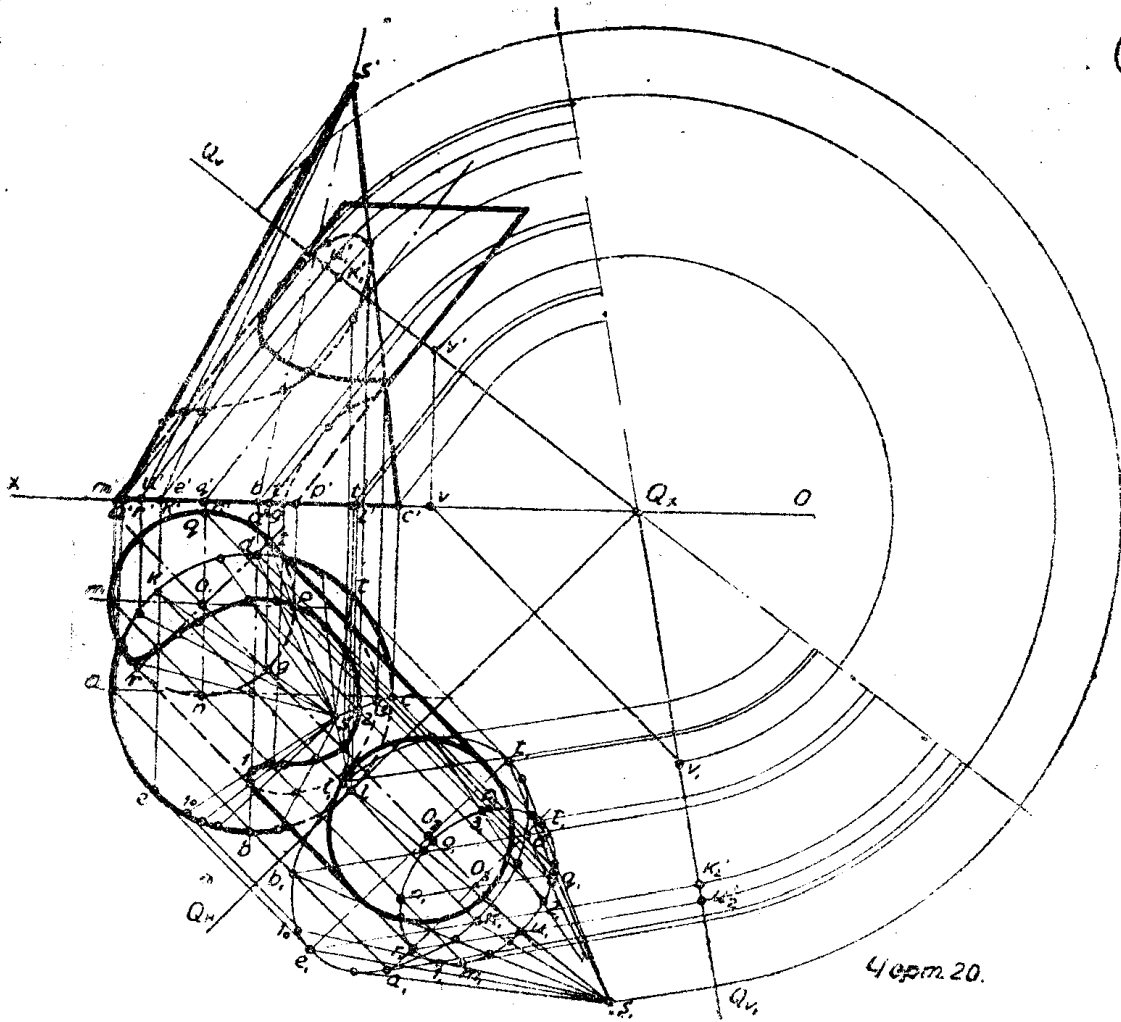


Таблица V

5



Черт. 20.