

К ВОПРОСУ ОБОСНОВАНИЯ СПОСОБА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ.

В. С. НУВАРЬЕВ.

Современный метод согласования многочисленных наблюдений впервые был опубликован Лежандром в небольшом исследовании в 1806 году. Этот метод, названный Лежандром способом наименьших квадратов, был предложен им без доказательства.

Гаусс, который применял этот метод с 1795 года, впервые дал обоснование этого способа в 1809 году. Однако, его первое доказательство имело тот недостаток, что оно было основано на требовании наибольшей вероятности системы поправок, а не каждой из них.

Совершенно иные начала были положены Лапласом в основу его доказательства, предложенного им в 1811 году. Общий принцип доказательства Лапласа, использованный затем Гауссом во втором доказательстве способа наименьших квадратов, заключается в следующем: пусть из очень большого количества уравнений ошибок вида:

$$\varepsilon_i = -l_i + a_i X + b_i Y + c_i Z + \dots (i = 1, 2, \dots, n) \quad (a)$$

требуется определить наивыгоднейшие оценки m ($m < n$) искомым $x, y, z, \dots$.

Умножим каждое уравнение ошибок на некоторые положительные или отрицательные числа α_i , образуем сумму:

$$[\alpha\varepsilon] = -[\alpha l] + [\alpha a]X + [\alpha b]Y + [\alpha c]Z + \dots$$

и подчиним n множителей α_i m условным уравнениям:

$$[\alpha a] = 1, [\alpha b] = 0, [\alpha c] = 0, \dots \quad (b)$$

Тогда истинное значение равно

$$X = [\alpha l] + [\alpha\varepsilon], \quad (c)$$

где l_i — измеренные значения L_i , а ε_i — истинные ошибки этих измерений.

Если положить $[\alpha\varepsilon]$ равной нулю, то приближенное значение искомого определится из уравнения

$$x = [\alpha l] \quad (d)$$

с ошибкой

$$u = [\alpha\varepsilon].$$

Из всех возможных определений наилучшим будет то значение, для которого u^2 — наименьшая ($[u] = \min$. — по Лапласу). Эти требования приводят для неравноточных наблюдений к условию:

$$[\alpha^2 m^2] = \text{minimum};$$

для равноточных же наблюдений —

$$[\alpha^2] = \text{minimum},$$

Распределение погрешностей в данном ряде измерений нам не известно, т. е. неизвестны и значения ϵ_i в уравнениях (a) и (c). Отсюда мы должны сделать заключение, что значения α_i , определенные из требования $\alpha^2 = \min$. и уравнений (b), не зависят от погрешностей данного ряда наблюдений, т. е. механизм способа наименьших квадратов определен для некоторого среднего ряда; данный же ряд измерений используется им вне зависимости от распределения погрешностей в этом ряде.

Из уравнения (c) следует, что с уменьшением $[\alpha\epsilon]$, $[\alpha l]$ стремится к истинному значению X . Однако, если обратиться к данному ряду измерений, то не является достаточно наглядным, что $[\alpha l]$ стремится к истинному значению X , т. к. мы не можем поставить задачу $[\alpha\epsilon]^2 = \min$. для данного ряда измерений. Поэтому мы считаем более наглядным представить уравнение (d) в следующем виде:

$$x = [\alpha L] - [\alpha\epsilon].$$

Так как $[\alpha L]$ представляет собою истинное значение X при любой системе α , удовлетворяющей системе уравнений (b), то уменьшение абсолютного значения суммы $[\alpha\epsilon]$ (или $[\alpha\epsilon]^2$) приближает x к истинному значению X .

Изучая результаты, получаемые по способу наименьших квадратов различные авторы утверждают, что эти результаты полностью согласуются с арифметической серединой, т. е. что она лежит в основе способа наименьших квадратов. В качестве доказательства этого утверждения приводится исследование простейшего примера при одном условном уравнении. Однако, эти исследования не отвечают на вопрос, всегда ли принцип способа наименьших квадратов и принцип арифметической середины согласны или же имеются случаи, когда одному из них надо отдать предпочтение.

Исследуя этот вопрос, мы вынуждены были построить новые доказательства способа наименьших квадратов, основанные на принципе удержания искомого значения в возможно малой окрестности точного значения его. При этом мы исходили из доказанной Лапласом, Гауссом и позднейшими авторами формулы средней квадратической ошибки сложного отклонения, являющегося линейной функцией отдельных отклонений, подчиняющихся нормальному закону распределения. Так, если

$$u = F(x, y, z, \dots), \text{ то}$$

$$m^2_u = F^2_x m^2_x + F^2_y m^2_y + F^2_z m^2_z + \dots, \quad (e)$$

где $F_x F_y \dots$ есть частные производные u по $x, y, \dots$, а $m_x, m_y \dots$ — средние квадратические ошибки этих величин.

Разработанные нами доказательства способа наименьших квадратов исходят из следующего соображения: уравненное значение искомой величины, вне зависимости от вида функции, связывающей ее с наблюдениями, должна равняться истинному значению ее, если в наблюдениях не содержится погрешностей.

Пусть имеется n линейных уравнений вида:

$$0 = -L_i + a_i X + b_i Y = c_i Z + \dots, \quad (f)$$

где m ($m < n$) величин $X, Y, Z, \dots$ подлежат определению через n измеренных величин, истинное значение которых равно L_i .

Найдем X из алгебраического решения, допустим, первых m уравнений. Обозначим истинное значение X из первого решения через

$$X_i = f_i(L_i), \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

а через $X_2, X_3, \dots$ истинные значения X , найденные из алгебраического решения комбинации уравнений (f), выбранных так, чтобы в следующую комбинацию всякий раз входило бы неиспользованное ранее уравнение ¹⁾.

Если умножить X_i на неопределенные множители p_i , удовлетворяющие условию:

$$[p] = 1, \quad (1)$$

то истинное значение может быть представлено в виде:

$$X = [X_i p_i], \quad (i = 1, 2, \dots, n - m + 1) \quad (2)$$

Если в уравнение (2) вместо X_i подставить измеренные значения l_i , то получим приближенное значение x со средней ошибкой m_x , зависящей от m_i и p_i .

Найдем систему множителей p_i под условием:

$$m^2 = \text{minimum}. \quad (3)$$

Решение этой задачи не представляет труда.

Применим сказанное к системе трех уравнений с двумя неизвестными. Пусть имеется система уравнений: ²⁾

$$\begin{aligned} a_1 X + b_1 Y - L_1 &= 0 \\ a_2 X + b_2 Y - L_2 &= 0 \\ a_3 X + b_3 Y - L_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда из решения первых двух уравнений имеем:

$$X_{12} = \frac{1}{D_{12}} (b_2 L_1 - b_1 L_2).$$

Из второго и третьего — получаем:

$$X_{23} = \frac{1}{D_{23}} (b_3 L_2 - b_2 L_3),$$

где D_{12} — определитель системы из первого и второго уравнений, а D_{23} — из второго и третьего уравнений.

Тогда

$$X = \frac{1}{D_{12}} (b_2 L_1 - b_1 L_2) p_1 + \frac{1}{D_{23}} (b_3 L_2 - b_2 L_3) p_2, \quad (5)$$

где

$$p_1 + p_2 = 1.$$

Пусть из измерений найдены равноточные значения l_1, l_2, l_3 , ³⁾

$$m_x^2 = \frac{[b^2]_3}{D_{12}^2} p_1^2 + \frac{[b^2]_1}{D_{23}^2} p_2^2 - 2 \frac{b_1 b_3}{D_{12} D_{23}} p_1 p_2, \quad (6)$$

где $[b^2]_3$ представляет собой сумму b^2 без b_2^2 и т. д.

¹⁾ Может возникнуть мысль (по Якоби) использовать решения, в которых будут участвовать всевозможные сочетания L_i , но тогда определитель системы при определении p_i из системы (7) будет равен нулю. $D_0 = 0$ и при количестве сочетаний $n - m + 2$.

²⁾ В каждое уравнение может входить более чем одно L .

³⁾ Если принять l_i неравноточными, существо вопроса не изменится.

Из (1) и (6) находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(m^2_x)}{\partial p_1} &= \frac{[b^2]_3}{D_{12}^2} p_1 - \frac{b_1 b_3}{D_{12} D_{23}} p_2 = k \\ \frac{\partial(m^2_x)}{\partial p_2} &= -\frac{b_1 b_3}{D_{12} D_{23}} p_1 + \frac{[b^2]_1}{D_{23}^2} p_2 = k \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Решение этой системы дает:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{A_1}{A_1 + A_2}; \quad p_2 = \frac{A_2}{A_1 + A_2}; \\ A_1 &= \frac{[b^2]_1}{D_{23}} + \frac{b_1 b_3}{D_{12} D_{23}}; \quad A_2 = \frac{[b^2]_3}{D_{12}^2} + \frac{b_1 b_3}{D_{12} D_{23}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Тогда, на основании (8) и (5), уравненное значение x° будет равно:

$$x^\circ = \frac{1}{D_{12}} (b_2 l_1 - b_1 l_2) p_1 + \frac{1}{D_{23}} (b_3 l_2 - b_2 l_3) p_2 \quad (9)$$

Если бы мы применили к системе (4) требование $[v^2] = \min$, т. е. решили бы нормальные уравнения

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y - [al] &= 0 \\ [ab]x + [bb]y - [bl] &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

то

$$x = -\frac{1}{D} ([bb][al] - [ab][bl]), \quad (11)$$

где D — определитель системы (10).

Можно в общем виде показать, что коэффициенты при l_i в уравнениях (9) и (11) одинаковы, т. е. требования $m^2_x = \min$ и $[v^2] = \min$ равносильны.

Так как размеры этой статьи не позволяют нам привести указанное исследование, применим выведенные формулы для решения частного примера.

Возьмем систему уравнений

$$\begin{aligned} 2X - Y - L_1 &= 0 \\ X + Y - L_2 &= 0 \\ X - Y - L_3 &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть измеренные значения получились

$$l_1 = 4, \quad l_2 = 5, \quad l_3 = 2.$$

Тогда по способу наименьших квадратов найдем:

$$x^\circ = 3.072; \quad y^\circ = 1.714.$$

Решим систему (12), используя формулы (8) и (9), для чего подсчитаем определители

	D_{12}	D_{23}
D_i	3	-2
D_i^2	9	4

Тогда

$$\begin{aligned}x_{12} &= \frac{1}{D_{12}} (b_2 l_1 - b_1 l_2) = 3; \\x_{23} &= \frac{1}{D_{23}} (b_3 l_2 - b_2 l_3) = 3.5 \\A_1 &= \frac{1}{3}; A_2 = \frac{1}{18}; p_1 = \frac{6}{7}; p_2 = \frac{1}{7}; \\x &= 3.072.\end{aligned}$$

При выводе формул (8) и (9) мы не ограничивали выбора значений x_{ik} , поэтому этот же результат мы получим, избрав иную систему значений x , например:

$$\begin{aligned}x_{13} &= 2.0; x_{23} = 3.5. \text{ Тогда } p_1 = 0.286; p_2 = 0.714; \\x^0 &= 3.071.\end{aligned}$$

Приложим описанный выше метод к условным уравнениям, в которых число неизвестных больше числа уравнений. Допустим, что имеется два уравнения с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_0 = 0 \\ b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_4 X_4 + b_0 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Решая эту систему относительно X_1 и X_2 , X_1 и X_3 , найдем:

$$X_{12} = \frac{1}{D_{12}} \left\{ (a_2 b_3 - b_2 a_3) X_3 + (a_2 b_4 - b_2 a_4) X_4 + (a_2 b_0 - b_2 a_0) \right\}.$$

Обозначая стоящие в скобках определители через D_{23} , D_{24} и D_{20} , а также решая систему (13) относительно X_1 и X_3 , напомним X в функции всех величин, подлежащих измерению: ¹⁾

$$\begin{cases} X_1 = X_1 \\ X_{12} = \frac{1}{D_{12}} (D_{23} X_3 + D_{24} X_4 + D_{20}) \\ X_{13} = \frac{1}{D_{13}} (-D_{23} X_2 + D_{34} X_4 + D_{30}). \end{cases} \quad (14)$$

Если помножить выражения (14) на множители p при условии:

$$[p] = 1, \quad (15)$$

истинное значение X_1 будет иметь вид:

$$\begin{aligned}X_1 &= p_1 X_1' - \frac{D_{23}}{D_{13}} p_3 X_2 + \frac{D_{23}}{D_{12}} p_2 X_3 + \\ &+ \left(\frac{D_{24}}{D_{12}} p_2 + \frac{D_{34}}{D_{13}} p_3 \right) X_4 + p_2 \frac{D_{20}}{D_{12}} + p_3 \frac{D_{30}}{D_{13}}.\end{aligned} \quad (16)$$

¹⁾ Можно доказать, что вместо значений X_{12} , X_{13} можно использовать r значений X , полученных из каждого уравнения системы (13), $X_1' = -\frac{1}{a_1} ([aX]_1 + a_0)$;

$X_1'' = -\frac{1}{b_1} ([bX]_1 + b_0) \dots$ или $X_1' = l_1 - \frac{W_1}{a_1}$; $X_1'' = l_1 - \frac{W_2}{b_1} \dots$

Если в правую часть уравнения (16) подставить измеренные значения, то уравнение определит приближенное значение x , со средней ошибкой

$$m_{x1}^2 = p_1^2 + \frac{D_{23}^2 + D_{24}^2}{D_{12}^2} p_2^2 + \frac{D_{23}^2 + D_{34}^2}{D_{13}^2} p_3^2 + 2 \frac{D_{24}D_{34}}{D_{12}D_{13}} p_2 p_3 \quad (17)$$

Найдем p_i под условием (3). Тогда, умножая уравнение (15) на множитель $2k$ и приравнявая частные производные этого уравнения по переменным p_i частным производным уравнения (17) по этим же переменным, получим:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= k \\ \frac{1}{D_{12}^2} (D_{23}^2 + D_{24}^2) p_2 + \frac{D_{24}D_{34}}{D_{12}D_{13}} p_3 &= k \\ + \frac{D_{24}D_{34}}{D_{12}D_{13}} p_2 + \frac{1}{D_{13}^2} (D_{23}^2 + D_{34}^2) p_3 &= k \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Решение последних двух уравнений дает:

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{D_0} \left\{ \frac{1}{D_{13}^2} (D_{23}^2 + D_{34}^2) - \frac{D_{24}D_{34}}{D_{12}D_{13}} \right\} k \\ p_3 &= \frac{1}{D_0} \left\{ \frac{1}{D_{12}^2} (D_{23}^2 + D_{24}^2) - \frac{D_{24}D_{34}}{D_{12}D_{13}} \right\} k, \end{aligned}$$

где D_0 определитель системы (18).

Подставляя значение p в уравнение (15), найдем:

$$k = \frac{D_0}{D_0 + D_2 + D_3};$$

тогда

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{D_0}{N}; \quad p_2 = \frac{1}{N} \left\{ \frac{1}{D_{13}^2} (D_{23}^2 + D_{34}^2) - \frac{D_{24}D_{34}}{D_{12}D_{13}} \right\} \\ p_3 &= \frac{1}{N} \left\{ \frac{1}{D_{12}^2} (D_{23}^2 + D_{24}^2) - \frac{D_{24}D_{34}}{D_{12}D_{13}} \right\}, \end{aligned}$$

где

$$N = D_0 + D_2 + D_3.$$

Найдем значения D_0 и N .

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{D_{12}D_{13}^3} (D_{23}^2 + D_{24}^2)(D_{23}^2 + D_{34}^2) - \frac{D_{24}^2 D_{34}^2}{D_{12}^2 D_{13}^2}; \\ D_0 &= \frac{D_{23}^2}{D_{12}^2 D_{13}^2} (D_{23}^2 + D_{24}^2 + D_{34}^2). \end{aligned}$$

$$N = \frac{1}{D_{12}^2 D_{13}^2} \left\{ (D_{12}^2 + D_{13}^2 + D_{23}^2 + D_{24}^2 + D_{34}^2) D_{23}^2 + (D_{12}D_{34} - D_{13}D_{24})^2 \right\}$$

но

$$D_{12}D_{34} - D_{13}D_{24} = -D_{23}D_{14},$$

т. е.

$$N = \frac{D_{23}^2 D}{D_{12}^2 D_{13}^2}, \text{ где } D = D_{12}^2 + D_{13}^2 + D_{14}^2 + D_{23}^2 + D_{24}^2 + D_{34}^2.$$

Можно показать, что D есть определитель системы нормальных уравнений, соответствующих системе условных уравнений (13).

Используя значения D_0 и N , найдем окончательные выражения для множителей p в уравнении (16)

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{D} (D_{23}^2 + D_{24}^2 + D_{34}^2) \\ p_2 &= \frac{D_{12}}{DD_{23}} (D_{12} D_{23} - D_{14} D_{34}) \\ p_3 &= \frac{D_{13}}{DD_{23}} (D_{13} D_{23} + D_{14} D_{24}) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$x_1^0 = lp_1 + x_{12}p_2 + x_{13}p_3 \quad (20)$$

Формулы (19) решают задачу отыскания множителей, имеющих смысл весов, с которыми входят в арифметическую среднюю (20) непосредственно измеренное значение l_1 и значения x_{12} и x_{13} , полученные из алгебраического решения условных уравнений.

Можно в общем виде показать, что решение системы уравнений (13) под условием $[v^2] = \min$ и под условием $m_{x^2} = \min$ приводят к одному и тому же результату. Для этого необходимо доказать, что выражение уравненного под условием $[v^2] = \min$, значения x_1

$$x_1^0 = (1 + a_1r_1 + b_1r_2 + \dots)l_1 + (a_2r_1 + b_2r_2 + \dots)l_2 + \dots + a_0r_1 + b_1r_2,$$

где r — переходные коэффициенты, может быть приведено к уравнению (16), если в нем X_i заменить через l_i .

Приведем пример применения формул (14), (19) и (20). Пусть имеется система условных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -4X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 + a_0 &= 0 \\ 5X_1 - 2X_2 + X_3 + 2X_4 + b_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Допустим, что значения X равны:

	x_1	x_2	x_3	x_4
истинные измеренные	6	8	4	9
	5	7	4	11

Тогда $a_0 = -1$; $b_0 = -36$; $W_1 = [al] + a_0 = 5$; $W_2 = 1$

Решая систему (21) по способу наименьших квадратов, найдем: $v_1 = -0.45$, т. е. уравненное значение

$$\underline{x_1^0 = 5.45.} \quad \underline{m_{x^2} = 0.118}$$

Применим к решению системы (21) выведенные нами формулы (14), (16) и (19), для чего подсчитаем определители

	D_{12}	D_{13}	D_{14}	D_{23}	D_{24}	D_{34}	(D^2)
D	3	-14	-13	5	4	3	—
D^2	9	196	169	25	16	9	424

Тогда, подсчитав по формулам (14) и (19) значения x и p , имея в виду (20), найдем

	p	x	xp
1	0,118	5,000	0,590
2	0,077	8,667	0,667
3	0,806	5,214	4,202
	1,001		5,459 = x_1^0

Подставив p в (17), найдем $m_{11}^2 = 0.118$.

Новая интерпретация результатов уравнивания по способу наименьших квадратов.

Выше мы нашли, что уравненное по способу наименьших квадратов значение x , можно представить в виде

$$x^0_1 = [xp] \quad (22)$$

где x — есть результаты алгебраического решения систем уравнений, а p найдены под условием

$$[p] = 1, \quad m^2_{11} = \text{minimum}.$$

Из рассмотрения выражений (14) и (16) следует, что уравненное по способу наименьших квадратов значение x представляет собою арифметическую средину из зависимых величин, так как в определение значений x_{12} и x_{13} входит одна и та же измеренная величина l_4 . Такое же заключение мы можем сделать из формулы (9) для метода посредственных наблюдений. На этом основании мы даем новую интерпретацию результатов уравнивания по способу наименьших квадратов, заключающуюся в том, что всегда уравненное по способу наименьших квадратов значение искомого представляет собою арифметическую средину из результатов прямого измерения и зависимых значений, найденных из алгебраического решения систем уравнений, с весами, подчиняющимися условию наибольшего веса искомого. Такое толкование результатов уравнивания по способу наименьших квадратов, как мы увидим ниже, расширяет область возможных исследований и приложений способа наименьших квадратов, но не определяет основных свойств результатов уравнивания. Если под арифметической серединой подразумевать средину из независимых значений, то она является частным случаем лежащего в основе способа наименьших квадратов принципа наибольшего веса искомого. Для метода условных наблюдений независимость значений выполняется, если имеется только одно условное уравнение или же количество неизвестных n и количество уравнений связано условием $r = n - 1$.

Только в этом случае формулы (14) дадут независимые значения x , и p_i из формул (19) будут совпадать с весами, подсчитанными по основной формуле (e).

Примеры приложения новой интерпретации.

1. Уравнивание углов и направлений, наблюдаемых по методу Шрейбера.

Пусть на пункте P имелось четыре направления, между которыми измерены углы по методу Шрейбера. Значение угла x по способу наименьших квадратов определится из выражения

$$x = \frac{2(12) + [(13) - (23)] + [(14) - (24)]}{4} \quad (a)$$

В выражении (а) совершенно отсутствует значение угла (3,4), т. е. погрешность в этом угле не имеет никакого влияния на уравненное на станции значение угла x .

Обращаясь к уравнениям погрешностей

$$\begin{array}{l|l} x - (12) = v_{12} & y - x - (23) = v_{23} \\ y - (13) = v_{13} & z - x - (24) = v_{24} \\ z - (14) = v_{14} & z - y - (34) = v_{34} \end{array} \quad (6)$$

мы замечаем, что угол (34) не входит в уравнения, содержащие угол x поэтому можно предположить, что результат (а) изменится, если ввести в определение x угол (34).

Выше нами было установлено, что результаты уравнивания по способу наименьших квадратов можно представить в виде арифметической середины из зависимых значений с весами, подчиняющимися требованию наибольшего веса. Формулы (14), (19) и (20) дают нам возможность подойти к определению вероятнейшего значения x , используя все значения наблюдаемых углов.

Напишем выражения угла x , поставив условие, чтобы значение

$$x = [p_i x_i] \text{ при } [p] = 1$$

было функцией всех измеренных значений углов; тогда

$$x = (12)p_1 + \{(13) - (23)\}p_2 + \{(14) - (24)\}p_3 + \{(14) - (23) - (34)\}p_4; \quad (c)$$

$$x = p_1(12) + p_2(13) + (p_3 + p_4)(14) - (p_2 + p_4)(23) - p_3(24) - p_4(34)$$

$$m_x^2 = p_1^2 + 2p_2^2 + 2p_3^2 + 3p_4^2 + 2p_2p_4 + 2p_3p_4 \quad (d)$$

Будем искать минимум функции (d) при условии, что

$$[p] = 1 \quad (e)$$

Тогда, сокращая правые части на 2, получим:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial(m_x^2)}{\partial p_1} = p_1 = k; & \frac{\partial(m_x^2)}{\partial p_3} = 2p_3 + p_4 = k; \\ \frac{\partial(m_x^2)}{\partial p_2} = 2p_2 + p_4 = k; & \frac{\partial(m_x^2)}{\partial p_4} = p_2 + p_3 + 3p_4 = k. \end{array}$$

Откуда следует:

$$p_2 = p_3; \quad p_3 = \frac{k}{D} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{k}{2}; \quad p_4 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 2 & k \\ 2 & k \end{vmatrix} = 0.$$

Подставляя найденные значения p в уравнение (e), находим:

$$k = 0.5; \quad p_1 = 0.5; \quad p_2 = p_3 = 0.25.$$

Тогда формула (c) может быть приведена к обычному виду:

$$x = (12)p_1 + \{(13) - (23)\}p_2 + \{(14) - (24)\}p_3.$$

Согласно (d)

$$m_x^2 = \frac{1}{2}; \quad P_x = 2 = \frac{n}{2},$$

т. е. мы получаем результат, совпадающий с решением по формуле (а), если принять вес наблюдаемого угла равным единице.

На данном примере мы показали, что выдвинутое и обоснованное нами положение о возможности использования зависимых значений с весами, подчиняющимися требованию наибольшего веса, дает нам больший простор при исследованиях. На этом же примере мы покажем, что выдвинутое нами положение дает возможность решать задачи, которые не могут быть решены обычными приемами способа наименьших квадратов. Так, в предыдущем примере мы рассматривали углы как непосредственно наблюдаемые величины. Поэтому весьма важно в теоретическом и практическом отношении показать, что этот же результат мы получим и без указанного допущения. Для удобства записи занумеруем углы следующим образом:

№№	Углы	№№	Углы
1	(12)	4	(23)
2	(13)	5	(24)
3	(14)	6	(34)

(f)

Назовем через a_i, b_i, c_i, d_i направления, прочтенные в приеме k при измерении угла i .

Напишем выражение искомого угла x в функции всех наблюдаемых направлений и множителей p .

$$x = (b_1 - a_1)p_1 + [(c_2 - a_2) - (c_4 - b_4)]p_2 + [(d_3 - a_3) - (d_5 - b_5)]p_3 + \\ + [(c_2 - a_2) + (d_6 - c_6) - (d_5 - b_5)]p_4; \quad (g)$$

$$x = p_1 b_1 - p_1 a_1 + (p_2 + p_4)c_2 - (p_2 + p_4)a_2 - p_2 c_4 + p_2 b_4 + \\ + p_3 d_3 - p_3 a_3 - (p_3 + p_4)d_5 + (p_3 + p_4)b_5 + p_4 d_6 - p_4 c_6.$$

Если принять среднюю квадратическую ошибку направления равной единице,

$$m_x^2 = 2p_1^2 + 4p_2^2 + 4p_3^2 + 6p_4^2 + 4p_2 p_4 + 4p_3 p_4 \quad (h)$$

Будем искать корни уравнения $[p] = 1$ при условии: $m_x^2 = \min$; тогда, сокращая 2, получим:

$$2p_1 = k; \quad 4p_2 + 2p_4 = k \\ 4p_3 + 2p_4 = k \\ 2p_2 + 2p_3 + 6p_4 = k$$

откуда следует:

$$p_2 = p_3; \quad p_2 = \frac{k}{D} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{k}{4}; \quad p_4 = 0.$$

Подставив найденные значения p в $[p] = 1$, найдем: $k = 1$, и

$$p_1 = \frac{1}{2}; \quad p_2 = p_3 = \frac{1}{4}; \quad p_4 = 0.$$

Имея ввиду нумерацию углов (f), выражение (g), если принять в расчет все приемы на данной станции, приведет к значению x , определяемому выражением (a). Подставляя значения p в (h), получим:

$$m_x^2 = 1; \quad P_x = 1.$$

Если же принять вес направления равным 2, то получим прежний результат

$$P_x = 2 = \frac{n}{2}.$$

Таким образом, на основании проведенного исследования мы пришли к заключению, что формула (а), при выводе которой в качестве наблюдаемых величин приняты углы, а не направления, дает строгие с точки зрения способа наименьших квадратов результаты. Из этого же исследования видно, что данные нами формулы могут быть использованы при исследовании вопросов извлечения наиболее вероятных результатов там, где применение обычных приемов способа наименьших квадратов или затруднительно или невозможно.

2. Уравнение направлений, наблюдаемых методом круговых приемов

Допустим, что на некотором пункте были произведены равноточные наблюдения n направлений m полными приемами от одного начального направления.

Пусть в приеме i получены следующие отсчеты: $a_i, b_i, \dots, n_i$, соответствующие направлениям $A, B, \dots, N$.

На основании новой интерпретации вероятнейшее значение угла X напишется:

$$x^\circ = [(b_i - a_i)p_i], (i = 1.2. \dots m) \quad (23)$$

где p_i подчинены условию $m_x^2 = \min$ и

$$[p] = 1 \quad (a)$$

Если положить $m_{ai}^2 = m_{bi}^2 = \dots = 1$, то

$$m_x^2 = 2[p^2] \quad (24)$$

Умножая $[p]$ на $4k$, дифференцируя $4k[p]$ и (24) по переменным p и приравнявая частные производные, получим:

$$p_i = k$$

Подставляя p в (а), будем иметь: $mk = 1$;

$$p_i = \frac{1}{m} \quad (b)$$

Тогда вероятнейший результат для угла x напишется в виде:

$$x^\circ = \left[(b_i - a_i) \frac{1}{m} \right] = \frac{1}{m} ([b] - [a]) \quad (25)$$

Точно также мы могли бы получить значения $y^\circ, z^\circ, \dots$.

Из приведенного исследования видно, что приложение новой интерпретации дало нам возможность получить общеизвестный результат чрезвычайно простым путем.

Вероятнейшее значение угла ω в приеме i также можно представить в виде:

$$\omega_i = a_i p_1 + (b_i - x^\circ) p_2 + (c_i - y^\circ) p_3 + \dots + (n_i - N^\circ) p_n \quad (26)$$

где под x^0, y^0 — подразумеваются вероятнейшие значения углов, или

$$\omega_i = a_i p_i + \left\{ b_i - \frac{1}{m} [b] - [a] \right\} p_2 + \dots + \left\{ n_i - \frac{1}{m} ([n] - [a]) \right\} p_n$$

Написав выражение $m^2 \omega_i$, после несложных алгебраических преобразований получим:

$$\omega_i = \frac{a_i + b_i + \dots + n_i}{n} \frac{x^0 + y^0 + \dots + N^0}{n},$$

что согласуется с результатом, полученным из уравнений погрешностей. Надо заметить, что вероятнейшее значение угла ω_i , т. е. вероятнейшее значение отсчета на предмет А в приеме с номером i , обычным путем получается проще. Мы привели это исследование для того, чтобы показать, что область приложения новой интерпретации может быть расширена, так как в выражении (26) значения $(b_i - x^0)$, $(c_i - y^0)$... не являются наблюдаемыми значениями ω_i , поскольку x^0, y^0 ... есть уравненные значения этих углов.

Выводы.

Результаты исследования можно формулировать следующим образом:

1. Способ наименьших квадратов определен для некоторого среднего ряда наблюдений; данный ряд наблюдений им используется вне зависимости от распределения погрешностей в этом ряде.

2. Теорема 1-я. Вероятнейшее значение каждой из n наблюдаемых величин, связанных r точными условиями ($n > r$), может быть представлено в виде арифметической середины из результата прямого измерения искомой величины и зависимых значений ее, доставляемых каждым условным уравнением (или полученных из r совместных решений уравнений), с весами, подчиняющимися требованию наибольшего веса искомого.

3. Теорема 2-я. Вероятнейшее значение каждой из m функций прямых наблюдений, связанных с прямыми наблюдениями n уравнениями ($n > m$), можно представить в виде арифметической середины из зависимых значений, полученных из решения необходимого и достаточного $(n - m + 1)$ числа сочетаний уравнений, с весами, подчиняющимися требованию наибольшего веса искомого.

4. Эти теоремы имеют теоретические и практические следствия и расширяют область приложений способа наименьших квадратов.

5. Веса, с которыми значения искомого входят в арифметическую середину, дают возможность подсчитать и вес уравненного значения его.

6. Арифметическая середина из независимых значений есть частный случай лежащего в основе способа наименьших квадратов принципа наибольшего веса искомого.