ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
Том 63 ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА 1944

ТРЕХЧЛЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ В ПРИМЕНЕНИИ К РАСЧЕТУ И ИССЛЕДОВАНИЮ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ТРЕХФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ

ВОРОНОВ Р. А.

Профессор, доктор технических наук

При расчете распределения токов и напряжений в несимметричных трехфазных цепях значительные упрощения получаются при использовании приемов метода симметричных составляющих. В работе автора „Расчет распределения токов и напряжений в симметричных трехфазных цепях“ разобрано применение этого метода в самом общем случае—для цепей, как имеющих нулевой провод, т. е. могущих пропускать составляющие токов нулевой последовательности, так и для цепей без такового.

В последнем случае возможно использовать особую форму общих математических выражений для составляющих, которые позволяют упростить решение ряда различных вопросов, представляющих значительные трудности при обычных методах решения. Эта часть работы и приводится в настоящей статье.

Так как все напряжения и токи в уравнениях входят исключительно в комплексной форме, то точки над буквами везде опущены. По ряду соображений в работе были введены некоторые обозначения и индексы, отличные от принятых в других книгах и статьях. Эти обозначения полностью сохранены и в настоящей статье, хотя для цепей без составляющих нулевой последовательности можно было бы обойтись и без них.

Симметричные составляющие токов и напряжений

По методу симметричных составляющих любая система трех напряжений U_a, U_b и U_c может быть представлена через составляющие прямой последовательности U_I, обратной последовательности U_{II} и нулевой последовательности U_0, взятых для одной из фаз. Если за основную фазу принята фаза „a“, то

$$
\begin{aligned}
U_a &= U_I + U_{II} + U_0;\\
U_b &= a^2 . U_I + a \cdot U_{II} + U_0;\\
U_c &= a . U_I + a^2 . U_{II} + U_0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где a и a^2—множители поворота векторов на углы 120° и 240°

$$a = e^{j^2/_3\pi} = -\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}; \; a^2 = e^{j^4/_3\pi} = -\frac{1}{2} - j . \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{2}$$

Таким же путем могут быть представлены три тока I_a, I_b и I_c через составляющие I_I, I_{II} и I_0.

В общем случае несимметрии фаз цепи каждая из составляющих токов вызывает появление каждой же из составляющих напряжений, так что зависимость между ними может быть представлена в виде соотношений

$$
\begin{aligned}
U_I &= I_I . Z'_0 + I_{II} . Z_{II} + I_0 . Z''_I \\
U_{II} &= I_I . Z_I + I_{II} . Z''_0 + I_0 . Z_{II}; \\
U_0 &= I_I . Z''_{II} + I_{II} . Z'_I + I_0 . Z_0.
\end{aligned} \qquad (3)
$$

Входящие в них девять коэфициентов Z'_0, Z_{II} и т. д., имеющие размерность сопротивлений, могут быть легко определены по параметрам цепи. Так как уравнения, по которым они определяются, сходны по своим строениям с уравнениями для определения составляющих напряжений и токов (см. уравнения 9), то их можно рассматривать как составляющие сопротивлений нулевого, прямого и обратного порядков. В общем случае все девять коэфициентов могут быть различными, обычно же некоторые из них оказываются одинаковыми. Так, для статических цепей будут существовать равенства

$$Z'_0 = Z''_0; \quad Z'_I = Z''_{II}; \quad Z'_{II} = Z''_{II}.$$

Нижние индексы у составляющих сопротивлений определяют их порядок, верхние же выбраны с таким расчетом, что они в сумме с нижними определяют порядок составляющих тока, которым они соответствуют (т. е. стоят совместно в уравнениях). При этом сумма нижних индексов тока и сопротивления даст порядок получающейся составляющей напряжения (тройку следует считать за нуль, а четверку за единицу).

Решая систему уравнений (3) относительно составляющих токов, получим новую систему уравнений

$$
\begin{aligned}
I_I &= U_I . Y'_0 + U_{II} . Y_{II} + U_0 . Y''_I; \\
I_{II} &= U_I . Y_I + U_{II} . Y''_0 + U_0 . Y'_{II}; \\
I_0 &= U_I . Y''_{II} + U_{II} . Y'_I + U_0 . Y_0.
\end{aligned} \qquad (4)
$$

Входящие в них девять коэфициентов Y'_0, Y_{II} и т. д. будут иметь размерность проводимостей и могут рассматриваться как некоторые составляющие проводимостей цепи нулевого, прямого и обратного порядков, причем индексы для них выбраны так же, как и для составляющих сопротивлений. Эти составляющие проводимостей в большинстве случаев не могут быть определены непосредственно по параметрам цепи, а получаются лишь путем решения системы уравнений (3).

При симметрии фаз цепи составляющие прямого и обратного порядков как для сопротивлений, так и для проводимостей обращаются в нуль, и остаются только составляющие нулевого порядка Z'_0, Z''_0, Z_0 и Y'_0; Y''_0, Y_0. При этом получается общеизвестное положение о независимости отдельных последовательностей друг от друга, т. е. в симметричных цепях составляющие токов прямой последовательности вызывают составляющую напряжений тоже только прямой последовательности и т. д.

При расчете токов короткого замыкания для симметричных цепей составляющие Z'_0, Z''_0 и Z_0 представляют полные сопротивления для токов прямой, обратной и нулевой последовательностей (обычно их в этом случае обозначают через Z_I, Z_{II} и Z_0).

Не останавливаясь на общих свойствах всех этих составляющих и их использованиях для расчетов трехфазных цепей, перейдем сразу к рассмотрению цепей без нулевого провода, широко используемых во всех электрических установках.

Цепь без нулевого провода

При отсутствии в цепи составляющих тока нулевой последовательности (например, в цепи без нулевого провода) все расчеты значительно упрощаются. Уравнения (3) получают вид

$$\begin{aligned} U_I &= I_I \cdot Z'_0 + I_{II} \cdot Z_{II}; \\ U_{II} &= I_I \cdot Z_I + I_{II} Z''_0; \\ U_0 &= I_I \cdot Z''_{II} + I_{II} \cdot Z'_I. \end{aligned} \tag{5}$$

Из первых двух уравнений получаем для I_I и I_{II} выражения

$$I_I = U_I \cdot \frac{Z''_0}{Z'_0 . Z''_0 - Z_I . Z_{II}} + U_{II} \cdot \frac{-Z_{II}}{Z'_0 . Z''_0 - Z_I . Z_{II}};$$

$$I_{II} = U_I \cdot \frac{-Z_I}{Z'_0 . Z''_0 - Z_I Z_{II}} + U_{II} \cdot \frac{Z'_0}{Z'_0 . Z''_0 - Z_I . Z_{II}}.$$

Вводя обозначения составляющих проводимостей, находим

$$\begin{aligned} I_I &= U_I \cdot Y'_0 + U_{II} \cdot Y_{II}; \\ I_{II} &= U_I \cdot Y_I + U_{II} \cdot Y'_0, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$Y'_0 = \frac{-Z''_0}{Z_0' \cdot Z_0'' - Z_I \cdot Z_{II}}; \quad Y_0'' = \frac{Z_0'}{Z_0' . Z_0'' - Z_I . Z_{II}};$$

$$Y_I = \frac{-Z_I}{Z_0' . Z_0'' - Z_I . Z_{II}}; \quad Y_{II} = \frac{-Z_{II}}{Z_0' . Z_0'' - Z_I . Z_{II}}. \tag{7}$$

Разрешая уравнения (6) по отношению к составляющим напряжений, имеем

$$Z_0' = \frac{Y_0''}{Y_0' . Y_0'' - Y_I . Y_{II}}; \quad Z_0'' = \frac{Y_0'}{Y_0' . Y_0'' - Y_I . Y_{II}};$$

$$Z_I = \frac{-Y_I}{Y_0' . Y_0'' - Y_I . Y_{II}}; \quad Z_{II} = \frac{-Y_{II}}{Y_0' . Y_0'' - Y_I . Y_{II}}. \tag{8}$$

Так как в такой цепи составляющая нулевого порядка приложенного напряжения не оказывает влияния на проходящие токи, а составляющая I_0 равна нулю, то составляющие проводимости Y_0; Y'_I; Y''_I; Y'_{II} и Y''_{II} должны быть равны нулю. Составляющие сопротивлений будут иметься все, за исключением Z_0, которая обращается в бесконечность. При этом Z''_I и Z'_{II} не играют никакой роли, а Z'_I и Z''_{II} участвуют лишь в определении составляющей U_0 для нагрузки по последнему из уравнений (5).

Нахождение распределения токов и напряжений

Для нахождения распределения токов и напряжений в заданной цепи может быть намечен следующий путь.

1. Все элементы отдельных участков цепи должны быть выражены в составляющих сопротивлений и проводимостей.

2. При последовательном соединении нескольких участков цепи соответствующие составляющие сопротивлений суммируются, что может быть выражено условно как

$$Z_k = Z_1 + Z_2 + \ldots\ldots = \Sigma Z_n.$$

3. При наличии разветвлений суммируются соответствующие составляющие проводимостей ветвей

$$Y_k = Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots = \Sigma Y_n.$$

4. Путем постепенного перехода от сопротивлений к проводимостям и обратно находятся значения составляющих общего сопротивления и общей проводимости цепи для места приложения известного напряжения (или э.д.с.) или же для места прохождения известного тока.

5. По найденным значениям и известному напряжению находятся составляющие общего тока данной части цепи

$$I = U \cdot Y = U \cdot Z^{-1}.$$

6. Обратным путем находятся составляющие напряжений и токов в различных местах цепи, используя имевшиеся ранее составляющие сопротивлений и проводимостей этих частей цепи

$$U_p = I_p \cdot Z_p; \qquad I_q = U_q \cdot Y_q$$

и так далее.

7. По найденным составляющим токов и напряжений определяются токи и напряжения в фазах и мощности для отдельных участков цепи для всей цепи в целом.

Определение составляющих сопротивлений

В цепи без нулевого провода для производства расчетов необходимо иметь значения только четырех составляющих сопротивлений Z_0', Z_0'', Z_I и Z_{II}. Найти эти составляющие можно из рассмотрения обычных уравнений падения напряжения.

Для статической цепи, приведенной на схеме рис. 1, для каждой из фаз можно написать выражения для падения напряжения

$$U_a = I_a \cdot (r_a + j \cdot L_a \cdot \omega) + I_b \cdot j \cdot M_{ab} \cdot \omega + I_c \cdot j \cdot M_{ac} \cdot \omega;$$

$$U_b = I_b \cdot (r_b + j \cdot L_b \cdot \omega) + I_a \cdot j \cdot M_{ab} \cdot \omega + I_c \cdot j \cdot M_{bc} \cdot \omega;$$

$$U_c = I_c \cdot (r_c + j \cdot L_c \cdot \omega) + I_a \cdot j \cdot M_{ac} \cdot \omega + I_b \cdot j \cdot M_{bc} \cdot \omega.$$

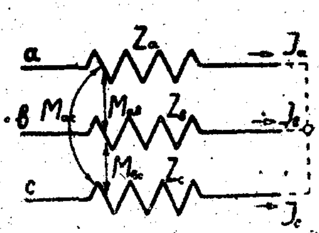

Рис. 1

Вводя обозначения для сопротивлений фаз

$$Z_a = r_a + j \cdot L_a \cdot \omega; \quad Z_b = r_b + j \cdot L_b \cdot \omega; \quad Z_c = r_c + j \cdot L_c \cdot \omega$$

и для импеданцев взаимных индуктивностей

$$j \cdot M_{bc} \cdot \omega = H_A; \qquad j \cdot M_{ac} \cdot \omega = H_B; \qquad j \cdot M_{ab} \cdot \omega = H_C$$

(обозначения через H введены для удобства, так как обычные обозначения их через x или Z требуют введения двойных индексов), получаем

$$U_a = I_a \cdot Z_a + I_b \cdot H_C + I_c \cdot H_B;$$

$$U_b = I_b \cdot H_C + I_b \cdot Z_b + I_c \cdot H_A;$$

$$U_c = I_a \cdot H_B + I_b \cdot H_A + I_c \cdot Z_c.$$

Определяя составляющие напряжений и помня, что I_0 равно нулю, находим

$$U_I = I_I \cdot \left[\frac{Z_a + Z_b + Z_c}{3} - \frac{H_A + H_B + H_C}{3}\right] +$$

$$+ I_{II} \cdot \left[\frac{Z_a + a^2 \cdot Z_b + a \cdot Z_c}{3} + 2 \cdot \frac{H_A + a^2 \cdot H_B + a H_C}{3}\right];$$

$$U_{II} = I_I \cdot \left[\frac{Z_a + a.Z_b + a^2.Z_c}{3} + 2.\frac{H_A + a.H_B + a^2.H_C}{3}\right] +$$
$$+ I_{II} \cdot \left[\frac{Z_a + Z_b + Z_c}{3} - \frac{H_A + H_B + H_C}{3}\right];$$
$$U_0 = I_I \cdot \left[\frac{Z_a + a^2.Z_b + a.Z_c}{3} - \frac{H_A + a^2.H_B + a.H_C}{3}\right] +$$
$$+ I_{II} \cdot \left[\frac{Z_a + a.Z_b + a^2.Z_c}{3} - \frac{H_A + a.H_B + a^2.H_C}{3}\right].$$

Сравнивая эти выражения с (5), находим составляющие сопротивлений

$$\begin{aligned} Z'_0 = Z''_0 &= \frac{Z_a + Z_b + Z_c}{3} - \frac{H_A + H_B + H_C}{3}; \\ Z_I &= \frac{Z_a + a.Z_b + a^2 Z_c}{3} + 2.\frac{H_A + a.H_B + a^2.H_C}{3}; \\ Z_{II} &= \frac{Z_a + a^2.Z_b + a.Z_c}{3} + 2.\frac{H_A + a^2.H_B + a.H_C}{3}; \\ Z_I' &= \frac{Z_a + a.Z_b + a^2.Z_c}{3} - \frac{H_A + a.H_B + a^2.H_C}{3}. \\ Z_{II} &= \frac{Z_a + a^2.Z_b + a.Z_c}{3} - \frac{H_A + a^2.H_B + a.H_C}{3}. \end{aligned} \tag{9}$$

В общем случае при прохождении токов нулевой последовательности эти выражения усложняются из-за введения взаимных индуктивностей между фазами и нулевым проводом и из-за сопротивления последнего.

Составляющие проводимостей обычно приходится определять через эти составляющие сопротивлений по уравнениям (7), но в некоторых случаях их приходится искать непосредственно по параметрам цепи, так как составляющие сопротивлений обращаются в бесконечность. Такой случай будет, например, при включении сопротивления между двумя фазами, т. е. при отключении третьей фазы. Если положить $Z_b = \infty$, то уравнения (7) дают неопределенность, раскрывая которую, находим

$$Y_0' = Y_0'' = \frac{1}{Z_a + Z_c - 2H_B}; \; Y_I = -a.Y_0'; \; Y_{II} = -a^2.Y_0'.$$

Так как в этом случае сопротивления Z_a и Z_c оказываются включенными последовательно, то их можно рассматривать как одно

$$Z_a + Z_c - 2H_B = Z_B,$$

что дает для составляющих проводимости выражение

$$Y_0' = Y_0'' = \frac{1}{Z_B} = Y_B; \; Y_I = -a.Y_B; \; Y_{II} = -a^2.Y_B. \tag{9a}$$

При отключении фазы C, т. е. при включении сопротивления Z_c между фазами a и b, в выражениях (9a) множители a и a^2 меняются местами, а при отключении фазы a, т. е. при включении сопротивления Z_A между фазами b и c, множители a и a^2 заменяются на единицы.

При включении сопротивлений треугольником таковой следует предварительно заменить на эквивалентную звезду, а затем уже находить составляющие сопротивлений по уравнениям (9). Для вращающихся машин (обычно с симметричными фазами) сопротивления Z_0' и Z_0'' не будут равны друг другу и определяются обычными приемами, излагаемыми в курсах электрических машин.

Уравнения (9) не могут быть использованы для определения составляющих сопротивлений для цепей с распределенными параметрами, так как при этом нет возможности найти отдельно индуктивности и взаимоиндуктивности каждой из фаз. В этом случае определение составляющих можно проводить следующим путем.

При отсутствии токов нулевой последовательности имеем падение напряжения в проводах отдельных фаз

$$U_a = -\frac{1}{2}.(j.\omega.L_{AB}.I_b + j.\omega.L_{AC}.I_c);$$

$$U_b = -\frac{1}{2}.(j.\omega.L_{BC}.I_c + j.\omega.L_{AB}.I_a);$$

$$U_c = -\frac{1}{2}.(j.\omega.L_{CA}.I_a + j.\omega.L_{CB}.I_b),$$

где

$$L_{AB} = \frac{\mu}{\pi}.l.\left(\ln\frac{d_{AB}}{R} + 0{,}25\right);\ L_{BC} = \frac{\mu}{\pi}.l.\left(\ln\frac{d_{BC}}{R} + 0{,}25\right);$$

$$L_{AC} = \frac{\mu}{\pi}.l.\left(\ln\frac{d_{AC}}{R} + 0{,}25\right).$$

Предполагая наличие составляющих тока только прямой последовательности

$$I_b = a^2.I_a;\quad I_c = a.I_a$$

и разлагая падения напряжения на составляющие, имеем

$$U_I = \frac{1}{6}.j.\omega.(L_{AB} + L_{AC} + L_{BC}).I_I;$$

$$U_{II} = -\frac{1}{3}.j.\omega(a^2.L_{AB} + a.L_{AC} + L_{BC}).I_I.$$

Добавляя активные сопротивления проводов, получаем значения составляющих сопротивлений

$$Z_0' = \frac{1}{3}(r_a + r_b + r_c) + \frac{1}{6}\,j.\omega.(L_{AB} + L_{AC} + L_{BC});$$

$$Z_I = \frac{1}{3}(r_a + a.r_b + a^2.r_c) - \frac{1}{3}\,j.\omega.(a^2.L_{AB} + a.L_{AC} + L_{BC}).$$

Подобным же путем, принимая в фазах только составляющие токов обратной последовательности

$$I_b = a.I_a;\ I_c = a^2.I_b,$$

получаем значения для составляющих

$$Z_0'' = \frac{1}{3}(r_a + r_b + r_c) + \frac{1}{6}j.\omega.(L_{AB} + L_{AC} + L_{BC});$$

$$Z_{II} = \frac{1}{3}(r_a + a^2.r_b + a.r_c) + r_c) + \frac{1}{3}j.\omega.(aL_{AB} + a^2L_{AC} + L_{BC}).$$

Таким образом, вместо уравнений (9) имеем для определения составляющих сопротивлений выражения

$$Z_0' = Z_0'' = \frac{1}{3}(r_a + r_b + r_c) + \frac{1}{2} j.\omega.\frac{\mu}{\pi} l.\left(\ln \frac{\sqrt[3]{d_{AB}.d_{AC}d_{BC}}}{R} + 0{,}25\right)$$

$$Z_I = \frac{1}{3}(r_a + a.r_b + a^2 r_c) - \frac{1}{3} j.\omega.\frac{\mu}{\pi}.l\left(a^2.\ln\frac{d_{AB}}{R} + \right.$$

$$\left. + a.\ln\frac{d_{AC}}{R} + \ln\frac{d_{BC}}{R}\right); \qquad (10)$$

$$Z_{II} = \frac{1}{3}(r_a + a^2.r_b + a.r_c) - \frac{1}{3}.j.\omega.\frac{\mu}{\omega}.l.\left(a.\ln\frac{d_{AB}}{R} + \right.$$

$$\left. + a^2.\ln\frac{d_{AC}}{R} + \ln\frac{d_{BC}}{R}\right).$$

Преобразования цепей без нулевого провода

Как было указано выше, при решении различных вопросов приходится объединять последовательные участки цепи, находить эквивалентные значения для параллельных участков и т. д., что обычно преследует цель привести данную схему к более простому виду, и тогда уже найти для нее значения токов в отдельных ее частях. Обратным пересчетом этих значений находится распределение токов и в основной сложной цепи.

Подобное же положение будет иметь место и тогда, когда потребуется какие-либо свойства простых цепей распространить на сложные цепи. Так, например, круговую диаграмму для простой цепи (для четырехполюсника) можно распространить на любую трехфазную цепь, сохранив все ее свойства.

При решении такого рода вопросов приходится иметь дело с преобразованием цепей в общем виде, что значительно упрощается при введении одного общего обозначения для всех составляющих сопротивлений или проводимостей. Таким обозначением может служить матричная форма по типу уравнений

$$\begin{bmatrix} U_I \\ U_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_0'; & Z_{II} \\ Z_I; & Z_0'' \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \end{bmatrix}$$

или в общем виде

$$U = Z.I.$$

Для цепей без нулевого провода, не имеющих путей для прохождения токов нулевой последовательности, вместо матричной формы можно для совместного выражения составляющих сопротивлений или проводимостей предложить более простую форму, очень удобную при различных преобразованиях. По своему строению эта форма представляет трехчленные гиперкомплексные числа с комплексными элементами. Рассмотрение свойств этих трехчленных выражений и их использования для трехфазных цепей и является основной задачей данной работы.

Трехчлены сопротивлений и проводимостей

В трехфазной цепи без нулевого провода при отсутствии составляющих токов нулевой последовательности, из всех составляющих сопротивлений имеют значение только четыре: Z_0'; Z_0''; Z_I и Z_{II}. Так как для стационарных цепей, не имеющих вращающихся частей (машин), составляющие Z_0' и Z_0'' равны друг другу, то, обозначая их без верхних индексов, получаем только три различных величины Z_0, $Z_{\rm I}$ и $Z_{\rm II}$.

Эти три значения, определяющие общее сопротивление Z цепи и ее несимметрию, могут быть представлены в виде трехчлена

$$Z = Z_0 + \alpha . Z_{\rm I} + \beta . Z_{\rm II}, \tag{11}$$

где α и β являются условными множителями, определяющими порядок этих составляющих. Эти множители вместе с единицей первого члена представляют как бы единичные векторы, определяющие все сопротивление как вектор некоторого трехмерного пространства.

Для той же цепи будут иметься только четыре составляющих проводимости Y', Y_0'', $Y_{\rm I}$ и $Y_{\rm II}$, из которых две первых обычно равны друг другу. Обозначая их без верхних индексов, можем написать проводимость в виде

$$Y = Y_0 + \alpha . Y_{\rm I} + \beta . Y_{\rm II}. \tag{12}$$

Так как эти составляющие проводимостей относятся к той же части цепи, что и составляющие сопротивления уравнения (11), то между ними должны существовать соотношения по уравнениям (7)

$$Y_0 = \frac{Z_0}{Z_0^2 - Z_{\rm I} . Z_{\rm II}}; Y_{\rm I} = \frac{-Z_{\rm I}}{Z_0^2 - Z_{\rm I} . Z_{\rm II}}; Y_{\rm II} = \frac{-Z_{\rm II}}{Z_0^2 - Z_{\rm I} Z_{\rm II}} \tag{13}$$

или по уравнениям (8)

$$Z_0 = \frac{Y_0}{Y_0^2 - Y_{\rm I} . Y_{\rm II}}; Z_{\rm I} = \frac{-Y_{\rm I}}{Y_0^2 - Y_{\rm I} . Y_{\rm II}}; Z_{\rm II} = \frac{-Y_{\rm II}}{Y_0^2 - Y_{\rm I} . Y_{\rm II}}. \tag{14}$$

Подставляя выражения (13) в выражение (12), получаем

$$Y = \frac{Z_0 - \alpha . Z_{\rm I} - \beta . Z_{\rm II}}{Z_0^2 - Z_{\rm I} . Z_{\rm II}}. \tag{15}$$

Числитель представляет трехчлен сопротивления, имеющий у второго и третьего члена знаки, измененные на обратные. Назовем такой трехчлен сопряженным и введем для него обозначение

$$\hat{Z} = Z_0 - \alpha . Z_{\rm I} - \beta . Z_{\rm II}. \tag{16}$$

Если принять, что

$$Y = Z^{-1} = \frac{1}{Z},$$

то выражение (15) получает вид

$$\frac{1}{Z} = \frac{\hat{Z}}{Z_0^2 - Z_{\rm I} . Z_{\rm II}},$$

или

$$Z_0^2 - Z_{\rm I} . Z_{\rm II} = Z . \hat{Z}.$$

Таким образом, выражение, стоящее в знаменателе (13) и (15), представляет величину произведения двух сопряженных трехчленов. Введем для него обозначение в прямых скобках

$$[Z] = Z . \hat{Z} = Z_0^2 - Z_{\rm I} . Z_{\rm II}. \tag{17}$$

Аналогичные выражения можно получить и для проводимостей.

Если в это выражение (17) подставить значения трехчленов (11) и (16) и произвести их алгебраическое перемножение, то получаем

$$Z_0^2 - Z_I . Z_{II} = (Z_0 + \alpha . Z_I + \beta . Z_{II}) . (Z_0 - \alpha . Z_I - \beta . Z_{II}) =$$
$$= Z_0^2 - 2 . \alpha . \beta . Z_I . Z_{II} - \alpha^2 . Z^2_I - \beta_2 . Z^2_{II}.$$

Это равенство удовлетворяется в том случае, если коэфициентам α и β (т. е. единичным векторам) приписать свойства[1])

$$2 . \alpha . \beta = 1; \ \alpha^2 = 0; \ \beta^2 = 0. \tag{18}$$

Ниже будет показано, что в большинстве случаев не приходится прибегать к данным соотношениям, так как они входят автоматически вместе с соотношениями типа произведений (17).

Основное применение сопряженных трехчленов вытекает из уравнения (15), которое может быть представлено в виде

$$Y = \frac{\hat{Z}}{[Z]}. \tag{19}$$

Это выражение служит для перехода от сопротивлений к проводимостям. Для обратного перехода имеем аналогичное выражение

$$Z = \frac{\hat{Y}}{[Y]}. \tag{20}$$

Легко видеть, что также имеются следующие соотношения:

$$[Z] . [Y] = 1; \ \hat{Y} = \frac{Z}{[Z]}, \quad \hat{Z} = \frac{Y}{[Y]}. \tag{21}$$

Основные соотношения для трехчленов

Для удобства дальнейших преобразований введем следующие обозначения

$$[Z]_{A+B+C+\ldots\ldots} = (Z_A + Z_B + Z_C + \ldots) . (\hat{Z}_A + \hat{Z}_B + \hat{Z}_C + \ldots) =$$
$$= [Z_A + Z_B + Z_C + \ldots] \tag{22}$$

$$[Z]_{AB} = \frac{1}{2} (Z_A . \hat{Z}_B + Z_B . \hat{Z}_A). \tag{23}$$

Последнее выражение, после подстановки трехчленов и их перемножения с принятием во внимание соотношений (18), дает

$$[Z]_{AB} = Z_{OA} . Z_{OB} - \frac{1}{2} (Z_{IA} . Z_{IIB} + Z_{IIA} . Z_{IB}), \tag{24}$$

а уравнение (22) после открытия скобок и группировки членов дает

$$[Z]_{A+B+C+\ldots} = [Z]_A + [Z]_B + [Z]_C + \ldots\ldots + 2[Z]_{AB} + 2[Z]_{AC} + 2[Z]_{BC} + \ldots \tag{25}$$

Если имеются только два трехчлена как сумма или разность, то это выражение получает вид

$$[Z]_{A \pm B} = [Z]_A + [Z]_B \pm 2[Z]_{AB}. \tag{26}$$

---

[1]) Эти коэфициенты являются единичными векторами некоторого трехмерного пространства, которому приписывается особое свойство, определяемое данным соотношением. Так как эти свойства могут быть выбраны произвольно, сообразуясь с требованиями данного случая, то иного вывода указанных соотношений не может быть и все остальное должно вытекать из этого начального условия.

Кроме того, легко убедиться в существовании соотношений

$$[Z]_{A(B+C)}=[Z]_{AB}+[Z]_{AC};\ [Z]_{AA}=[Z]_A. \tag{27}$$

Такие же точно соотношения получаются и для проводимостей.

Для перехода от сопротивлений к проводимостям и обратно, кроме основного уравнения (21), которое может быть написано как

$$[Z]_A.[Y]_A=1, \tag{28}$$

можно получить еще следующие:

$$[Z]_{AB}=\frac{Z_A.\hat{Z}_B+Z_B.\hat{Z}_A}{2}=\frac{Z_A.\hat{Z}_B+Z_B.\hat{Z}_A}{2[Z]_A.[Y]_A.[Z]_B.[Y]_B}=$$

$$=\frac{\hat{Y}_A.y_B+\hat{Y}_B.Y_A}{2[Y_A].[Y]_B}=\frac{[Y]_{AB}}{[Y]_A.[Y]_B}$$

или

$$[Z]_{AB}=\frac{[Y]_{AB}}{[Y]_A.[Y]_B};\quad [Y]_{AB}=\frac{[Z]_{AB}}{[Z]_A.[Z]_B}. \tag{29}$$

Подобным же путем

$$[Z]_{A+B}=[Z]_A+[Z]_B+2[Z]_{AB}=\frac{1}{[Y]_A}+\frac{1}{[Y]_B}+2\frac{[Y]_{AB}}{[Y]_A.[Y]_B}=$$

$$=\frac{[Y]_B+[Y]_A+2[Y]_{AB}}{[Y]_A.[Y]_B}$$

или

$$[Z]_{A+B}=\frac{[Y]_{A+B}}{[Y]_A.[Y]_B};\ [Y]_{A+B}=\frac{[Z]_{A+B}}{[Z]_A.[Z]_B}. \tag{30}$$

Эти основные соотношения позволяют производить в уравнениях преобразования, как это будет указано ниже.

Эквивалентные цепи

Простейшим использованием трехчленов будет нахождение выражений для сопротивления двух параллельных ветвей при условии отсутствия путей для составляющих тока нулевой последовательности. Если одна из ветвей имеет сопротивление

$$Z_A=Z_{OA}+\alpha.Z_{IA}+\beta.Z_{IIA},$$

а вторая

$$Z_B=Z_{OB}+\alpha.Z_{IB}+\beta.Z_{IIB},$$

то их проводимости определяются как

$$Y_A=\frac{\hat{Z}_A}{[Z]_A};\quad Y_B=\frac{\hat{Z}_B}{[Z]_B}.$$

Общая проводимость обеих ветвей будет равна сумме

$$Y=Y_A+Y_B=\frac{\hat{Z}_A}{[Z]_A}+\frac{\hat{Z}_B}{[Z]_B},$$

а общее сопротивление будет равно

$$Z=\frac{1}{Y}=\frac{1}{Y_A+Y_B}=\frac{\hat{Y}_A+\hat{Y}_B}{[Y]_{A+B}}.$$

Используя соотношения (21) и (30), имеем

$$Z=\frac{\dfrac{Z_A}{[Z]_A}+\dfrac{Z_B}{[Z]_B}}{\dfrac{[Z]_{A+B}}{[Z]_A.[Z]_B}}=\frac{Z_A.[Z]_B.[Z]_A}{[Z]_{A+B}+Z_B}.$$

Это же соотношение можно получить и иным путем. Известно, что эквивалентное сопротивление двух параллельных ветвей может быть выражено как

$$Z=\frac{Z_A.Z_B}{Z_A+Z_B}.$$

Умножая и числитель и знаменатель на сопряженный трехчлен знаменателя, получаем непосредственно

$$Z=\frac{Z_A.Z_B.(\hat{Z}+\hat{Z}_B)}{(Z_A+Z_B).(\hat{Z}+\hat{Z}_B)}=\frac{Z_B.[Z]_A+Z_A.[Z]_B}{[Z]_{A+B}}.$$

Таким образом, для двух параллельных ветвей

$$Z=\frac{Z_A.Z_B}{Z_A+Z_B}=\frac{Z_A.[Z]_B+Z_B.[Z]_A}{[Z]_{A+B}}. \tag{31}$$

Если расшифровать это уравнение, то для составляющей Z_0 будем иметь выражение

$$Z_0=\frac{Z_{OA}.(Z^2_{OB}-Z_{IB}.Z_{IIB})+Z_{OB}.(Z^2_{OB}-Z_{IA}.Z_{IIA})}{(Z_{OA}+Z_{OB})^2-(Z_{IA}+Z_{IB}).(Z_{IIA}+Z_{IIB})},$$

получить которое без помощи трехчленов было бы значительно труднее. Подобные же выражения получаются и для остальных составляющих.

В случае последовательного включения двух участков цепи, имеющих проводимости Y_A и Y_B, подобное же уравнение будет давать общую проводимость всей цепи

$$Y=\frac{Y_A.[Y]_B+Y_B.[Y]_A}{[Y]_{A+B}}. \tag{32}$$

Предположим теперь, что три ветви, имеющие сопротивления Z_A, Z_B и Z_C, образуют треугольник (рис. 2a), который желательно превратить в эквивалентную схему, соединенную звездой (рис. 2b). Необходимость в таком преобразовании легко может встретиться при решении вопросов, связанных со сложной формой цепи.

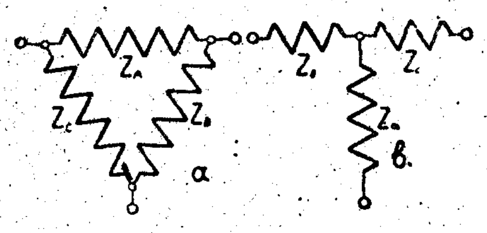

Рис. 2

При отсутствии путей для токов нулевой последовательности можем написать в общем виде

$$Z_a=\frac{Z_B.Z_C}{Z_A+Z_B+Z_C}$$

с круговой заменой индексов для других ветвей звезды. Умножая и числитель и знаменатель на сопряженный трехчлен знаменателя, получаем

$$Z=\frac{Z_B.Z_C.(\hat{Z}_A+\hat{Z}_B+\hat{Z}_C)}{[Z]_{A+B+C}}=\frac{\hat{Z}_A.Z_B.Z_C+\hat{Z}_B.Z_B.Z_C+Z_B.Z_C.\hat{Z}_C}{[Z]_{A+B+C}}$$

или

$$Z_a=\frac{\hat{Z}_A.Z_B.Z_C+Z_C.[Z]_B+Z_B.[Z]_C}{[Z]_{A+B+C}}$$

Остается преобразовать член $\hat{Z}_A.Z_B.Z_C$, приведя его к такому виду, чтобы исключить произведение трехчленов. Для этого прибавляем и вычитаем одинаковые члены, представляя их в виде

$$\hat{Z}_A.Z_B.Z_C=\left(\frac{1}{2}.\hat{Z}_A\cdot Z_B.Z_C+\frac{1}{2}.\hat{Z}_A.Z_B.Z_C\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{2}Z_A.Z_B.\hat{Z}_C-\frac{1}{2}.Z_A.Z_B.\hat{Z}_C\right)+\left(\frac{1}{2}Z_A.\hat{Z}_B.Z_C-\frac{1}{2}Z_A.\hat{Z}_B.Z_C\right).$$

Объединяя первый член с третьим, второй с пятым и четвертый с шестым, получаем

$$\hat{Z}_A.Z_B.Z_C=Z_B.\frac{\hat{Z}_A.Z_C+Z_A.\hat{Z}_C}{2}+Z_C.\frac{\hat{Z}_A.Z_B+Z_A.\hat{Z}_B}{2}-Z_A.\frac{\hat{Z}_B.Z_C+Z_B.\hat{Z}_C}{2},$$

или, согласно (23),

$$\hat{Z}_A.Z_B.Z_C=Z_B.[Z]_{AC}+Z_C.[Z]_{AB}-Z_A.[Z]_{BC}, \tag{33}$$

что дает для искомого сопротивления окончательное выражение

$$Z_a=\frac{Z_B.([Z]_C+[Z]_{AC})+Z_C.([Z]_B+[Z]_{AB})-Z_A.[Z]_{BC}}{[Z]_{A+B+C}}. \tag{34}$$

Путем круговой замены индексов получаем выражения для сопротивлений Z_b и Z_c остальных двух ветвей.

Выясним теперь вопрос об общем случае выражения типа

$$Z=\frac{Z_m.Z_n}{Z_k}.$$

Умножая и числитель и знаменатель на сопряженный трехчлен знаменателя, получаем

$$Z=\frac{\hat{Z}_k.Z_m.Z_n}{Z_k.\hat{Z}_k}.$$

Так как числитель сходен с уравнением (33), то окончательное выражение будет иметь вид

$$Z=\frac{Z_m.[Z]_{nk}+Z_n.[Z]_{mk}-Z_k.[Z]_{mn}}{[Z]_k}. \tag{35}$$

Если в этом уравнении заменить m на A, n на B и k на A+B+C, то получим уравнение (34).

Уравнение (35) позволяет решить вопрос и об обратном переходе от звезды к треугольнику. В простых цепях для этой цели служит уравнение

$$Z_A=\frac{Z_a.Z_b+Z_a.Z_c+Z_b.Z_c}{Z_a}=Z_b+Z_c+\frac{Z_b.Z_c}{Z_a}$$

с круговой заменой индексов для других сторон. В случае трехфазных ветвей можно в него подставить трехчленные выражения и получить непосредственно

$$Z_A = Z_B + Z_C + \frac{Z_b \cdot [Z]_{ac} + Z_c \cdot [Z]_{ab} - Z_a \cdot [Z]_{bc}}{[Z]_a}$$

или, приведя к общему знаменателю,

$$Z_A = \frac{Z_b \cdot ([Z]_a + [Z]_{ac}) + Z_c \cdot ([Z]_a + [Z]_{ab}) - Z_a [Z]_{bc}}{[Z]_a}, \tag{36}$$

т. е. уравнение того же типа, как и (34).

Если это уравнение выразить в проводимостях, поменяв местами большие и малые индексы,

$$Y_a = \frac{Y_B \cdot ([Y]_A + [Y]_{AC}) + Y_C \cdot ([Y]_A + [Y]_{AB}) - Y_A \cdot [Y]_{BC}}{[Y]_A}, \tag{37}$$

то оно будет служить для перехода от треугольника к звезде. Если такую замену произвести в уравнении (34)

$$Y_A = \frac{Y_b \cdot ([Y]_c + [Y]_{ac}) + Y_c \cdot ([Y]_b + [Y]_{ab}) - Y_a \cdot [Y]_{bc}}{[Y]_{a+b+c}}, \tag{38}$$

то получим выражение, служащее для перехода от звезды к треугольнику.

Если для какой-либо части цепи имеется в каждой фазе П- или Т-образная схема замещения, то их можно рассматривать как треугольник и звезду (рис. 3а и 3б). При этом в первой из них точки q и p (нейтраль) для составляющих прямой и обратной последовательностей будут одного потенциала, т. е. их можно считать за одну. Из этого следует, что для перехода от одной схемы к другой могут быть использованы уравнения (34), (36), (37) и (38). Подобные же соотношения могут быть получены и для других случаев преобразования цепей.

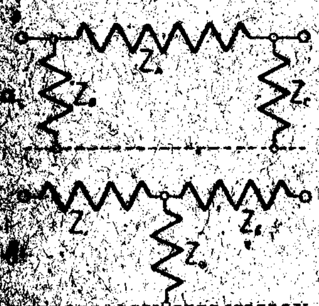

Рис. 3

Выражения для тока, напряжения и мощности

В некоторых случаях оказывается удобным введение для тока и напряжения выражений, аналогичных трехчленам сопротивлений и проводимостей. Так как при этом составляющие нулевой последовательности U_0 и I_0 в расчетах не участвуют, то выражения получают форму двухчленов,

$$U = \alpha . U_I + \beta . U_{II}; \quad I = \alpha . I_I + \beta . I_{II}. \tag{39}$$

При перемножениях по уравнениям типа закона Ома

$$U = Z \times I; \quad I = Y \times U$$

таковое может быть произведено обычным алгебраическим путем, но единичным векторам α и β при этом следует приписать иные свойства, чем это было сделано выше при действиях только с сопротивлениями и проводимостями. Введя соотношения

$$\alpha \times \alpha = \beta; \quad \beta \times \beta = \alpha; \quad \alpha \times \beta = 0, \tag{40}$$

получаем

$$\alpha.U_I+\beta.U_{II}=(Z_0+\alpha.Z_I+\beta.Z_{II})\times(\alpha.I_I+\beta.I_{II})=\alpha.(I_I.Z_0+I_{II}.Z_{II})+$$
$$+\beta.(I_I.Z_I+I_{II}.Z_0);$$
$$\alpha.I_I+\beta.I_{II}=(Y_0+\alpha.Y_I+\beta.Y_{II})\times(\alpha.U_I+\beta.U_{II})=\alpha.(U_I.Y_0+U_{II}.Y_{II})+$$
$$+\beta.(U_I.Y_I+U_{II}.Y_0),$$

что полностью соответствует соотношениям (3) и (4).

Для того чтобы свойства коэфициентов α и β при этих двух случаях перемножений не путались, в последних уравнениях введен перекрестный знак умножения вместо точки, хотя и без этого ошибиться почти невозможно.

Точечное и перекрестное умножение в этих двух случаях соответствует двум различным видам умножений в векторной алгебре, в методе комплексных векторов и в применениях тензорного анализа. Во всех этих случаях единичным векторам приписываются два различных типа свойств при различных операциях с ними.

Если умножить выражение тока на выражение сопряженных напряжений

$$(\alpha.I_I+\beta.I_{II})\times(\alpha.\hat{U}_I+\beta.\hat{U}_{II}),$$

то, приняв во внимание соотношения (40), получаем

$$(\alpha.I_I+\beta.I_{II})\times(\alpha.\hat{U}+\beta.\hat{U}_{II})=\beta.\hat{U}_I\cdot I_I+\alpha.\hat{U}_{II}.I_{II}.$$

Если в этом выражении отбросить коэфициенты последовательности, не играющие никакой роли для мощности, то получим мощность одной фазы. Таким образом, при

$$\hat{U}=\alpha.\hat{U}_I+\beta.\hat{U}_{II};\quad I=\alpha.I_I+\beta.I_{II}$$

значение мощности находится непосредственно из

$$P=3.(I\times\hat{U}) \tag{41}$$

с отбрасыванием коэфициентов последовательности в окончательном результате.

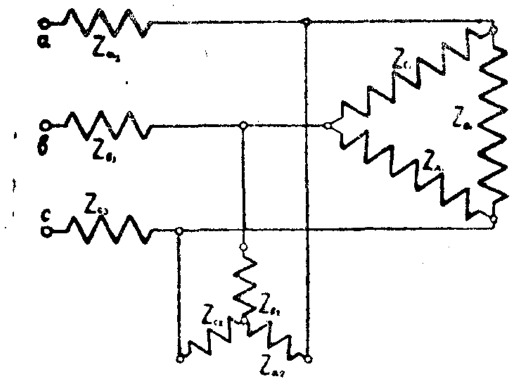

Рис. 4

ПРИМЕР 1. Дана трехфазная цепь по схеме рисунка 4. Сопротивления отдельных фаз равны:

1) треугольник—$Z_{A1}=Z_{B1}=Z_{C1}=12-j.9\,\Omega$;

2) звезда—$Z_{a2}=6+j.0\,\Omega$; $\quad Z_{b2}=Z_{c2}=3+j.6\,\Omega$

и, кроме того, индуктивная связь между фазами b и c

$$H_{A2}=-j.3\,\Omega;$$

3) последовательная часть (провода)—$Z_{a3}=Z_{b3}=Z_{c3}=2+j.1\,\Omega$.

Напряжения сети симметричны по 220 вольт в фазе, т. е. линейные по 380 вольт. Найти распределение токов.

Решение. Для треугольника сопротивления эквивалентной звезды будут равны

$$Z_{a1}=Z_{b1}=Z_{c1}=\frac{Z_{A1}}{3}=4-j.3\,\Omega,$$

что дает для составляющих сопротивлений значения

$$Z'_{01} = Z''_{01} = 4 - j.3\,\Omega; \qquad Z_{I_1} = Z_{II_1} = 0$$

или в форме трехчлена

$$Z_1 = (4 - j.3) + (\alpha + \beta).0.$$

Для звезды составляющие сопротивлений будут равны

$$Z'_{02} = Z''_{02} = 4 + j.5\,\Omega;$$
$$Z_{I_2} = Z_{II_2} = 1 - j.4\,\Omega$$

или в форме трехчлена

$$Z_2 = (4 + j.5) + (\alpha + \beta).(1 - j.4).$$

В последовательной части цепи составляющие будут

$$Z'_{03} = Z''_{03} = 2 + j.1\,\Omega; \qquad Z_{I_3} = Z_{II_3} = 0$$

или в форме трехчлена

$$Z_3 = (2 + j.1) + (\alpha + \beta).0.$$

Соответствующие трехчлены проводимостей будут

$$Y_1 = \frac{\hat{Z}_1}{[Z]_1} = (0{,}16 + j.0{,}12) + (\alpha + \beta).0;$$

$$Y_2 = \frac{\hat{Z}_2}{[Z]_2} = (0{,}1128 - j.0{,}0693) + (\alpha + \beta).(0{,}0795 + j.0{,}0308);$$

$$Y_3 = \frac{\hat{Z}_3}{[Z]_3} = (0{,}40 - j.0{,}20) + (\alpha + \beta).0.$$

Найдем проводимость разветвления

$$Y_4 = Y_1 + Y_2 = (0{,}2728 + j.0{,}0507) + (\alpha + \beta).(0{,}0795 + j.0{,}0308).$$

По уравнениям (17) находим значения

$$[Y]_3 = 0{,}120 - j.0{,}160;$$
$$[Y]_4 = 0{,}0665 + j.0{,}0228;$$
$$[Y]_{3+4} = 0{,}4250 + j.0{,}2059,$$

что дает по уравнению (32) общую проводимость цепи

$$Y = \frac{Y_3.[Y]_4 + Y_4.[Y]_3}{[Y]_{3+4}} = (0{,}1758 - j.0{,}0130) + (\alpha + \beta).(0{,}0359 - j.0{,}038),$$

то есть

$$Y'_0 = Y''_0 = 0{,}1758 - j.0{,}0130; \qquad Y_I = Y_{II} = 0{,}0359 - j.0{,}038.$$

Так как напряжение имеет только составляющую прямой последовательности, то

$$U = \alpha.(220 + j.0) + \beta.0,$$

а токи, поступающие из сети, будут равны

$$\check{I} = U \times Y = \alpha.(38{,}68 - j.2{,}86) + \beta.(7{,}90 - j.8{,}36).$$

Подобным же путем найдутся напряжение в месте разветвления и токи в звезде и треугольнике.

Полученное выражение двухчлена токов дает возможность легко определить токи в фазах

$$I_a = (38{,}68 - j\,2{,}86) + (7{,}90 - j\,8{,}36) = 46{,}58 - j\,11{,}22\,A;$$
$$I_b = a^2\,(38{,}68 - j\,2{,}86) + a.\,(7{,}80 - j\,8{,}36) = -18{,}54 - j\,21{,}05\,A;$$
$$I_c = a.(38{,}68 - j\,2{,}86) + a^2.(7{,}90 - j\,8{,}36) = -28{,}04 + j\,32{,}27\,A.$$

Мощность, поступающая из сети, находится по уравнению (41)

$$P = 3.(I \times \hat{U}) = 3.(38{,}68 - j.2{,}86).220 = 25500 - j.1900\,W.$$

Матричная форма выражений

Приведенные выше трехчленные формы выражений для составляющих сопротивлений и проводимостей могут быть использованы только для статических цепей, так как в этом случае обе составляющие нулевого порядка одинаковы и могут быть заменены одной. При их отличии можно использовать матричную форму выражений, упоминавшуюся выше. Для сопротивлений и проводимостей получаются квадратные матрицы

$$Z = \begin{bmatrix} Z'_0; & Z_{II} \\ Z_I; & Z''_0 \end{bmatrix}; \qquad Y = \begin{bmatrix} Y'_0; & Y_{II} \\ Y_I; & Y''_0 \end{bmatrix}, \tag{42}$$

а для токов и напряжений—прямоугольные

$$I = \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \end{bmatrix}; \qquad U = \begin{bmatrix} U_I \\ U_{II} \end{bmatrix}. \tag{43}$$

Для данной формы матриц соотношения между токами и напряжениями типа закона Ома следует записывать в виде

$$U = Z.I; \qquad I = Y.U, \tag{44}$$

причем эти произведения не коммутативны и сомножители не могут меняться местами. Производя все действия по правилам матричной алгебры, можно получить соотношения, аналогичные приведенным выше для трехчленов.

В качестве примера найдем сопротивление двух параллельных ветвей, которое может быть записано в виде

$$Z = (Z_A^{-1} + Z_B^{-1})^{-1} = (Y_A + Y_B)^{-1}.$$

Так как

$$Y_A = Z_A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} Z''_{0A}; & -Z_{IIA} \\ -Z_{IA}; & Z'_{0A} \end{bmatrix}}{D_A}; \quad Y_B = Z_B^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} Z''_{0B}; & -Z_{IIB} \\ -Z_{IB}; & Z'_{0B} \end{bmatrix}}{D_B};$$

где D_A и D_B являются определителями, составленными по матрицам

$$D_A = \begin{vmatrix} Z'_{0A}; & Z_{IIA} \\ Z_{IA}; & Z''_{0A} \end{vmatrix}; \qquad D_B = \begin{vmatrix} Z'_{0B}; & Z_{IIB} \\ Z_{IB}; & Z''_{0B} \end{vmatrix},$$

то общее сопротивление будет равно

$$Z = (Y_A + Y_B)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} (Y''_{0A} + Y''_{0B}); & -(Y_{IIA} + Y_{IIB}) \\ .\ (Y_{IA} + Y_{IB}); & (Y'_{0A} + Y'_{0B}) \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} Y''_{0A} + Y''_{0B}; & Y_{IIA} + Y_{IIB} \\ Y_{IA} + Y_{IB}; & Y'_{0A} + Y'_{0B} \end{vmatrix}}.$$

Подставляя значения для проводимостей, имеем

$$Z = \frac{\begin{bmatrix} \dfrac{Z'_{0A}}{D_A} + \dfrac{Z'_{0B}}{D_B}; & \dfrac{Z_{IIA}}{D_A} + \dfrac{Z_{IIB}}{D_B} \\ \dfrac{Z_{IA}}{D_A} + \dfrac{Z_{IA}}{D_A}; & \dfrac{Z''_{0A}}{D_A} + \dfrac{Z''_{0B}}{D_B} \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{Z'_{0A}}{D_A} + \dfrac{Z'_{0B}}{D_B}; & \dfrac{Z_{IIA}}{D_A} + \dfrac{Z_{IIB}}{D_B} \\ \dfrac{Z_{IA}}{D_A} + \dfrac{Z_{IB}}{D_B}; & \dfrac{Z''_{0A}}{D_A} + \dfrac{Z''_{0B}}{D_A} \end{vmatrix}} = \frac{D_A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} Z'_{0A}; & Z_{IIA} \\ Z_{IA}; & Z''_{0A} \end{bmatrix} + D_B^{-1} \cdot \begin{bmatrix} Z'_{0B}; & Z_{IIB} \\ Z_{IB}; & Z''_{0B} \end{bmatrix}}{D_A^{-1}.D_B^{-1} \cdot \begin{vmatrix} Z'_{0A} + Z'_{0B}; & Z_{IIA} + Z_{IIB} \\ Z_{IA} + Z_{IB}; & Z''_{0A} + Z''_{0B} \end{vmatrix}}$$

или

$$Z = \frac{D_B . Z_A + D_A . Z_B}{D_{A+B}}, \qquad (45)$$

что полностью сходится с выражением (31) для трехчленов. Подобные же сходства будут иметь место и при других преобразованиях.

Если из выражения (45) определить значение составляющих нулевого порядка

$$Z'_0 = \frac{D_B . Z'_{0A} + D_A . Z'_{0B}}{D_{A+B}}; \; Z''_0 = \frac{D_B . Z''_{0A} + D_A . Z''_{0B}}{D_{A+B}},$$

то легко видеть, что их можно получить и из трехчленного выражения, находя составляющую

$$Z_0 = \frac{[Z]_B . Z_{0A} + [Z]_A . Z_{0B}}{[Z]_{A+B}}$$

и беря в одном случае значения Z'_{0A} и Z'_{0B}, а во втором случае—Z''_{0A} и Z''_{0B}, считая при этом

$$[Z] = D = Z'_0 . Z''_0 - Z_I . Z_{II}. \qquad (46)$$

Так как все преобразования для трехчленов проще чем для матриц, то удобнее и в случае нестатических цепей все преобразования и выводы производить в форме трехчленов, принимая во внимание соотношения типа (46) и подставляя различные значения Z'_0 и Z''_0 только при нахождении соответствующих составляющих. При этом выражения типа $[Z]_{AB}$ принимают вид

$$[Z]_{AB} = \frac{Z'_{0A} . Z''_{0B} - Z''_{0A} . Z'_{0B}}{2} - \frac{Z_{IA} . Z_{IIB} + Z_{IIA} . Z_{IB}}{2}, \qquad (47)$$

все же остальное не изменяется.

Матричная форма выражений может быть распространена и на цепи с нулевыми составляющими токов, т. е. на случаи, когда приходится учитывать все три составляющих сопротивлений и проводимостей.

Многополюсники

Широко известными являются четырехполюсники, которые играют очень большую роль при исследовании однофазных цепей. Эти четырехполюсники обладают свойством, дающим возможность любой ток и напряжение разлагать на две части, соответствующие режиму холостого хода и режиму короткого замыкания данной цепи, что позволяет упрощать решение различных вопросов, связанных с этой цепью.

В трехфазных цепях четырехполюсники используются обычно лишь на одну фазу симметричной цепи, хотя их свойства могут быть распространены и на любую несимметричную многофазную цепь. Конечно, при этом число зажимов увеличивается, и для трехфазной цепи без нулевого провода достигает шести, а с нулевым проводом семи или восьми. При отсутствии нулевого провода для использования свойств получающихся шестиполюсников очень удобно применение трехчленов.

Предположим, что имеется участок трехфазной цепи, у которого три зажима являются входными, а три других—выходными. Первые из них через какую-то цепь соединены с генератором, а ко вторым приключается нагрузка или дальнейшая часть цепи. Напряжение и ток нагрузочного конца обозначим через U_2 и I_2, причем будем помнить, что они представляют собою двухчленные выражения типа (39). Соответственно для генераторных зажимов введем обозначения U_1 и I_1.

Пусть данный участок цепи приведен к Т-образной форме схемы замещения фазы, представленной на рисунке 5.

Последовательные сопротивления соответственно равны

$$Z_1 = Z_{01} + \alpha . Z_{I1} + \beta . Z_{II1};$$
$$Z_2 = Z_{02} + \alpha . Z_{I2} + \beta . Z_{II}, \tag{48}$$

а проводимость на нейтраль

$$Y_n = Y_{on} + \alpha . Y_{In} + \beta . Y_{IIn}. \tag{49}$$

Поступая как для обычных комплексов при рассмотрении четырехполюсников, найдем для шестиполюсника напряжение в точке m

$$U_m = U_2 + I_2 . Z_2,$$

ток в ответвлении

$$I_n = U_m . Y_n = U_2 . Y_n + I_2 . Z_2 . Y_n,$$

общий ток, поступающий из сети

$$I_1 = I_2 + I_n = U_2 . Y_n + I_2 . (Z_2 . Y_n + 1)$$

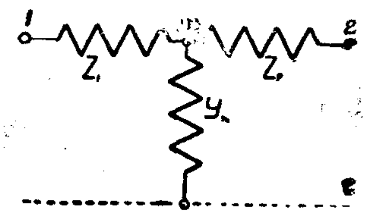

Рис. 5

и напряжение сети

$$U_1 = U_m + I_1 . Z_1 = U_2 . (Z_1 . Y_n + 1) + I_2 . (Z_1 . Z_2 . Y_n + Z_1 + Z_2).$$

Последние два выражения показывают, что в шестиполюснике, как и в четырехполюснике, между токами и напряжениями имеются связи в виде уравнений

$$U_1 = A . U_2 + B . I_2;$$
$$I_1 = C . U_2 + D . I_2. \tag{50}$$

Для рассматриваемой Т-образной схемы замещения коэфициенты A, B, C и D (постоянные шестиполюсника) равны

$$A = (Z_1 . Y_n + 1);\quad B = (Z_1 . Z_2 . Y_n + Z_1 + Z_2);$$
$$C = Y_n;\qquad D = (Z_2 . Y_n + 1). \tag{51}$$

Для других схем эти коэфициенты будут соответственно иными [например, выражения (86)].

Уравнения (50) являются основными соотношениями для шестиполюсника, причем входящие в них члены могут быть выражены не только в трехчленной форме, но и в виде матриц. В последнем случае их можно распространить и на цепи с нулевым проводом, т. е. на семи- и восьмиполюсники.

В некоторых случаях уравнения (50) оказывается удобным объединять в одно матричное выражение вида

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A; B \\ C; D \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}, \tag{52}$$

независимо от того, выражены ли их члены в форме трехчленов или также в форме матриц.

Так как уравнения (50) и (52) ничем не отличаются от соответствующих уравнений четырехполюсника, то все свойства последних могут быть целиком перенесены на коэфициенты шестиполюсника. Так, обязательно должно существовать соотношение

$$A . D - B . C = 1 \qquad \text{или} \qquad \begin{vmatrix} A; B \\ C; D \end{vmatrix} = 1. \tag{53}$$

Если шестиполюсник симметричен в отношении входных и выходных зажимов, то коэфициенты A и D должны быть одинаковы. Это хорошо видно из выражений (51), а также из обратного соотношения

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A;B \\ C;D \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} D;-B \\ -C;A \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} A;B \\ C;D \end{vmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D;-B \\ -C;A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix},$$

что даст для обратного включения шестиполюсника (т. е. для перестановки U_1 и U_2)

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D;B \\ C;A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Чтобы при таком обратном включении остались прежние соотношения, необходимо соблюдение условия $A = D$.

Уравнения (50) показывают, что для режима холостого хода ($I_2 = 0$) получаем соотношения

$$U_{1xx} = A.U_2;\ I_{1xx} = C.U_2, \tag{54}$$

а для режима короткого замыкания ($U_2 = 0$),

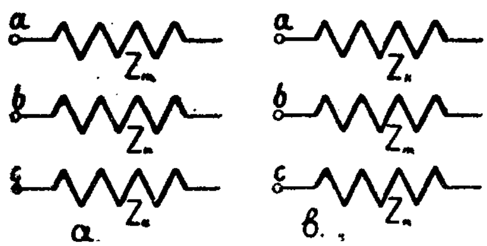

Рис. 6

$$U_{1кз} = B.I_2;\ I_{1кз} = D.I_2 \tag{55}$$

или при нормальной работе с нагрузкой

$$U_1 = U_{1xx} + U_{1кз};\ I_1 = I_{1xx} + I_{1кз}. \tag{56}$$

Эти соотношения дают возможность находить распределение тока при нагрузке как результат наложения режима короткого замыкания на режим холостого хода.

Выясним изменение коэфициентов A, B, C и D при переключении фаз несимметричной цепи. Предположим, что даны значения для одного какого-то включения зажимов шестиполюсника, а затем заменим их в круговом порядке, как это изображено на рисунках 6a и 6b. При первом включении трехчлен сопротивления будет

$$Z_{(a)} = \frac{Z_m + Z_n + Z_k}{3} + \alpha . \frac{Z_m + a.Z_n + a^2.Z_k}{3} + \\ + \beta . \frac{Z_m + a^2.Z_n + a.Z_k}{3},$$

а при втором включении

$$Z_{(b)} = \frac{Z_m + Z_n + Z_k}{3} + \alpha . \frac{a.Z_m + a^2.Z_n + Z_k}{3} + \\ \beta \frac{a^2.Z_m + a.Z_n + Z_k}{3}.$$

Таким образом, если при начальном включении было

$$Z_{(a)} = Z_0 + \alpha . Z_I + \beta . Z_{II},$$

то после переключения на одну фазу в порядке прямого следования будем иметь

$$Z_{(b)} = Z_0 + \alpha . a . Z_I + \beta . a^2 . Z_{II}, \tag{57}$$

а при переключении еще на одну фазу

$$Z_{(c)} = Z_0 + \alpha . a^2 . Z_I + \beta . a . Z_{II}.$$

Соответственно будут изменяться и составляющие для проводимостей.

Если теперь обратиться к выражениям (51), то легко заметить, что такая же закономерность будет иметься и для коэфициентов шестиполюсника. Если, например, при каком-то включении имелось значение

$$B_{(a)} = B_0 + \alpha . B_I + \beta . B_{II},$$

то при переключении зажимов на одну фазу в прямом порядке будем иметь

$$B_{(b)} = B_0 + \alpha . a . B_I + \beta . a^2 . B_{II}, \tag{58}$$

а при переключении на две фазы

$$B_{(c)} = B_0 + \alpha . a^2 . B_I + \beta . a . B_{II}.$$

Если в данной части цепи имеются только последовательно включенные сопротивления, т. е. отсутствуют проводимости между фазами, то в уравнениях шестиполюсника следует положить $Y = 0$, что дает для коэфициентов значения

$$A = D = 1; \quad B = Z_1 + Z_2 = Z; \quad C = O, \tag{59}$$

причем

$$U_1 = U_2 + B . I_2; \quad I_1 = I_2.$$

Наоборот, если шестиполюсник состоит только из проводимостей между фазами, то, полагая $Z = 0$, получаем

$$A = D = 1; \quad B = 0; \quad C = Y, \tag{60}$$

причем

$$U_1 = U_2; \quad I_1 = C . U_2 + I_2.$$

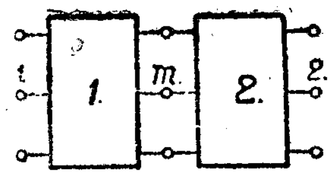

Рис. 7

Последовательное включение шестиполюсников

При последовательном включении двух шестиполюсников (рис. 7) имеем для каждого из них соотношения

$$\begin{bmatrix} U_m \\ I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2; B_2 \\ C_2; D_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1; B_1 \\ C_1; D_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} U_m \\ I_m \end{bmatrix}.$$

Подставляя первое из них во второе, получаем

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1; B_1 \\ C_1; D_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_1; B_2 \\ C_2; D_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A; B \\ C; D \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix},$$

откуда

$$\begin{bmatrix} A; B \\ C; D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1; B_1 \\ C_1; D_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_2; B_2 \\ C_2; D_2 \end{bmatrix}. \tag{61}$$

Производя умножение матриц, находим

$$\begin{aligned} A &= A_1 . A_2 + B_1 . C_2; \qquad & B &= A_1 . B_2 + B_1 . D_2; \\ C &= A_2 . C_1 + D_1 . C_2; \qquad & D &= C_1 . B_2 + D_1 . D_2. \end{aligned} \tag{62}$$

Если каждый из шестиполюсников был симметричным по отношению своих зажимов (т. е. $A_1 = D_1$ и $A_2 = D_2$), но сами шестиполюсники не были одинаковыми, то из-за неравенства $B_1 . C_2 \neq B_2 . C_1$ получившийся общий шестиполюсник уже не будет иметь симметрии (так как при этом $A \neq D$).

При большем числе шестиполюсников, соединенных последовательно, соответственно имеем

$$\begin{bmatrix} A; B \\ C; D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1; B_1 \\ C_1; D_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_2; B_2 \\ C_2; D_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} A_n; B_n \\ C_n; D_n \end{bmatrix}, \tag{63}$$

причем, если все шестиполюсники одинаковы, получаем

$$\begin{bmatrix} A; B \\ C; D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1; B_1 \\ C_1; D_1 \end{bmatrix}^n \tag{64}$$

где n их число. В этом случае удобно переходить к гиперболическим функциям, как это сделано ниже при рассмотрении длинных линий.

При устройстве линий передач для получения симметрии фаз применяется транспозиция проводов с таким расчетом, чтобы треть всей длины несимметрия была в одной фазе, вторую треть—в другой и третью треть—в последней фазе. Полагая каждый участок как шестиполюсник, имеем в простейшем случае три участка

$$\begin{bmatrix} A_1; B_1 \\ C_1; D_1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} A_2; B_2 \\ C_2; D_2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} A_3; B_3 \\ C_3; D_3 \end{bmatrix},$$

причем из-за перемены фаз местами между коэфициентами их будут иметься соотношения типа (58). Если найти произведение этих трех матриц, т. е. определить значение коэфициентов для общего шестиполюсника всей линии

$$\begin{bmatrix} A; B \\ C; D \end{bmatrix},$$

то можно убедиться, что эти коэфициенты все-таки будут иметь члены с множителями α и β, т. е. фазы общего шестиполюсника не будут иметь полной симметрии. Для получения полной симметрии средний шестиполюсник должен несколько отличаться от крайних, но остающаяся несимметрия обычно очень невелика и ею можно свободно пренебрегать.

Ввиду сложности вывода в общем виде таковой здесь не приводится, убедиться же в этом легко на любом частном числовом примере.

При отсутствии проводимостей между фазами коэфициенты A и D превращаются в единицы (если это не трансформаторы), а C—в нули [уравн. (59)], и соотношение (63) дает

$$\begin{bmatrix} A; B \\ C; D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1; B_1 + B_2 + B_3 \ldots + B_n \\ 0 \qquad 1 \end{bmatrix},$$

то-есть

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + \ldots + B_n = \Sigma . B_n$$

или

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots + Z_n = \Sigma Z_n,$$

как при простом последовательном соединении.

Параллельное включение шестиполюсников

В некоторых случаях может встретиться необходимость заменить два параллельных шестиполюсника одним, т. е. найти общий эквивалентный шестиполюсник (например, при параллельной работе трансформаторов). Для таких шестиполюсников общими будут напряжения U_1 и U_2, а токи будут суммироваться

$$I_1 = I_{1m} + I_{1n}; \quad I_2 = I_{2m} + I_{2n}.$$

По уравнениям (50) для каждого из них

$$
\begin{aligned}
U_1 &= A_m \cdot U_2 + B_m \cdot I_{2m}; \qquad & U_1 &= A_n \cdot U_2 + B_n \cdot I_{2n}. \\
I_{1m} &= C_m \cdot U_2 + D_m \cdot I_{2m}; \qquad & I_1 &= C_n \cdot U_2 D_n \cdot I_{2n}.
\end{aligned}
\tag{65}
$$

Исключая из каждой пары уравнений токи I_{2m} и I_{2n}, находим

$$I_{1m} = \frac{D_m \cdot U_1 - U_2}{B_m}\ ; I_{1n} = \frac{D_n \cdot U_1 - U_2}{B_n}. \tag{66}$$

Общий ток, равный их сумме, будет

$$I_1 = I_{1m} + I_{1n} = \frac{D_m \cdot U_1 - U_2}{B_m} + \frac{D_n \cdot U_1 - U_2}{B_n},$$

или, после приведения к общему знаменателю,

$$I_1 = \frac{\dfrac{D_m \cdot B_n + D_n \cdot B_m}{B_m + B_n}\, U_1 - U_2}{\dfrac{B_m \cdot B_n}{B_m + B_n}}.$$

Сравнивая с выражением (66), видим, что для общего шестиполюсника должны иметься соотношения

$$B = \frac{B_m \cdot B_n}{B_m + B_n}; D = \frac{D_m \cdot B_n + D_n \cdot B_m}{B_m + B_n}. \tag{67}$$

Определяя из первых уравнений (65) значения I_{2m} и I_{2n}

$$I_{2m} = \frac{U_1 - A_m \cdot U_2}{B_m}\ ; I_{2n} = \frac{U_1 - A_n \cdot U_2}{B_n} \tag{68}$$

и суммируя их, находим

$$I_2 = I_{2m} + I_{2n} = \frac{U_1 - \dfrac{A_m \cdot B_n + A_n \cdot B_m}{B_m + B_n} \cdot U_2}{\dfrac{B_m \cdot B_n}{B_m + B_n}},$$

откуда получаем для общего шестиполюсника

$$A = \frac{A_m \cdot B_n + A_n \cdot B_m}{B_m + B_n}. \tag{69}$$

Наконец, для коэфициента C значение может быть найдено из соотношения (53)

$$C = \frac{A \cdot D - 1}{B} = \frac{A \cdot D}{B} - \frac{1}{B},$$

которое после подстановки из (67) и (69) дает

$$C = \frac{C_m \cdot B_n + C_n \cdot B_m}{B_m + B_n} + \frac{A_m \cdot D_n + A_n \cdot D_m}{B_m + B_n} - \frac{2}{B_m + B_n}. \tag{70}$$

Все эти выражения могут быть легко вычислены при помощи трехчленов. Так, например, уравнение (67) дает для B выражение

$$B = \frac{B_m \cdot B_n}{B_m + B_n} = \frac{[B]_m \cdot B_n + [B]_n \cdot B_m}{[B]_{m+n}} \tag{71}$$

При отсутствии приводимостей между фазами коэфициенты A и D обращаются в единицы (если это не трансформаторы), а C—в нуль, и уравнение (71) полностью совпадает с уравнением (31) для двух параллельных участков трехфазной цепи.

Трансформаторы

Всякий трансформатор для трехфазной цепи без нулевых проводов представляет шестиполюсник, причем в большинстве случаев последний будет симметричным (для приведенных обмоток) и с симметричными фазами.

Так как для такого трансформатора будут иметься составляющие сопротивлений и проводимостей только нулевого порядка $Z'_{от} = Z''_{от}$ и $Y' = Y''_{o}$, то схема замещения, соответствующая рисунку 5, будет иметь

$$Z_1 = Z_2 = \frac{1}{2} . Z'_{от} \ ; \ Y_п = Y'_o.$$

По уравнениям (51) коэфициенты такого шестиполюсника равны

$$A = D = \frac{1}{2} \cdot Z'_{от} . Y'_o + 1;$$

$$B = \frac{1}{4} \cdot (Z'_{от})^2 . Y'_o + Z'_{от} \ ; \ C = Y'_o. \tag{72}$$

Если для упрощения вместо Т-образной схемы взять Г-образную, то полагая $Z' = 0$ и $Z_2 = Z'_{от}$, найдем

$$A = 1 ; \quad B = Z'_{от}; \quad C = Y'_o; \quad D = Z'_{от} . Y'_o + 1 \cong 1. \tag{73}$$

Эти значения дают более простые соотношения, получающаяся же при этом погрешность очень мала и ею можно свободно пренебрегать. В большинстве случаев можно вообще пренебрегать намагничивающими токами, т. е. полагать Y'_o равными нулю, что дает значения A и D равными единице, а C—равным нулю.

При этом всегда следует учитывать возможный поворот вторичных векторов по отношению к первичным, происходящий в связи с типом соединения обмоток и разметкой зажимов. Для соединений первой группы (звезда—звезда или треугольник—треугольник) поворота или не будет совсем, или же он будет на 180°. В последнем случае все коэфициенты шестиполюсника следует взять с обратными знаками, т. е. умножить их на—1.

Для второй группы соединений (звезда—треугольник или звезда—зигзаг) при разметке зажимов по противолежащей фазе получается поворот векторов на 90° в ту или иную сторону, что вызывает необходимость в умножении всех коэфициентов шестиполюсника на $+j$ или $-j$. Если при этом еще изменить разметку зажимов, то приходится добавочно вводить множители поворота на 120°, т. е. значения a или a^2.

Для этой группы трансформаторов все сопротивления вторичной цепи (нагрузки) следует брать с изменением несимметрии на противоположную, т. е. вместо трехчленов сопротивлений или проводимостей брать сопряженные с ними трехчлены.

Если трансформатор имеет несимметричные фазы, что может быть при схеме открытого треугольника, неодинаковости магнитных цепей, неправильного соединения обмоток и т. д., то сопротивления Z_1 и Z_2 и проводимость $Y_п$ будут иметь форму трехчленов. Так, при схеме открытого треугольника с общей точкой в фазе „а" эти трехчлены для Т-образной схемы замещения будут

$$Z' = Z_2 = \frac{1}{3} \cdot Z_{кз} - (\alpha + \beta) \cdot \frac{1}{6} Z_{кз}\,; \quad Y_п = 2\,Y_{xx} + (\alpha + \beta) \cdot \frac{1}{2} \cdot Y_{xx}, \tag{74}$$

где $Z_{кз}$ — сопротивление при коротком замыкании одной фазы трансформатора, а Y_{xx} — проводимость одной фазы при холостом ходе.

Коэфициенты шестиполюсника могут быть найдены и без приведения обмоток трансформатора к одному напряжению, а с непосредственным учетом коэфициента трансформации. В этом случае вторичные напряжения должны быть увеличены в $n = \frac{w_2}{w_1}$ раз, а вторичные токи уменьшены во столько же раз против приведенных значений. Следовательно, новые коэфициенты будут иметь значения

$$A' = A \cdot \frac{1}{n}; \; B' = B \cdot n; \; C' = C \cdot \frac{1}{n}; \; D' = D \cdot n \tag{75}$$

с учетом соединения обмоток так, как это указано выше.

При параллельном соединении двух трансформаторов с различными коэфициентами трансформации между ними будут протекать уравнительные токи, которые при несимметрии фаз также будут несимметричными. Определение этих токов показано на следующем примере.

ПРИМЕР 2. Два трансформатора включены на параллельную работу. Один из них имеет симметричное соединение звезда—звезда с коэфициентом трансформации 10 и сопротивлением короткого замыкания фазы 5 ом, а второй соединен по схеме открытого треугольника с общей вершиной в фазе „а", коэфициентом трансформации 8 и сопротивлением короткого замыкания 18 ом. Трансформаторы повышающие, первичное линейное напряжение 220 вольт. Найти токи в обмотках и вторичное напряжение при холостом ходе и определить коэфициенты шестиполюсника общего соединения. Намагничивающими токами и активными сопротивлениями обмоток пренебречь.

Решение. В соответствии с соотношениями (73) и (75) для первого трансформатора получаем

$$A'_m = 0{,}1; \; B'_m = j \cdot 50; \; C'_m = 0; \; D'_m = 10,$$

а для второго по тем же соотношениям и по (74)

$$A'_n = 0{,}125; \; B'_n = j \cdot 48 - (\alpha + \beta)\, j \cdot 3; \; C'_n = 0; \; D'_n = 8.$$

Уравнения (67) и (69) дают три коэфициента общего шестиполюсника

$$A' = 0{,}113 + (\alpha + \beta) \cdot 0{,}0004; \; B' = j \cdot 24{,}42\,(\alpha + \beta) \cdot j \cdot 0{,}78;$$

$$D' = 8{,}97 - (\alpha + \beta) \cdot 0{,}031.$$

Четвертый коэфициент определяем или по (70) или же по соотношению (53). Беря последнее, имеем

$$C' = \frac{A' \cdot D' - 1}{B'} = -j \cdot 0{,}000511 - (\alpha + \beta) \cdot j \cdot 0{,}0000157,$$

т. е. отличное от нуля значение, несмотря на то, что C'_m и C'_n равны нулю. Из уравнений (54) находим для холостого хода вторичное напряжение

$$U_2 = \frac{U_1}{A'} = \alpha \cdot 1127 - \beta \cdot 3{,}9$$

и общий ток холостого хода

$$I_{1xx} = C \cdot U_2 = -\alpha \cdot j \cdot 0{,}575 - \beta \cdot j \cdot 0{,}0157.$$

Таким образом, при холостом ходе вторичное фазовое напряжение будет иметь составляющую прямой последовательности 1127 вольт, что соответствует общему коэфициенту трансформации

$$n = \frac{1127}{127} = 8{,}85.$$

Найти токи отдельно для каждого из трансформаторов можно по уравнениям (50). Для первого из них имеем

$$I_{2m} = \frac{U_1 - A'_m . U_2}{B'_m} = -\alpha . j . 0{,}286 - \beta . j . 0{,}0078.$$

Так как нагрузки нет, то

$$I_{2n} = -I_{2m} = \alpha . j . 0{,}286 + \beta . j . 0{,}0078.$$

Для первичной цепи по уравнениям (50) получаем

$$I_{1m} = -\alpha . j . 2{,}860 - \beta . j . 0{,}0780$$

$$I_{1n} = \alpha . j . 2{,}296 + \beta . j . 0{,}0624,$$

что соответствует значениям мощности

$$P_m = -j . 630\,VA; \qquad P_n = j . 505\,VA.$$

Таким образом, первый трансформатор забирает из сети реактивную мощность, а второй часть ее возвращает обратно в сеть.

Цепи с равномерно распределенными параметрами

Определим значения постоянных шестиплюсника для длинной линии с несимметричными фазами. Типичными представителями такой линии являются система два провода—земля или система с заземленной фазой.

Определив трехчлен сопротивления на единицу длины линии по уравнениям (10) и проводимость между фазами, тоже в форме трехчлена, можем написать выражения для изменения напряжения и тока вдоль линии, считая расстояния от нагрузочного конца

$$dU = I . Z . dl; \qquad dI = U . Y dl.$$

Из этих соотношений находим

$$\frac{dU}{dl} = I . Z; \quad \frac{dI}{dl} = U . Y, \tag{76}$$

или, диференцируя и исключая ток или напряжение,

$$\frac{d^2U}{dl^2} = U . Z . Y; \quad \frac{d^2I}{dl^2} = I . Z . Y. \tag{77}$$

Так как Z и Y относятся к различным элементам цепи, то их произведение конечно не равно единице.

Известно, что решение подобного типа уравнений будет иметь вид

$$U = M . \mathrm{Ch}\,\gamma l + P . \mathrm{Sh}\,\gamma l.$$

Диференцируя дважды, получаем

$$\frac{d^2U}{dl^2} = M . \gamma^2 . \mathrm{Ch}\,\gamma l + P . \gamma^2 . \mathrm{Sh}\,\gamma l.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (77), получаем

$$(M.\mathrm{Ch}\,\gamma l+P.\mathrm{Sh}\,\gamma l).\gamma^2=(M.\mathrm{Ch}\,\gamma l+P.\mathrm{Sh}\,\gamma l).Z.Y$$

или

$$(\gamma^2-Z.Y)=0. \tag{78}$$

Так как значение γ не должно включать коэфициенты последовательности, а произведение $Z.Y$ их имеето, пределение значений может быть проведено путем введения единичной матрицы

$$E=\begin{bmatrix} 1;0 \\ 0;1 \end{bmatrix}.$$

Если значения Z и Y взять также в форме матриц, то определитель от матрицы

$$|\gamma^2.E-Z.Y|=0$$

будет являться характеристическим уравнением. Подставляя значения, имеем

$$\begin{vmatrix} (\gamma^2-Z_0.Y_0-Z_{II}.Y_I);(-Z_0Y_{II}+Z_{II}.Y_0) \\ (-Z_I.Y_0-Z_0.Y_I);(\gamma^2-Z_0.Y_0+Z_I.Y_{II}) \end{vmatrix}=0,$$

откуда

$$\gamma^4-2.\gamma^2.[ZY]+[Z].[Y]=0.$$

В этом выражении $[Z]$ и $[Y]$ — обычные произведения сопряженных трехчленов, а $[ZY]$ представляет подобное им выражение

$$[ZY]=Z_0.Y_0+\frac{1}{2}.(Z_I.Y_{II}+Z_{II}.Y_I). \tag{79}$$

Решая полученное биквадратное уравнение относительно γ^2, находим

$$\gamma^2=[ZY]\pm\sqrt{[ZY]^2-[Z].[Y]}. \tag{80}$$

Таким образом, уравнение будет иметь четыре корня, попарно отличающиеся только знаками

$$\left.\begin{aligned}\gamma_1&=\pm\sqrt{[ZY]+\sqrt{[ZY]^2-[Z].[Y]}},\\ \gamma_2&=\pm\sqrt{[ZY]-\sqrt{[ZY]^2-[Z].[Y]}}.\end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Полное решение диференциального уравнения (77) для напряжения получает вид

$$U_1=M.\mathrm{Ch}\,\gamma_1 l+N.\mathrm{Ch}\,\gamma_2 l+P.\mathrm{Sh}\,\gamma_1 l+Q.\mathrm{Sh}\,\gamma_2 l. \tag{82}$$

Для тока подобное же уравнение получаем, используя соотношение (76)

$$I=M.\frac{\gamma_1}{Z}.\mathrm{Sh}\,\gamma_1 l+N.\frac{\gamma_2}{Z}\mathrm{Sh}\,\gamma_2 l+P.\frac{\gamma_1}{Z}\mathrm{Ch}\,\gamma_1 l+Q.\frac{\gamma_2}{Z}.\mathrm{Ch}\,\gamma_2 l. \tag{83}$$

Для определения постоянных имеем пограничное условие для напряжения и тока нагрузки. Полагая $l=0$, получаем

$$U_2=M+N;\quad I_2=\frac{1}{Z}(P.\gamma_1+Q.\gamma_2). \tag{84}$$

Таким образом, оказываются определенными лишь суммы постоянных попарно, а не каждая из них отдельно.

Возьмем от уравнений (82) и (83) вторые производные и подставим их в уравнение (77). Тогда

$$U=\frac{1}{Z.Y}.M.\gamma^2.\mathrm{Ch}\,\gamma_1 l+N.\gamma_2^2.\mathrm{Ch}\,\gamma_2 l+P.\gamma_1^2.\mathrm{Sh}\,\gamma_1 l+Q.\gamma_2^2.\mathrm{Sh}\,\gamma_2 l);$$

$$I=\frac{1}{Z.Y}.\left(M.\frac{\gamma_1^3}{Z}\,\mathrm{Sh}\,\gamma_1 l+N.\frac{\gamma_2^3}{Z}\,\mathrm{Sh}\,\gamma_2 l+\right.$$

$$\left.+P.\frac{\gamma_1^3}{Z}\,\mathrm{Ch}\,\gamma_1 l+Q.\frac{\gamma_2^2}{Z}\,\mathrm{Ch}\,\gamma_2 l\right).$$

Если теперь вновь взять пограничные условия, то

$$U_2=\frac{M.\gamma_1^2+N.\gamma_2^2}{Z.Y};\quad I_2=\frac{1}{Z}.\frac{P.\gamma_1^3+Q.\gamma_2^3}{Z.Y}. \tag{84a}$$

Совместное решение уравнений (84) и (84a) дает значение всех четырех постоянных

$$M=\frac{U_2}{2}\left(1+\alpha.\frac{S}{R}+\beta.\frac{T}{R}\right);$$

$$N=\frac{U_2}{2}\left(1-\alpha\frac{S}{R}-\beta.\frac{T}{R}\right);$$

$$P=\frac{I_2}{2}.\frac{Z}{\gamma_1}.\left(1+\alpha.\frac{S}{R}+\beta.\frac{T}{R}\right);$$

$$Q=\frac{I_2}{2}.\frac{Z}{\gamma_2}.\left(1-\alpha.\frac{S}{R}-\beta.\frac{T}{R}\right), \tag{85}$$

где

$$R=\sqrt{[ZY]^2-[Z].[Y]},\quad S=Z_0.Y_I+Z_I.Y_0;\quad T=Z_0.Y_{II}+Z_{II}.Y_0.$$

Таким образом, коэфициенты шестиполюсника будут равны

$$A=D=\frac{1}{2}.\left[(\mathrm{Ch}\,\gamma_1 l+\mathrm{Ch}\,\gamma_2 l)+\alpha\frac{S}{R}(\mathrm{Ch}\,\gamma_1 l-\mathrm{Ch}\,\gamma_2 l)+\right.$$

$$\left.+\beta\frac{T}{R}(\mathrm{Ch}\,\gamma_1 l-\mathrm{Ch}\,\gamma_2 l)\right];$$

$$B=\frac{Z}{2}.\left[\left(\frac{1}{\gamma_1}\,\mathrm{Sh}\,\gamma_1 l+\frac{1}{\gamma_2}\,\mathrm{Sh}\,\gamma_2 l\right)+\alpha\frac{S}{R}\left(\frac{1}{\gamma_1}\,\mathrm{Sh}\,\gamma_1 l-\frac{1}{\gamma_1}\,\mathrm{Sh}\gamma_2 l\right)+\right.$$

$$\left.+\beta\frac{T}{R}\left(\frac{1}{\gamma}\,\mathrm{Sh}\,\gamma_1 l-\frac{1}{\gamma_2}\,\mathrm{Sh}\,\gamma_2 l\right)\right]; \tag{86}$$

$$C=\frac{1}{2.Z}.\left[(\gamma_1\,\mathrm{Sh}\,\gamma_1 l+\gamma_2\,\mathrm{Sh}\,\gamma_2 l)+\alpha\frac{S}{R}(\gamma_1\,\mathrm{Sh}\,\gamma l-\gamma_2\,\mathrm{Sh}\,\gamma_2 l)+\right.$$

$$\left.+\beta\frac{I}{R}(\gamma_1\,\mathrm{Sh}\,\gamma_1 l-\gamma_2\,\mathrm{Sh}\,\gamma l)\right].$$

Эти выражения являются точным решением вопроса о шестиполюснике, заменяющем линию с несимметричными фазами. При симметрии фаз, т. е. при $Z_I=Z_{II}=0$ и $Y_I=Y_{II}=0$, все выражения упрощаются и приобретают обычную форму

$$\gamma_1=\gamma_2=\sqrt{Z_0.Y_0}=\gamma;\quad A=D=\mathrm{Ch}\,\gamma l;\ B=Z_c\,\mathrm{Sh}\,\gamma l;\ C=\frac{1}{Z_c}\mathrm{Ch}\,\gamma l, \tag{87}$$

где

$$Z_c = \frac{Z}{\gamma} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}}$$

представляет волновое сопротивление линии.

В то время как в симметричной линии имеется одна система падающей и отраженной волны, имеющей коэфициент распространения γ и волновое сопротивление Z_c, в линии с несимметричными фазами будут иметься две системы волн с коэфициентами распространения γ_1 и γ_2 и волновыми сопротивлениями $Z_{c1} = \frac{Z}{\gamma_1}$ и $Z_{c2} = \frac{Z}{\gamma_2}$, причем последний будут иметь форму трехчленов, т. е. будут содействовать появлению несимметрии в токах и напряжениях.

Круговые диаграммы для шестиполюсника несимметричной трехфазной цепи

Круговые диаграммы являются прекрасным графическим средством исследования переменного режима работы электрической цепи и широко известны для однофазных и симметричных трехфазных цепей. При очень простом способе построения и достаточной точности результата они дают возможность легко и наглядно определять величину и сдвиги любых токов и напряжений рассматриваемой цепи, значения мощностей и ряд других величин.

Применение этих диаграмм для исследования трехфазных цепей с несимметричными фазами хотя и известно, но встречается очень редко и только как отдельные частные случаи. Введение трехчленов позволяет дать общий путь построения таких диаграмм, что сильно расширяет возможность использования таковых. Ниже приводится общая теория круговых диаграмм для цепей с несимметричными фазами и дается путь их построения.

Нахождение на диаграмме отрезков, соответствующих различным токам цепи, напряжениям, мощностям и т. д., и определение их масштабов рассмотрено в другой работе автора и здесь не приводится [1]).

Для вывода основного соотношения воспользуемся методом, обычно используемым для четырехполюсников, но проведем его в соответствии с шестиполюсником в форме трехчленов. Из основных соотношений шестиполюсника (50) исключаем напряжение U_2 путем подстановки сопротивления нагрузки

$$Z_н = \frac{U_2}{I_2}, \tag{88}$$

что дает два новых уравнения

$$U_1 = (A.Z_н + B).I_2; \qquad I_1 = (C.Z_н + D).I_2. \tag{89}$$

Деля их одно на другое, исключаем и ток I_2

$$\frac{U_1}{I_1} = \frac{A.Z_н + B}{C.Z_н + D},$$

что дает для тока I_1 выражение

$$I_1 = U_1 . \frac{C.Z_н + D}{A.Z_н + B}, \tag{90}$$

[1]) Р. А. Воронов. Круговые диаграммы. Известия ТИИ. Том 59. 1941 г., г. Томск.

являющееся основным для построения диаграммы. При постоянстве сетевого напряжения ток I_1 является функцией одного сопротивления нагрузки $Z_н$. При соблюдении определенных условий конец вектора тока I_1 будет для каждой из фаз описывать окружность, которая и явится искомой диаграммой.

При холостом ходе для $Z_и = \infty$ ток будет равен

$$I_{1xx} = U_1 . \frac{C}{A}, \qquad (91)$$

а при коротком замыкании для $Z_н = 0$

$$I_{1кз} = U_1 . \frac{D}{B}.$$

Преобразуя уравнение (90), получаем

$$I_1 = U_1 . \frac{C}{A} + U . \frac{1}{A.B\left(1+\frac{A}{B}\right).Z_н}.$$

Так как при этом

$$I_{1кз} - I_{1xx} = U_1 . \frac{D}{B} - U_1 \frac{C}{A} = U_1 . \frac{A.D - B.C}{A.B} = U_1 . \frac{1}{A.B},$$

то это уравнение можно написать в виде

$$I_1 = I_{1xx} + \frac{I_{1кз} - I_{1xx}}{1 + \frac{A}{B} . Z_н}, \qquad (92)$$

хорошо известном для диаграмм шестиполюсника.

Для получения круговой диаграммы шестиполюсника необходимо ввести условие, что сопротивление нагрузки $Z_н$ при своих изменениях сохраняет характер своей несимметрии и постоянство угла сдвига фаз. Это может быть выражено как

$$Z_н = z . e^{j\varphi_н} . \left(k_0 + \alpha k_I + \beta k_{II}\right) = z . e^{j\varphi_н} . k, \qquad (93)$$

где z — изменяющаяся величина сопротивления (вещественное число, имеющее размерность сопротивления), $\varphi_н$ — угол создаваемого сдвига фаз, а k_o, k_I и k_{II} — постоянные отвлеченные коэфициенты, определяющие несимметрию нагрузки по фазам. При этом уравнение (92) получает вид

$$I_1 = I_{1xx} + \frac{I_{1кз} - I_{1xx}}{1 + \frac{A}{B} . ke^{j\varphi_н} . z} = I_{1xx} + (I_{1кз} - I_{1xx}) . F. \qquad (94)$$

Как известно из теории круговых диаграмм для четырехполюсников, окружность получается лишь в том случае, когда в знаменателе переменная величина z входит только в первой степени. Так как уравнение (94) включает в знаменателе коэфициенты последовательности α и β, то для определения действительной степени z необходимо избавиться от таковых и привести уравнение к форме с разделенными последовательностями.

Преобразуем выражение множителя F

$$F = \frac{1}{1 + \frac{A}{B} . k . e^{j\varphi_н} . z} = \frac{\frac{B}{A}}{\frac{B}{A} + k . e^{j\varphi_н} . z} = \frac{Z_{окз}}{Z_{\;з} + k . e^{j\varphi_н} . z},$$

где $Z_{окз} = \frac{B}{A}$ будет соответствовать сопротивлению обратного короткого замыкания. Преобразуя дальше, имеем

$$F = \frac{[Z]_{окз} + Z_{окз}.\hat{k}.e^{j\varphi_н}.Z}{[Z]_{окз} + [k].e^{j\varphi_н}z^2 + 2[kZ_{окз}].e^{j\varphi_н}z}. \qquad (95)$$

Из этого выражения легко видеть, что для того чтобы в знаменателе сопротивление z входило только в первой степени, необходимо соблюдение единственного условия для несимметрии нагрузки:

$$[k] = k_0^2 - k_I.k_{II} = 0. \qquad (96)$$

Это условие определяет характер нагрузки, причем могут иметься только три случая

$$\begin{aligned} &a)\quad k_0 = 1;\quad k_I = 1;\quad k_{II} = 1,\\ &в)\quad k_0 = 1;\quad k_I = a;\quad k_{II} = a^2,\\ &c)\quad k_0 = 1;\quad k_I = a^2;\quad k_{II} = a. \end{aligned}$$

Первый из них соответствует постоянному соединению фаз „b“ и „c“ и включению переменного сопротивления в фазу „a“. Второй случай соответствует подобному же включению сопротивления в фазу „b“, а третий включению в фазу „c“ при постоянном соединении двух остальных фаз. При других соотношениях между множителями k_0, k_I и k_{II} получаются условия, невыполнимые на практике.

Если нагрузку выражать через проводимость

$$Y_н = y.e^{-j\varphi_н}.(Q_0 + \alpha.Q_I + \beta.Q_{II}) = y.e^{-j\varphi_н}.Q,$$

то уравнение (94) получает вид

$$_1 = I_{1xx} + \frac{(I_{1кз} - I_{1xx}).y.e^{-j\varphi_н}.Q}{y.e^{-j\varphi_н}.Q + \frac{A}{B}} = I_{1xx} + (_{1кз} - I_{1xx}).\varphi, \qquad (97)$$

причем

$$\varphi = \frac{y.e^{-j\varphi_н}Q}{y.e^{-j\varphi_н}.Q + \frac{A}{B}} = \frac{[Q].y^2.e^{-j\varphi_н} + .ye^{-j\varphi_н}.Q.\hat{Y}_{окз}}{[Q].y^2.e^{-j\varphi_н} + 2[QY_{окз}].y.e^{-j\varphi_н} + [Y]_{окз}}, \qquad (98)$$

где $Y_{окз} = \frac{A}{B}$ представляет проводимость для обратного короткого замыкания. Это выражение показывает, что для получения круговой диаграммы должно соблюдаться условие несимметрии нагрузки

$$[Q] = Q_0^2 - Q_I.Q_{II} = 0.$$

Так же как и выше, возможно существование только трех случаев

$$\begin{aligned} &a)\quad Q_0 = 1;\quad Q_I = -1;\quad Q_{II} = -1;\\ &b)\quad Q_0 = 1;\quad Q_I = -a;\quad Q_{II} = -a^2;\\ &c)\quad Q_0 = 1;\quad Q_I = -a^2;\quad Q_{II} = -a. \end{aligned}$$

Первый из них соответствует включению переменного сопротивления между фазами „b" и "с" с оставлением фазы „а" разомкнутой, второй—такому же включению сопротивления между фазами а и с, и третий — между фазами „а" и „b", при разомкнутой третьей фазе.

Таким образом, круговая диаграмма при несимметрии фаз шестиполюсника возможна лишь при наличии только **одного** меняющегося сопротивления. Как известно, при симметрии фаз возможно еще одно условие одновременного изменения трех одинаковых сопротивлений, включенных симметрично во все три фазы (т. е. сохранение полной симметрии цепи).

Построение круговых диаграмм шестиполюсников

Для построения круговой диаграммы можно воспользоваться обычным приемом, используемым при четырехполюсниках. Для величины, для которой требуется построить круговую диаграмму, берут значения векторов холостого хода и короткого замыкания и строят дугу окружности на их разности, определив предварительно угол между касательной и хордой.

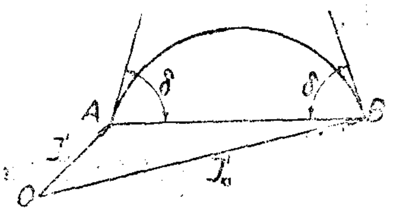

Рис. 8

Этот последний угол δ (рис. 8), определяется как аргумент второго члена знаменателя уравнения (95) и будет одинаков для всех составляющих любых токов и напряжений данной цепи. После исключения z^2 получаем

$$F=\frac{[Z]_{окз}+Z_{окз}.\hat{к}.e^{j\varphi_н}.z}{[Z]_{окз}+2.[кZ_{окз}].e^{j\varphi_н}.z}=\frac{1+\dfrac{Z_{окз}.\hat{к}}{[Z]_{окз}}.e^{j\varphi_н}.z}{1+2\dfrac{[кZ_{окз}]}{[Z]_{окз}}.e^{j\varphi_н}.z}.$$

Если принять

$$\psi=\arg\frac{[кZ_{окз}]}{[Z]_{окз}}=\arg\frac{к_0.Z_{0окз}-\dfrac{1}{2}(к_I.Z_{IIокз}+к_{II}Z_{Iокз})}{Z_0{}^2{}_{окз}-Z_{Iокз}.Z_{IIокз}},\tag{100}$$

то искомый угол будет равен

$$\delta=\psi+\varphi_н.\tag{101}$$

Этот угол при положительном значении будет откладываться в точке холостого хода по часовой стрелке, а в точке короткого замыкания — против часовой стрелки.

В полученном выражении для F числитель имеет дополнительный член $\dfrac{\hat{к}.Z_{окз}}{[Z_{окз}]}.e^{j\varphi_н}.z$, который при холостом ходе, т. е. при $z=\infty$, дает значение для F, отличное от нуля

$$F_{xx}=\frac{\hat{к}.Z_{окз}}{2.[кZ_{окз}]},$$

а, следовательно, изменяет и величину тока холостого хода в уравнении (94)

$$I'_{Ixx}=I_{Ixx}+(I_{Iкз}-I_{Ixx}).F_{xx}=I_{Ixx}+(I_{Iкз}-I_{Ixx}).\frac{\hat{к}Z_{окз}}{2.[кZ_{окз}]}.$$

Это отличие получается потому, что для значений I_{1xx} взято идеальное условие холостого хода, когда разомкнуты все фазы нагрузки, значение же $z=\infty$ соответствует размыканию одной фазы при замыкании двух других. При построении круговой диаграммы нужно брать вектор действительного холостого хода, а не вектор для идеального случая, т. е. представлять уравнение (94) в виде

$$I_1 = I'_{1xx} + (I_{1кз} - I'_{1xx}) \cdot \frac{1}{1 + 2\dfrac{[кZ_{окз}]}{[Z]_{окз}} \cdot e^{j\varphi_н} \cdot z}.$$

Ток короткого замыкания в данном случае не отличается от тока при идеальном замыкании всех фаз.

Если обратиться к нагрузке, выраженной в проводимостях по уравнениям (97) и (98), то все соотношения остаются теми же, но вместо члена $Z_{окз}$ войдет $Y_{окз}$, а вместо k войдет Q. Кроме того, в данном случае отличие между действительным и идеальным случаем будет иметься при коротком замыкании, так как часть фаз остается при этом незамкнутой. Уравнения получают вид

$$I_1 = I_{1xx} + (I'_{1кз} - I_{1xx}) \cdot \frac{1}{1 + 2 \cdot \dfrac{[Q \cdot Y_{окз}]}{[Y_{окз}]} \cdot e^{-j\varphi_н} \cdot y},$$

причем искомый угол определится как

$$\delta = \psi_1 + \varphi_н,$$

где

$$\psi_1 = -\arg \frac{[QY_{окз}]}{[Y]_{окз}}.$$

Как указано выше, величина $Z_{окз}$ соответствует сопротивлению цепи при идеальном обратном коротком замыкании, т. е. когда напряжение подводится со стороны нагрузочного конца, а генераторные зажимы полностью замкнуты. Если цепь симметрична, т. е. если для шестиполюсника имеется равенство $A = D$, то значения будут одинаковы с прямым коротким замыканием всех трех фаз. То же относится, конечно, и к проводимости $Y_{окз}$ обратного короткого замыкания.

Заключение

Рассмотренный выше метод использования трехчленных выражений дает возможность значительно упростить все выводы соотношений и расчеты в трехфазных цепях, не имеющих путей для составляющих токов нулевой последовательности. При их помощи удалось получить простые способы использования свойств шестиполюсников и их круговых диаграмм, свести к общему случаю вопросы о несимметричной загрузке трехфазных трансформаторов и дать соотношения для точного расчета линий передач с несимметричными фазами.

Все полученые выводы могут быть полностью распространены и на общий случай трехфазных цепей, имеющх нулевой провод или замыкающихся в кольцо, т. е. могущих проводить и токи нулевой последовательности. В этом случае приходится переходить на матричные обозначения, хотя для большинства цепей удается частично использовать и трехчленные выражения путем применения приемов, аналогичных методу Товенена-Гельмгольца (холостой ход и короткое замыкание). За недостатком места эти вопросы не могут быть рассмотрены в настоящей статье и будут опубликованы в дальнейшем отдельно.