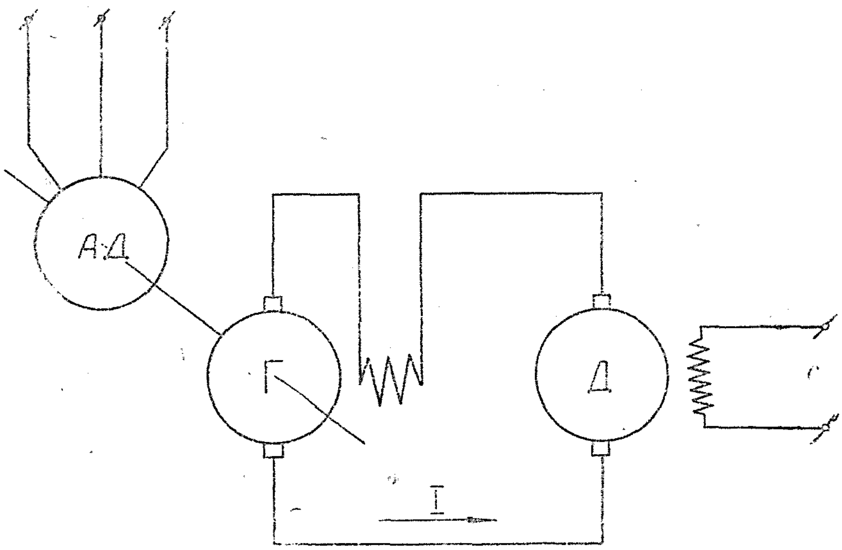
ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
Том 82 ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА 1956 г.

ЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Л. И. ГАНДЖА

(Представлено научным семинаром электромеханического факультета)

В [1; 2] были подробно рассмотрены „разрывные" колебания в нелинейной электромеханической системе, состоящей из генератора с последовательным возбуждением, и двигателя с независимым возбуждением (фиг. 1), включенного на этот генератор. Там было показано, что представление о „разрывных" колебаниях в этой системе можно получить в результате идеализации этой системы, если пренебречь индуктивностью силового контура. Было показано, что механическая характеристика двигателя $n = f(I)$ этой автоколебательной системы в „разрывной" трактовке дает представление о предельном цикле автоколебаний. Там же указано,



Фиг. 1.

что учет индуктивности исключает возможность „разрывных" колебаний, а автоколебания тока и скорости системы на фазовой плоскости характеризуются предельными циклами $\frac{dI}{dt} = f_1(I)$ и $\frac{dn}{dt} = f_2(n)$ значительно более сложной формы.

Рассмотренная в [1;2] автоколебательная система фиг. 1 при отсутствии нагрузки на валу двигателя ($M_{cm} = 0$) описывается нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + [R - \varphi'(I)] \frac{dI}{dt} + \frac{375 c_e . c_м}{GD^2} I = 0, \qquad (1)$$

получаемым в результате совместного решения уравнений

$$e_г = I.R + L\frac{dI}{dt} + e_д, \tag{2}$$

$$M = M_j = \frac{GD^2}{375}\,\frac{dn}{dt}, \tag{3}$$

$$M = c_м . I, \tag{4}$$

$$e_д = c_e . n, \tag{5}$$

$$e_д = \varphi(I), \tag{6}$$

где:

$e_г, e_д, I$ — э.д.с. генератора, противо э.д.с. и ток двигателя;

M, n, GD^2 — момент, развиваемый двигателем на валу, его скорость и маховой момент;

L, R — коэффициент самоиндукции и сопротивление силового контура;

$c_м, c_e$ — коэффициенты пропорциональности между моментом и током двигателя и между его противо э.д.с. и скоростью при номинальном магнитном потоке.

$\varphi'(I)$ — производная э.д.с. генератора по току, определяемая по кривой намагничивания генератора.

Трудность изучения автоколебаний этой или подобной системы обусловливается рядом причин, из которых укажем на основные.

1. Не представляется возможным выразить нелинейную зависимость $e_г = \varphi(I)$ аналитически тем более, что такая зависимость должна аппроксимировать гистерезисную петлю генератора, по которой происходит его перемагничивание в процессе автоколебаний.

2. Коэффициент самоиндукции L зависит от тока, что вносит в систему дополнительную нелинейность и усложняет ее анализ.

3. В ряде случаев магнитный поток двигателя не остается постоянным и равным номинальному, а изменяется с изменением тока двигателя (например, при наличии у двигателя последовательной обмотки возбуждения, при сдвинутых с нейтрали щетках двигателя). Поэтому коэффициенты $c_м$ и c_e в (1) становятся переменными и зависимыми от тока, что вносит в систему еще одну дополнительную нелинейность.

Задача изучения автоколебаний значительно упрощается, если в первом приближении положить $L = \text{const}$ и $\Phi = \text{const}$ и применить кусочно-линейную аппроксимацию к кривой намагничивания генератора (фиг. 2).

Заменим кривую намагничивания генератора ломаной линией, состоящей из m отрезков прямых; тогда зависимость (6) э.д.с. генератора от тока для некоторого i—го отрезка (фиг. 2) выразится уравнением

$$e_{гi} = \varphi_i(I_i) = e_{гio} + \varphi'_i(I_i) I_i \qquad (i = 1, 2, \ldots . m), \tag{7}$$

справедливым внутри данного отрезка, где $\varphi'_i(I) = \text{const}$ [1]). Решая теперь совместно (2), (3), (4), (5) и (7), получим:

$$L\frac{d^2 I_i}{dt^2} + \left[R - \varphi'_i(I_i)\right]\frac{dI_i}{dt} + \frac{375 c_e . c_м}{GD^2} I_i = 0. \tag{8}$$

Исходя из принятой аппроксимации для кривой намагничивания и из (8) выясним, каков будет характер переходного процесса тока и каким образом будет аппроксимирован предельный цикл при автоколебаниях.

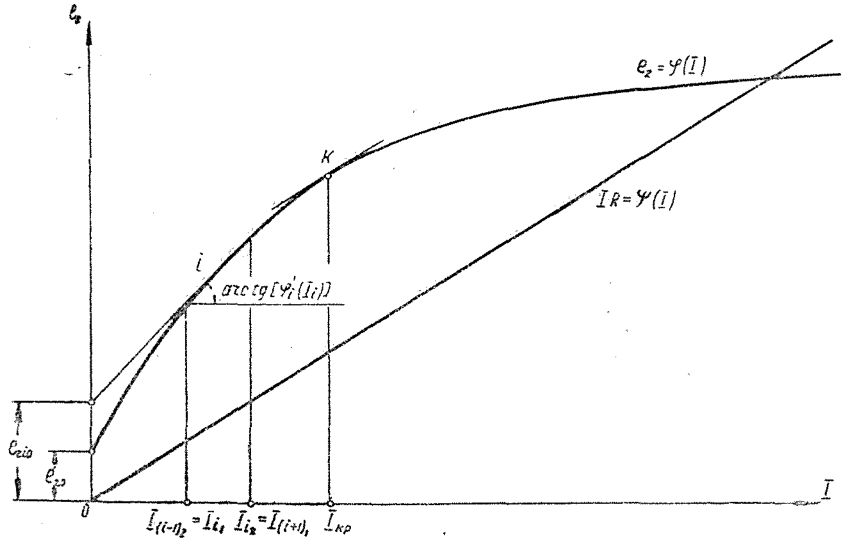
[1]) Принятое обозначение I_i характеризует мгновенное значение тока в пределах i-го участка.

Необходимым условием возникновения автоколебаний является наличие критической точки K смены устойчивости системы на кривой намагничивания (фиг. 2), которая находится проведением касательной к кривой $e_г = \varphi(I)$, параллельной прямой $I.R = \psi(I)$. В свою очередь наличие точки K приводит к условиям:

$$\varphi'(I) > \psi'(I) = R \quad \text{при} \quad I < I_{kp}; \tag{9}$$

$$\varphi'(I) < \psi'(I) = R \quad \text{при} \quad I > I_{kp}; \tag{10}$$

$$\varphi'(I) = \psi'(I) = R \quad \text{при} \quad I = I_{kp}. \tag{11}$$



Фиг. 2.

Решение линейного дифференциального уравнения (8), как известно, имеет вид

$$I_i = A_{1i}e^{p_{1i}t} + A_{2i}e^{p_{2i}t}, \tag{12}$$

где:

A_{1i} и A_{2i} — постоянные интегрирования, которые должны определяться из начальных условий для рассматриваемого i-ого участка (при $t = 0$ $I_i = I_{i1}$)

p_{1i} и p_{2i} — корни характеристического уравнения, которое на основании (8) может быть записано в виде:

$$Lp_i^2 + \left[R - \varphi'_i(I_i)\right]p_i + \frac{375c_e.c_м}{GD^2} = 0. \tag{13}$$

Корни p_{1i} и p_{2i} в общем виде определяются как

$$p_{(1,2)i} = \frac{-[R-\varphi'_i(I_i)] \pm \sqrt{[R-\varphi'_i(I_i)]^2 - 4L\frac{375c_e.c_м}{GD^2}}}{2L}. \tag{14}$$

Анализируя (9), (10), (11), (12) и (14), приходим к следующим возможным случаям.

1-й случай. $\varphi'_i(I_i)$ настолько велика, что выполняются условия:

$$\varphi'_i(I_i) > R, \tag{15}$$

$$[R - \varphi'_i(I_i)]^2 > 4L \frac{375c_e . c_м}{GD^2}. \tag{16}$$

Условие (15) определяет знак минус у второго члена в (8), что означает, что система фиг. 1 обладает „отрицательным" сопротивлением. Условие же (16) определяет корни p_{1i} и p_{2i} по (14) как вещественные, положительные и разные; в соответствии с этим переходный процесс тока по (12) в пределах рассматриваемого участка кривой намагничивания определяется как апериодический возрастающий.

2-й случай. Имеет место условие (15) и

$$[R - \varphi'_i(I_i)]^2 = 4L \frac{375c_м . c_e}{GD^2}. \tag{17}$$

При этом система попрежнему обладает „отрицательным" сопротивлением, но корни по (14) получаются вещественными, положительными и равными $(p_{1i} = p_{2i} = p_i)$. Переходный процесс тока попрежнему апериодический возрастающий, но описывается он теперь не по (12), а уравнением

$$I_i = A_{1i}e^{p_{1i}t} + A_{2i}e^{p_it}.t. \tag{18}$$

3-й случай. Выполняется условие (15) и

$$[R - \varphi'_i(I_i)]^2 < 4L \frac{375c_e c_м}{GD^2}. \tag{19}$$

Система попрежнему обладает „отрицательным" сопротивлением, корни же p_{1i} и p_{2i} по (14) получаются сопряженными комплексными с положительными вещественными частями. Переходный процесс в этом случае будет колебательным возрастающим и описывается уравнением (12), которое известными приемами легко может быть преобразовано к тригонометрической форме.

4-й случай. Неравенство (15) превращается в равенство

$$\varphi'_i(I_i) = R. \tag{20}$$

Система в соответствии с (8) не обладает сопротивлением, корни по (14) получаются мнимыми сопряженными, а переходный процесс будет описываться уравнением (12), которое для этого случая в тригонометрической форме представит незатухающие гармонические колебания тока.

5-й случай. Имеют место условия:

$$R > \varphi'_i(I_i), \tag{21}$$

$$[R - \varphi'_i(I_i)]^2 < 4L \frac{375c_e c_м}{GD^2}. \tag{22}$$

Система при этих условиях будет обладать положительным сопротивлением, корни же будут сопряженными комплексными с отрицательными вещественными частями. Переходный процесс попрежнему описывается по (12), которое в тригонометрической форме представит затухающие колебания.

6-й случай. Соблюдается условие (21) и

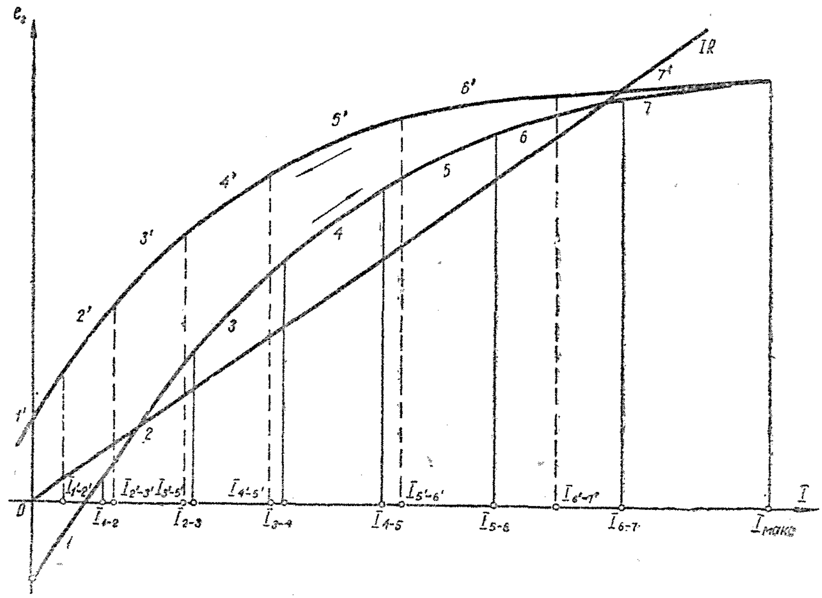
$$[R - \varphi'_i(I_i)]^2 = 4L \frac{375 . c_e . c_м}{GD^2}. \tag{23}$$

Сопротивление системы остается положительным, корни же получаются вещественными, отрицательными и равными. Подобно второму случаю этот переходный процесс является граничным между затухающим колебательным и затухающим апериодическим и описывается по (18).

7-й с л у ч а й. Выполняется (21) и

$$[R-\varphi'(I_i)]^2 > 4L\frac{375 . c_e . c_м}{GD^2} . \qquad (24)$$

При положительном сопротивлении системы получим корни вещественными, отрицательными и разными, что характеризует апериодический затухающий переходный процесс, описываемый по (12).



Фиг. 3.

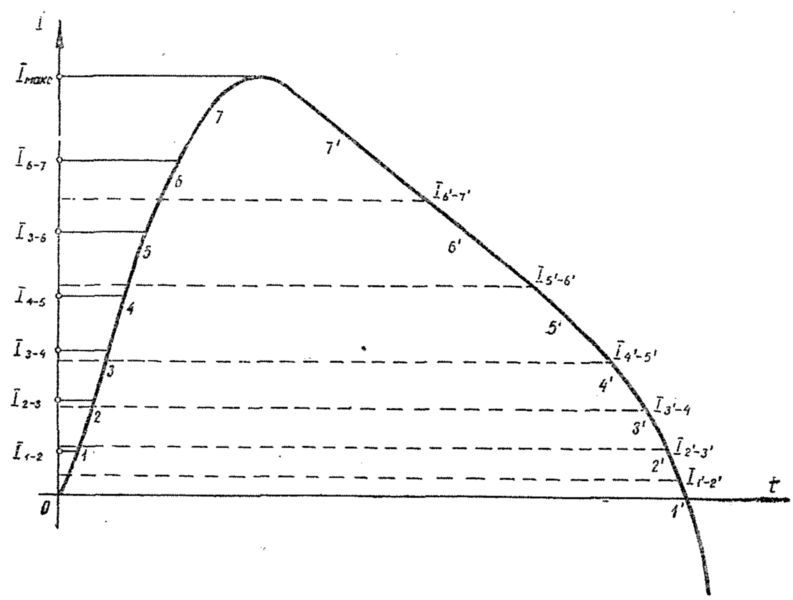
Рассмотрим для определенности увеличение тока от нуля до $+I_{макс}$ в положительном полупериоде автоколебаний. Как это было выяснено в [1,2] и согласно фиг. 3, при увеличении тока процесс перемагничивания генератора будет протекать по нижней ветви гистерезисной петли, а при уменьшении его—по верхней, в направлениях, указанных стрелками.

Разобьем нижнюю ветвь на 7 участков так, чтобы для каждого из них выполнялись условия, соответствующие рассмотренным выше случаям, и в соответствии с этим пронумеруем участки цифрами 1, 2. . . .7. Сопоставляя с фиг. 3 фиг. 4, представляющую кривую переходного процесса $I=F(t)$ на протяжении одного полупериода автоколебания, и разбивая последнюю на одноименные участки 1, 2. . . .7 в пределах изменения тока от 0 до $I_{макс}$ точками, соответствующими значениям токов $I_{1-2}, I_{2-3}\ldots\ldots\ldots I_{6-7}, I_{макс}$ на фиг. 3, можем сказать, что эта часть кривой от $I=0$ до $I=I_{макс}$ может быть построена в следующей последовательности:

на участке 1 — как кривая апериодического возрастающего процесса;
на участке 2 — как кривая переходного процесса, граничного между апериодическим возрастающим и колебательным возрастающим;
на участке 3 — как кривая колебательного возрастающего процесса;
на участке 4 — то же переходного процесса при незатухающих колебаниях;
на участке 5 — то же колебательного затухающего процесса;

на участке 6 — то же граничного между колебательным затухающим и апериодическим затухающим;
на участке 7 — как кривая апериодического затухающего переходного процесса.

То же можно сказать, рассматривая убывание тока от $I_{макс}$. до 0, когда перемагничивание генератора происходит по верхней ветви гистерезисной петли, которая может быть разбита на соответствующие участки $1', 2' \ldots 7'$ (фиг. 3), а также рассматривая изменения тока от 0 до $-I_{макс}$ и от $-I_{макс}$ до 0.



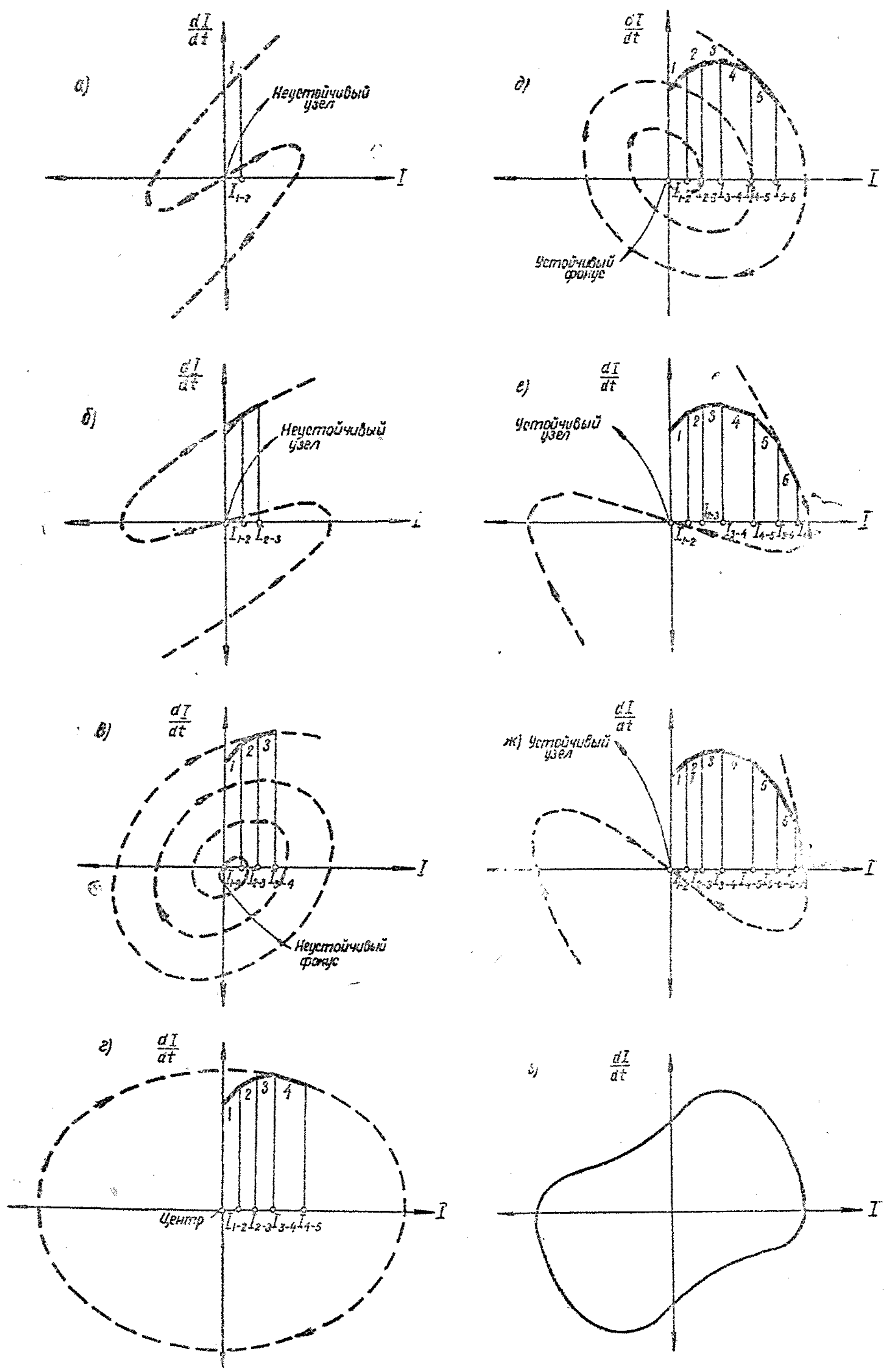
Фиг. 4.

Рассмотрим теперь переходный процесс на фазовой плоскости в прямоугольной системе координат $\frac{dI}{dt} = \Phi(I)$. При изменении тока от 0 до I_{1-2}, когда имеет место возрастающий апериодический режим, изображающая точка на фазовой плоскости будет двигаться по участку 1 параболической кривой [3, 4] с состоянием равновесия типа неустойчивого узла в начале координат (фиг. 5а).

То же будет происходить и при изменении тока от I_{1-2} до I_{2-3} при режиме, граничном между апериодическим возрастающим и колебательным возрастающим переходными режимами; изображающая точка будет двигаться по участку 2 фазовой траектории типа параболы с неустойчивым узлом в начале координат (фиг. 5б). При изменении тока от I_{2-3} до I_{3-4}, когда переходный процесс колебательный возрастающий, изображающая точка будет двигаться по участку 3 фазовой траектории типа раскручивающейся спирали с состоянием равновесия типа неустойчивого фокуса в начале координат (фиг. 5в).

Изменению тока от I_{3-4} до I_{4-5} при незатухающем колебательном режиме на фазовой плоскости будет соответствовать участок 4 эллипса с центром в начале координат (фиг. 5 г).

При колебательном затухающем режиме, когда ток изменяется в пределах участка 5 от I_{4-5} до I_{5-6}, на фазовой плоскости получим участок


а)
Неустойчивый узел
б)
Неустойчивый узел
в)
Неустойчивый фокус
г)
Центр
д)
Устойчивый фокус
е)
Устойчивый узел
ж) Устойчивый узел

Фиг. 5.

5 фазовой траектории типа скручивающейся спирали с устойчивым фокусом в начале координат (фиг. 5д).

Далее участку 6 изменения тока в пределах от I_{5-6} до I_{6-7} при граничном между затухающими колебательным и апериодическим режимами на фазовой плоскости будет соответствовать участок 6 параболической фазовой траектории с устойчивым узлом в начале координат (фиг. 5е).

Наконец, участку 7, в пределах которого ток изменяется от I_{6-7} до $I_{макс}$, при апериодическом затухающем режиме на фазовой плоскости также соответствует участок 7 параболической фазовой траектории с устойчивым узлом в начале координат (фиг. 5ж). Полученные таким образом участки 1, 2....7 на фазовой плоскости в совокупности представляют собой часть предельного цикла автоколебания, соответствующую первому квадранту. Распространяя изложенное на случай уменьшения тока от $+I_{макс}$ до 0 и изменения его в отрицательный полупериод от 0 до $-I_{макс}$ и от $-I_{макс}$ до 0, можно получить весь предельный цикл (фиг. 5з). Таким образом, при линейно-кусочной аппроксимации кривой намагничивания предельный цикл аппроксимируется отрезками парабол, спиралей и эллипсов, являющихся фазовыми траекториями возможных линейных систем второго порядка, с последовательной сменой точек состояния равновесия от неустойчивого узла к неустойчивому фокусу, центру, устойчивому фокусу, устойчивому узлу и далее в обратном порядке для рассматриваемого полупериода колебаний. Части этих фазовых траекторий могут быть построены по уравнениям, приведенным в [3, 4]. Исходя из того, что участок 1 предельного цикла (фиг. 5) является частью параболической фазовой траектории с неустойчивым узлом и является, таким образом, восходящим, можно сделать следующий существенный вывод: в автоколебательной системе, в которой возможен апериодический возрастающий (или граничный между апериодическим возрастающим и колебательным возрастающим) режим, точка предельного цикла, соответствующая максимальному значению $\frac{dI}{dt}$, смещается от оси $\frac{dI}{dt}$ в сторону движения изображающей точки; в соответствии с этим в кривой переходного автоколебательного процесса точка перегиба, лежащая на части кривой, соответствующей изменению I от 0 до $I_{макс}$ и от 0 до $-I_{макс}$, не может располагаться на оси времени и смещается от нее в сторону соответствующего экстремального значения тока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ганджа Л. И. Физика колебаний в системе „генератор с последовательным—двигатель с независимым возбуждением“. Известия Томского ордена Трудового Красного Знамени политехнического института им. С. М. Кирова, том 76, 1953.

2. Ганджа Л. И., Потехин Ю. И. О переходных процессах и колебаниях в системе „генератор с последовательным—двигатель с независимым возбуждением“. Известия Томского ордена Трудового Красного Знамени политехнического института им. С. М. Кирова, том 76, 1953.

3. Андронов А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. ОНТИ НКТП СССР. 1937.

4. Под редакцией Поливанова К. М. Физические основы электротехники. Госэнергоиздат, 1950.