

## К ВОПРОСУ ОБ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ РЕЗОНАНСНОГО УСИЛИТЕЛЯ

Е. И. ФИАЛКО

(Представлено доктором техн. наук Гудкиным Л. С.)

### Постановка задачи

Как известно [1], резонансная характеристика обычного колебательного контура описывается уравнением

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \quad (1)$$

здесь  $x$  — обобщенная расстройка, равная

$$x = \frac{\Delta f}{d \cdot f_0} \left( 1 + \frac{f_0}{f} \right), \quad (2)$$

где  $f_0$  — резонансная частота контура,  
 $f$  — текущая частота,  
 $\Delta f = f - f_0$  — абсолютная расстройка контура,  
 $d$  — затухание контура.

Кривая  $y = \varphi(f)$  несимметрична относительно перпендикуляра, восстановленного к оси частот в точке, соответствующей резонансной частоте  $f_0$  (фиг. 1). Полоса пропускания, естественно, также несимметрична относительно  $f_0$ : левая часть полосы пропускания меньше, чем правая. Эта асимметрия тем существеннее, чем больше отношение полосы пропускания к резонансной частоте.

В случае узкополосных систем ( $\Delta F \ll f_0$ ) в пределах расстроек  $\Delta f$ , соизмеримых с полосой пропускания  $\Delta F$ , асимметрия резонансной кривой проявляется весьма слабо.

В самом деле, если  $\Delta f \ll f_0$ , то  $\frac{f_0}{f} \approx 1$  и обобщенная расстройка равна

$$x \approx \frac{2 \cdot \Delta f}{d \cdot f_0}. \quad (3)$$

Кривая  $y = \varphi(f)$  становится симметричной относительно  $f = f_0$  (т. е.  $y = \varphi(f)$  симметрична для малых расстроек по сравнению с  $f_0$ , но соизмеримых с полосой пропускания).

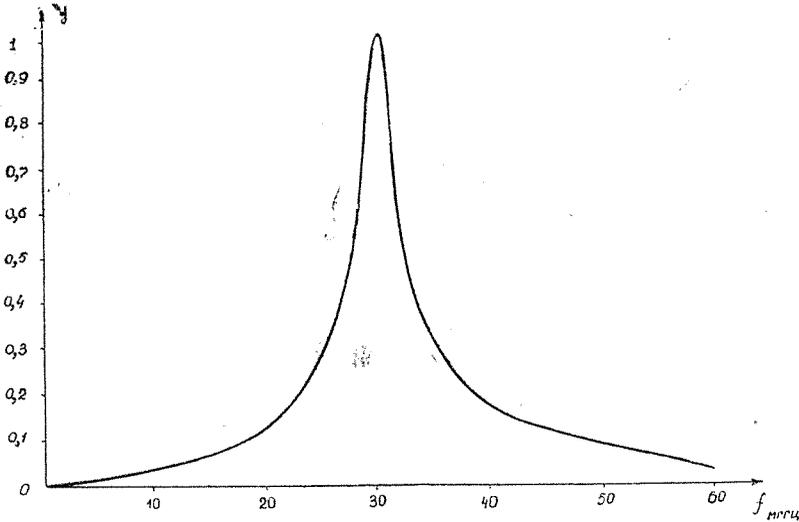
Именно поэтому весьма часто резонансная характеристика рассматривается, как симметричная кривая и такое рассмотрение дает достаточно точные результаты.

Например, известно, что в этом случае полоса пропускания контура на уровне 0,7 равна

$$\Delta F = d \cdot f_0, \quad (4)$$

а полоса пропускания  $n$  — каскадного резонансного усилителя, построенного на одинаковых контурах, определяется формулой

$$\Delta F_n = \Delta F \cdot \sqrt{\sqrt{\frac{n}{2}} - 1}. \quad (5)$$



Фиг. 1. Резонансная характеристика колебательного контура.

Естественно, возникает вопрос о том, как скажется асимметрия резонансной кривой контура на свойствах многокаскадного усилителя, будут ли и в этом случае справедливы формулы (4) и (5), можно ли в случае широкополосных систем не учитывать асимметрию резонансной кривой контура.

Для ответа как на эти, так и на некоторые другие вопросы выясним:

1. Как выражается величина полосы пропускания через затухание контура (для одного каскада и для многокаскадного усилителя)?

2. Какова степень ассиметрии полосы пропускания?

3. Какова предельная форма амплитудно-частотной характеристики многокаскадного усилителя при весьма большом числе каскадов?

В настоящей работе эти вопросы рассматриваются для случая многокаскадного резонансного усилителя, построенного на одинаковых контурах.

Рассмотрим вначале амплитудно-частотную характеристику одного каскада или резонансную кривую колебательного контура.

### Колебательный контур

Как известно [1], резонансная характеристика колебательного контура описывается уравнением (1). Определим полосу пропускания контура на уровне  $y \approx 0,7$ . Для этого определим величины положительной и отрицательной расстроек ( $\Delta f_{0,7(+)}$  и  $\Delta f_{0,7(-)}$ ), соответствующих уровню 0,7 (фиг. 2).

Полагая  $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$ , получим  $x_{0,7} = \pm 1$ ,

т. е.

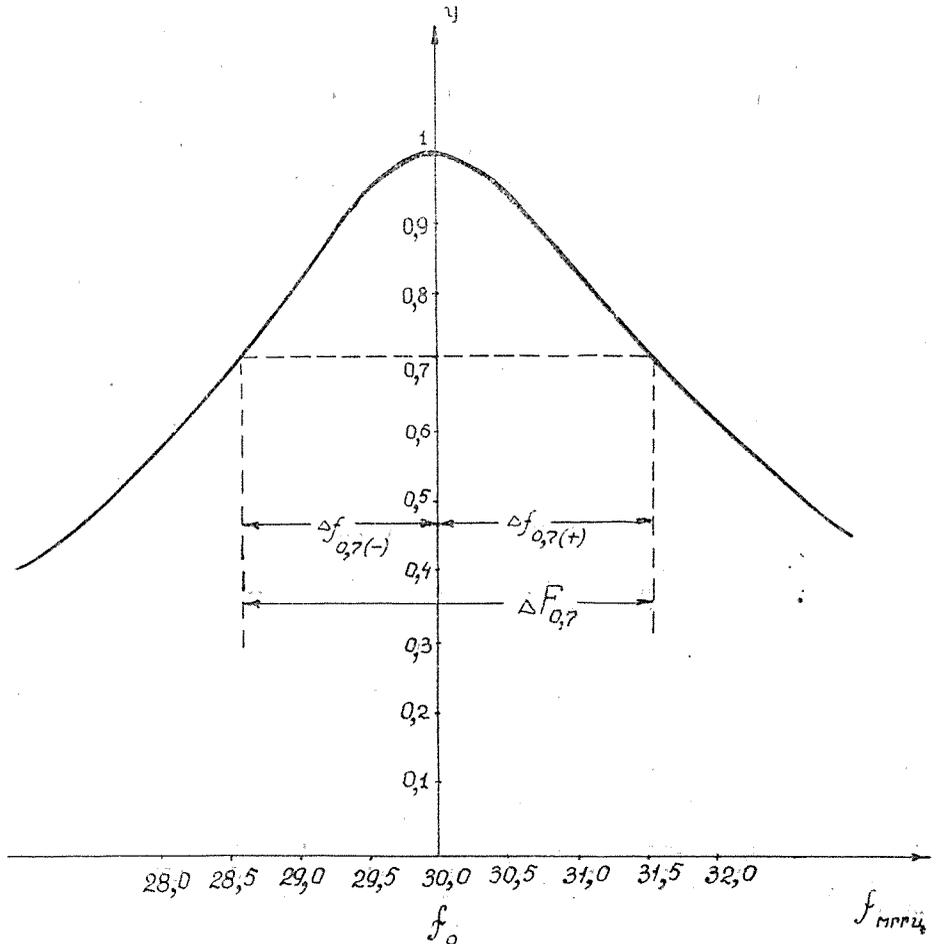
$$\frac{\Delta f_{0,7}}{d.f_0} \left( 1 + \frac{f_0}{f_0 + \Delta f_{0,7}} \right) = \pm 1$$

или

$$\Delta f_{0,7}^2 + \Delta f_{0,7} \cdot f_0(2 \pm d) \pm d \cdot f_0^2 = 0. \quad (6)$$

Решая уравнение (6) относительно  $\Delta f_{0,7}$ , получим:

$$\Delta f_{0,7} = -f_0 \left( 1 \pm \frac{d}{2} \right) \pm \sqrt{f_0^2 \left( 1 \pm \frac{d}{2} \right)^2 \mp d \cdot f_0^2}.$$



Фиг. 2. Резонансная характеристика колебательного контура в области расстройек, соизмеримых с полосой пропускания.

Нетрудно видеть, что перед радикалом в последнем выражении необходимо брать только плюс.

В самом деле, когда  $x_{0,7} = +1$ , то расстройка  $\Delta f_{0,7}$  также должна быть положительной (2), а это условие удовлетворится лишь в случае, когда берется решение с плюсом перед радикалом.

Итак, положительная и отрицательная расстройки равны соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \Delta f_{0,7(+)} &= -f_0 \left( 1 - \frac{d}{2} \right) + \sqrt{f_0^2 \left( 1 - \frac{d}{2} \right)^2 + d \cdot f_0^2} \\ \Delta f_{0,7(-)} &= -f_0 \left( 1 + \frac{d}{2} \right) + \sqrt{f_0^2 \left( 1 + \frac{d}{2} \right)^2 - d \cdot f_0^2} \end{aligned} \right\}$$

После простых преобразований получим:

$$\left. \begin{aligned} \Delta f_{0,7(+)} &= -f_0 \left( 1 - \frac{d}{2} \right) + f_0 \sqrt{1 + \frac{d^2}{4}} \\ \Delta f_{0,7(-)} &= -f_0 \left( 1 + \frac{d}{2} \right) + f_0 \sqrt{1 + \frac{d^2}{4}} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Полоса пропускания на уровне 0,7 равна

$$\Delta F_{0,7} = \Delta f_{0,7(+)} - \Delta f_{0,7(-)} = d \cdot f_0. \quad (8)$$

Как видим, полоса пропускания реальной резонансной кривой, обладающей определенной асимметрией, равна произведению затухания на резонансную частоту. Как известно [1], в случае строго симметричной резонансной кривой, описываемой формулами (1) и (3), полоса пропускания также равна произведению  $d \cdot f_0$ .

Степень асимметрии полосы пропускания может быть оценена отношением

$$\psi = \frac{\Delta f_{0,7(+)} + \Delta f_{0,7(-)}}{\Delta F_{0,7}}. \quad (9)$$

Подставляя в (9) соответствующие выражения из (7) и (8) и сокращая числитель и знаменатель на  $f_0$ , получим;

$$\psi = 2 \frac{\sqrt{1 + \frac{d^2}{4}} - 1}{d}.$$

Для случая  $\frac{d^2}{4} \ll 1$  имеем:

$$\psi \approx \frac{d}{4} \quad (10)$$

или

$$\psi \approx \frac{\Delta F_{0,7}}{4 \cdot f_0}.$$

Таким образом, степень асимметрии полосы пропускания однозначно определяется затуханием контура. Выше предполагалось, что сопротивление потерь контура при расстройках не изменяется и остается равным сопротивлению при резонансной частоте  $f_0$ . В действительности составляющие активного сопротивления контура зависят от величины расстройки  $\Delta f$ .

В общем случае в активные потери контура входят следующие составляющие:

- 1) собственные активные потери контура;
- 2) потери, вносимые входным сопротивлением лампы последующего каскада (в многокаскадном усилителе);
- 3) потери, вносимые дополнительным сопротивлением (как известно, в широкополосных схемах колебательный контур шунтируют активным сопротивлением).

От характера изменения каждой из этих составляющих (в функции частоты) будет зависеть форма резонансной кривой контура.

Анализ этой зависимости не входит в задачу данной работы, поэтому, ограничиваясь здесь простым физическим рассуждением и учитывая зависимость величины собственных потерь контура, входного сопротивления и т. д. от частоты, заключаем, что правая ветвь резонансной кривой будет опускаться, а левая — приподниматься по сравнению со случаем, когда сопротивление потерь постоянно. Следует также иметь в виду влияние обрат-

ных связей на форму резонансной кривой каскада. Для того чтобы определить, насколько состоятельно проводимое исследование, предполагающее неизменность сопротивления активных потерь, необходимо обратиться к опыту. Опыт показал, что резонансная характеристика каскада сохраняет асимметричный характер (см. ниже).

Перейдем к рассмотрению многокаскадного резонансного усилителя.

## Многокаскадный резонансный усилитель

Уравнение амплитудно-частотной характеристики многокаскадного резонансного усилителя, построенного на контурах с одинаковыми затуханиями и резонансными частотами <sup>1)</sup>, как известно [1], имеет вид

$$y_n = \left( \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)^n,$$

где

$n$  — число каскадов, а  $x$  — обобщенная расстройка. Определим полосу пропускания такого усилителя на уровне  $y_n \approx 0,7$ . Из уравнения

$$\left( \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)^n = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

найдем обобщенную расстройку, соответствующую уровню 0,7;

$$x_{0,7} = \pm \sqrt[n]{\sqrt{2} - 1}. \quad (11)$$

Вводя обозначение

$$\alpha = \pm \sqrt[n]{\sqrt{2} - 1}$$

и, подставляя в (11) вместо  $x_{0,7}$  его развернутое выражение, получим

$$\frac{\Delta f_{0,7}}{d \cdot f_0} \left( 1 + \frac{f_0}{f_0 + \Delta f_{0,7}} \right) = \alpha. \quad (12)$$

Последнее выражение является квадратным уравнением относительно расстройки  $\Delta f_{0,7}$  и после простых преобразований приводится к виду:

$$\Delta f_{0,7}^2 + \Delta f_{0,7} \cdot f_0 (2 - \alpha \cdot d) - \alpha \cdot d \cdot f_0^2 = 0. \quad (13)$$

Решая уравнение (13), получим:

$$\Delta f_{0,7} = f_0 \left( \frac{\alpha \cdot d}{2} - 1 \right) \pm \sqrt{f_0^2 \left( \frac{\alpha \cdot d}{2} - 1 \right)^2 + \alpha \cdot f_0^2 \cdot d}.$$

Легко видеть, что второе решение с минусом перед радикалом (в последней формуле) лишено физического смысла. В самом деле, если приведенная расстройка положительная ( $x_{0,7} = +|\alpha|$ ), то, как следует из (12), абсолютная расстройка также должна быть положительной (заметим, что всегда  $\Delta f_{0,7} > -f_0$ ). Поэтому приемлемо лишь первое решение, а именно:

$$\Delta f_{0,7} = f_0 \left( \frac{\alpha \cdot d}{2} - 1 \right) + \sqrt{f_0^2 \left( \frac{\alpha \cdot d}{2} - 1 \right)^2 + \alpha \cdot f_0^2 \cdot d} =$$

<sup>1)</sup> В дальнейшем такие контуры называются одинаковыми или идентичными.

$$= f_0 \left( \frac{\alpha \cdot d}{2} - 1 \right) + f_0 \sqrt{1 + \left( \frac{\alpha \cdot d}{2} \right)^2} \quad (14)$$

Но коэффициент  $\alpha$  имеет 2 значения:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= |\alpha|, \\ \alpha_2 &= -|\alpha|. \end{aligned}$$

Подставляя  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в (14), найдем положительную и отрицательную расстройки:

$$\left. \begin{aligned} \Delta f_{0,7(+)} &= f_0 \left( \frac{|\alpha| \cdot d}{2} - 1 \right) + f_0 \sqrt{1 + \left( \frac{\alpha \cdot d}{2} \right)^2} \\ \Delta f_{0,7(-)} &= f_0 \left( -\frac{|\alpha| \cdot d}{2} - 1 \right) + f_0 \sqrt{1 + \left( \frac{\alpha \cdot d}{2} \right)^2} \end{aligned} \right\}$$

Полоса пропускания равна

$$\Delta F_{0,7} = \Delta f_{0,7(+)} - \Delta f_{0,7(-)} = |\alpha| \cdot d \cdot f_0, \quad (15)$$

т. е.

$$\Delta F_{0,7} = d \cdot f_0 \cdot \sqrt{\sqrt[n]{2} - 1} \quad (16)$$

и при достаточно большом числе каскадов

$$\Delta F_{0,7} \approx d \cdot f_0 \cdot \sqrt{\frac{\ln 2}{n}}$$

Известно [1], что в случае  $n$ -каскадного резонансного усилителя, контуры которого характеризуются строго симметричными кривыми, полоса пропускания также определяется формулой (16).

Асимметрия полосы пропускания оценится коэффициентом

$$\psi = \frac{\Delta f_{0,7(+)} + \Delta f_{0,7(-)}}{\Delta F_{0,7}} = 2 \frac{\sqrt{1 + \left( \frac{\alpha \cdot d}{2} \right)^2} - 1}{|\alpha| \cdot d} \quad (17)$$

При  $\left( \frac{\alpha \cdot d}{2} \right)^2 \ll 1$

$$\psi \approx \frac{|\alpha| \cdot d}{4}, \quad (18)$$

и в случае  $n \gg 1$

$$\psi \approx \frac{d}{4} \sqrt{\frac{\ln 2}{n}} \quad (19)$$

Сравнивая формулы (19) и (10), заключаем, что степень асимметрии полосы пропускания всего усилителя уменьшается с увеличением числа каскадов. Иными словами, амплитудно-частотная характеристика многокаскадного резонансного усилителя менее асимметрична, чем резонансные кривые каскадов, из которых состоит усилитель. В случае же, когда полоса пропускания многокаскадного усилителя поддерживается постоянной при изменении числа каскадов, степень асимметрии полосы пропускания в первом приближении не изменяется. В самом деле, выразив из (15) затухание каскада через результирующую полосу пропускания, имеем

$$d = \frac{\Delta F_{0,7}}{f_0 \cdot |\alpha|}$$

Подставляя последнее выражение в (18), получаем

$$\psi \approx \frac{\Delta F_{0,7}}{4 \cdot f_0} \quad (20)$$

Найдем теперь предельную форму амплитудно-частотной характеристики усилителя при увеличении числа каскадов и поддержании неизменной результирующей полосы пропускания.

Для этой цели в уравнении амплитудно-частотной характеристики усилителя

$$y_n = \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left[ \frac{\Delta f}{d \cdot f_0} \left( 1 + \frac{f_0}{f_0 + \Delta f} \right) \right]^2}} \right)^n \quad (21)$$

выразим  $d \cdot f_0$  через результирующую полосу пропускания  $\Delta F_n$  и число каскадов.

**Примечание.** Здесь и далее индекс „0,7“ при выражении полосы пропускания опускаем.

Из (16) имеем

$$d \cdot f_0 = \frac{\Delta F_n}{\sqrt{\sqrt[n]{2} - 1}} \quad (22)$$

Подставляя (22) в (21), получим

$$y_n = \left\{ 1 + \left[ \frac{\Delta f}{\Delta F_n} \cdot \sqrt{\sqrt[n]{2} - 1} \cdot \left( 1 + \frac{f_0}{f_0 + \Delta f} \right) \right] \right\}^{-\frac{n}{2}}$$

При достаточно большом  $n$

$$y_n \approx \left\{ 1 + \left[ \frac{\Delta f}{\Delta F_n} \left( 1 + \frac{f_0}{f_0 + \Delta f} \right) \right]^2 \cdot \frac{\ln 2}{n} \right\}^{-\frac{n}{2}} \quad (23)$$

Предельную форму амплитудно-частотной характеристики найдем, переходя к пределу

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (24)$$

Вводя

$$\varepsilon = \left[ \frac{\Delta f}{\Delta F_n} \left( 1 + \frac{f_0}{f_0 + \Delta f} \right) \right]^2 \cdot \frac{\ln 2}{n}$$

и учитывая, что при  $n \rightarrow \infty$  —  $\varepsilon \rightarrow 0$ , из (23) и (24), получим

$$\begin{aligned} y &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} \cdot \left\{ -\frac{n^2}{2} \left[ \frac{\Delta f}{\Delta F_n} \left( 1 + \frac{f_0}{f_0 + \Delta f} \right) \right]^2 \right\} = \\ &= e^{-\frac{\ln 2}{2} \left[ \frac{\Delta f}{\Delta F_n} \left( 1 + \frac{f_0}{f_0 + \Delta f} \right) \right]^2} \end{aligned} \quad (25)$$

В случае малых расстроек (или, что то же, в случае когда характеристика контура полагается симметричной кривой), т. е. при  $\frac{f_0}{f_0 + \Delta f} = 1$ , амплитудно-частотная характеристика примет вид

$$y^* = e^{-\frac{\ln 2}{2} \left( \frac{2 \cdot \Delta f}{\Delta F_n} \right)^2} \quad (26)$$

Заметим, что предельное уравнение амплитудно-частотной характеристики многокаскадного резонансного усилителя было получено В. И. Сифоровым в виде [2]

$$y = e^{-z^2}.$$

Выражение (26) можно рассматривать как приближенное предельное уравнение реальной, несимметричной амплитудно-частотной характеристики, в то время как уравнение (25) является точным<sup>1)</sup>.

Между приближенным и точным представлением предельной формы амплитудно-частотной характеристики резонансного усилителя, как нетрудно видеть, существует связь:

$$y = (y^*)^2,$$

где

$$\xi = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{f_0}{f_0 + \Delta f} \right)$$

или

$$\xi = \frac{1 + \frac{\Delta f}{2f_0}}{1 + \frac{\Delta f}{f_0}}.$$

Заметим, что при

$$\Delta f = 0 \quad \xi = 1;$$

$$\Delta f > 0 \quad \xi < 1;$$

$$\Delta f < 0 \quad \xi > 1.$$

В заключение заметим, что переход к пределу при бесконечно большом числе каскадов является чисто формальным. Однако предельная форма амплитудно-частотной характеристики достаточно хорошо отражает свойства усилителя даже при сравнительно небольшом числе каскадов, например, при  $n > 3$  [3]. В качестве иллюстрации приведем характеристику пятикаскадного резонансного усилителя с полосой  $\Delta F = 3$  мГц, настроенного на частоту  $f_0 = 30$  мГц.

$$y_5 = \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^5},$$

где, как это следует из (22) и (2),

$$x = \frac{\Delta f}{\Delta F} \cdot \sqrt{\sqrt[5]{2}-1} \cdot \left( 1 + \frac{f_0}{f} \right).$$

Эта характеристика изображена на фиг. 3 (кривая  $y_5$ ). На этом же графике изображена предельная амплитудно-частотная характеристика, построенная по формуле (25) (кривая  $y_\infty$ ).

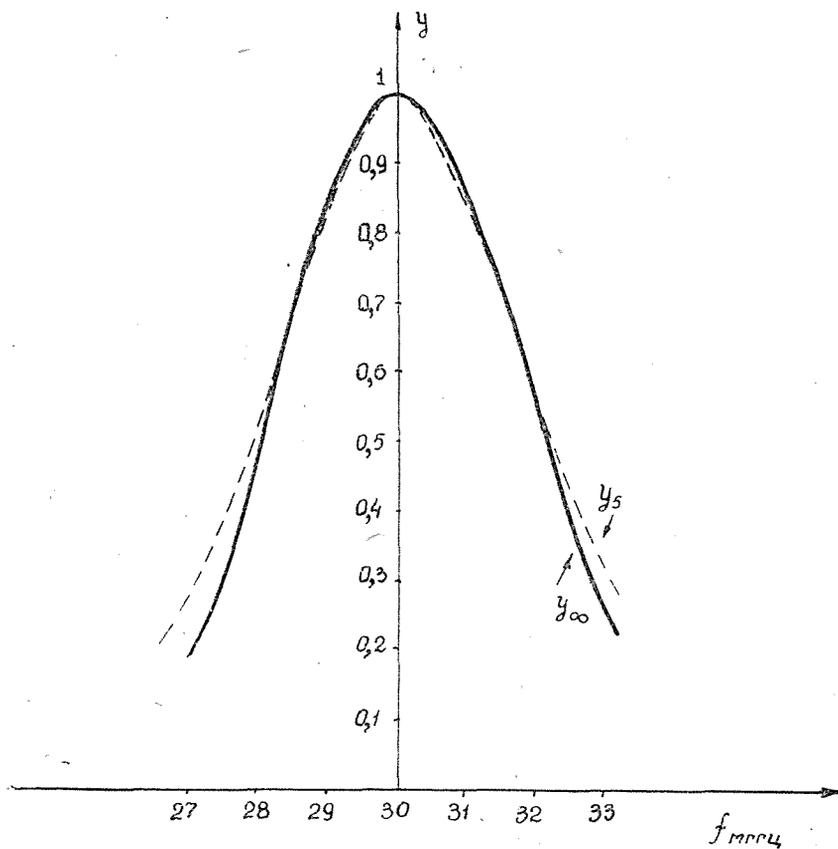
Наибольшее отклонение  $y_5$  от  $y_\infty$  внутри полосы пропускания не превышает 2%.

### Экспериментальная проверка некоторых результатов

Изложенное исследование проводилось в предположении независимости сопротивления активных потерь контура от величины расстройки. Кроме того, совершенно не учитывалось влияние обратных связей, кото-

1) При постоянстве сопротивления потерь.

рые могут существенно изменить форму амплитудно-частотной характеристики как одного каскада, так и всего усилителя. Поэтому ждать точного совпадения экспериментальных данных с полученными выше результатами не приходится.



Фиг. 3. Амплитудно-частотная характеристика пятикаскадного резонансного усилителя ( $y_5$ ) и предельная амплитудно-частотная характеристика многокаскадного резонансного усилителя ( $y_\infty$ ).

Для того чтобы оценить выводы, относящиеся к многокаскадным усилителям, необходимо прежде всего определить, насколько состоятельно исходное допущение ( $r_{\text{потерь}}$  — постоянно) в случае одного каскада.

Для этой цели была снята амплитудно-частотная характеристика широкополосного каскада резонансного усилителя.

Схема каскада изображена на фиг. 4, амплитудно-частотная характеристика каскада — на фиг. 5.

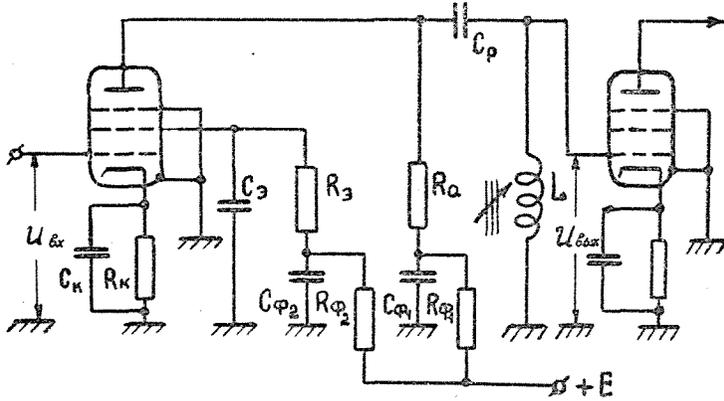
Полоса пропускания каскада  $\Delta F_{0.7} = 10,7$  мГц, резонансная частота  $f_0 = 30$  мГц. Как видно из характеристики, правая и левая части полосы пропускания равны, соответственно:

$$\Delta f_{0.7(+)} = 5,7 \text{ мГц},$$

$$\Delta f_{0.7(-)} = -5 \text{ мГц}.$$

Таким образом, асимметрия полосы пропускания оценится коэффициентом

$$\psi = \frac{\Delta f_{0.7(+)} + \Delta f_{0.7(-)}}{\Delta F_{0.7}} = \frac{0,7}{10,7} \approx 6,5\%.$$



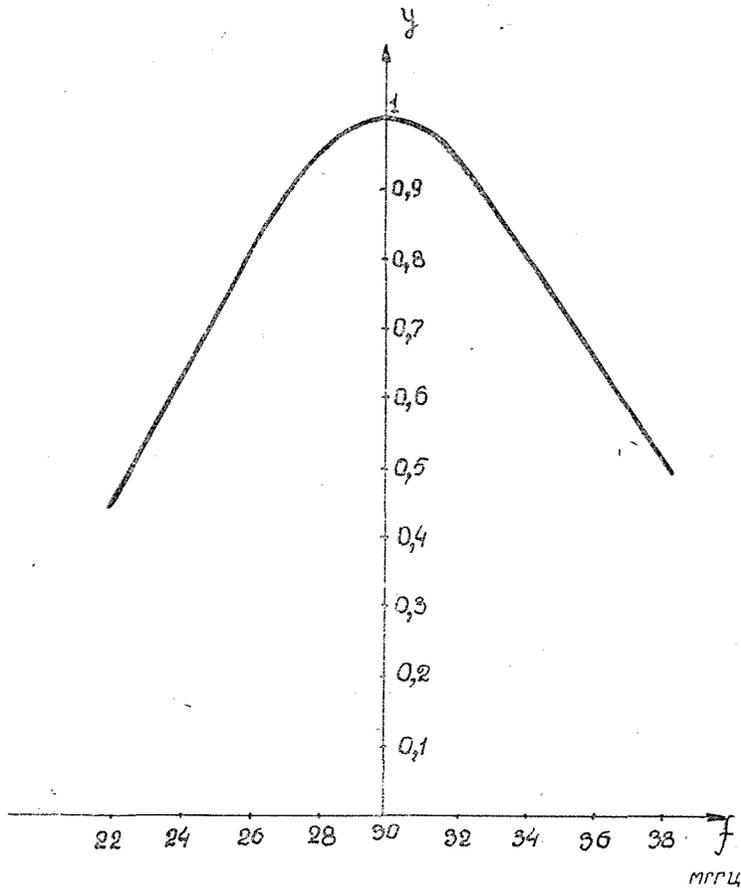
Фиг. 4. Каскад широкополосного резонансного усилителя.

Как было показано выше, коэффициент  $\psi$  равен

$$\psi \approx \frac{d}{4} \quad \left( \text{при условии } \frac{d^2}{4} \ll 1 \right),$$

причем

$$d = \frac{\Delta F_{0.7}}{f_0}.$$



Фиг. 5. Амплитудно-частотная характеристика каскада широкополосного резонансного усилителя.

В нашем случае

$$d = \frac{10,7}{30} = 0,356 \quad \left( \frac{d^2}{4} \approx 0,03 \ll 1 \right).$$

Итак,

$$\psi \approx \frac{d}{4} = 8,9\%.$$

Таким образом, расхождение между результатом эксперимента и анализа  $\approx 30\%$ , причем асимметрия экспериментально снятой амплитудно-частотной характеристики оказалась менее резко выраженной, чем это следовало из анализа.

Этот результат вполне понятен; как было указано, увеличение сопротивления активных потерь с ростом частоты приводит к тому, что правая ветвь характеристики опускается, а левая поднимается.

Сопоставляя данные анализа и эксперимента, приходим к следующему заключению: во-первых, оценку асимметрии амплитудно-частотной характеристики можно производить по формулам 17, 18, 19, имея в виду, что эти формулы дают несколько завышенное значение коэффициента асимметрии. Во-вторых, асимметрия амплитудно-частотной характеристики в пределах полосы пропускания невелика.

### Выводы

1. Асимметрия резонансной характеристики контура приводит, естественно, к асимметрии амплитудно-частотной характеристики многокаскадного усилителя, а также к асимметрии полосы пропускания. Однако величина полосы пропускания будет такой же, как в случае симметричной резонансной кривой контура с данным затуханием. Для  $n$ -каскадного резонансного усилителя полоса пропускания на уровне 0,7 равна

$$\Delta F_n = d \cdot f_0 \cdot \sqrt{\frac{n}{\sqrt{2}-1}}$$

и при  $n \gg 1$

$$\Delta F_n \approx d \cdot f_0 \cdot \sqrt{\frac{\ln 2}{n}}$$

2. Оценка асимметрии полосы пропускания дается формулами (17)–(20). В частности, при большом числе каскадов и небольшом затухании

$$\psi \approx \frac{d}{4} \cdot \sqrt{\frac{\ln 2}{n}}$$

3. Предельная форма амплитудно-частотной характеристики многокаскадного резонансного усилителя при  $n \rightarrow \infty$  и заданной результирующей полосе пропускания на уровне 0,7 ( $\Delta F$ ) будет:

$$y = e^{-2 \cdot \ln 2 \cdot \left[ \frac{\Delta f}{\Delta F} \right]^2 \cdot \left( \frac{1 + \frac{\Delta f}{2f_0}}{+ \frac{\Delta f}{f_0}} \right)^2}$$

Для случая малых расстройек или в предположении симметричности резонансной кривой контура, как известно,

$$y = e^{-2 \cdot \ln 2 \cdot \left[ \frac{\Delta f}{\Delta F} \right]^2}$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сифоров В. И. Радиоприемные устройства. Воениздат, 1951.
  2. Сифоров В. И. Полосовые усилители. ОНТИ, 1936.
  3. Лейтес Р. Д. Процессы установления в многокаскадном резонансном усилителе. Радиотехника, № 3, 1947 г.
-