

ОБ ОДНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ p -СЕМЕЙСТВА m -ПЛОСКОСТЕЙ В n -МЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.Т. Ивлев, В.К. Барышева, Е.А. Молдованова

Томский политехнический университет
E-mail: eam7@front.ru

Изучаются частные классы семейств линейных подпространств в многомерном евклидовом пространстве, связанные со специальным видом отображений некоторых полей инвариантных двумерных площадей.

1. Аналитический аппарат

Все функции, встречающиеся в данной статье, предполагаются аналитическими, а рассуждения носят локальный характер.

Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1–5].

Рассматривается n -мерное евклидово пространство E_n , отнесённое к подвижному ортонормальному реперу $R = \{A, \bar{e}_i\}$, $(i, j, k = 1, n)$ с деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i, d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j, \quad D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k. \quad (1.1)$$

Здесь 1-формы ω_i^j удовлетворяют соотношениям

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0, \quad (1.2)$$

вытекающим из условий ортонормальности репера R :

$$\langle \bar{e}_i; \bar{e}_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (1.3)$$

Здесь символом $\langle \bar{x}; \bar{y} \rangle$ обозначается скалярное произведение векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ пространства E_n .

Как указано в [4, п. 1.4], с евклидовым пространством E_n ассоциируется $(p+N)$ -мерное расслоенное пространство $R_{p,N} = (M_p, Q_N)$ с базой M_p и слоями Q_N . Здесь M_p – p -мерное дифференцируемое многообразие с базовыми формами θ^a ($a, b, c = 1, p$), удовлетворяющими структурным уравнениям [4, (1.1)]. Каждый слой, отвечающий точке $B(u^a) \in M_p$, представляет собой грасманово многообразие всех m -плоскостей

$$l_m = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m) \quad (1.4)$$

пространства E_n с базовыми формами $\omega^{\hat{\alpha}}, \omega_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}} = -\omega_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}}$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, m; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma} = m+1, n$), удовлетворяющими структурным уравнениям [4, (1.7)]. В расслоенном пространстве $R_{p,N}$, где число N определяется по формуле [4, (1.5)], как и в [1, п. 1.4)], задаётся сечение: $B(u^a) \in M_p \mapsto l_m \in Q_N$. В результате получается секущая поверхность S_p^m – p -мерное многообразие m -плоскостей (1.4) в E_n [4, замечание 1.3]. Эта секущая поверхность определяется системой дифференциальных уравнений [4, (1.8)]:

$$\omega^{\hat{\alpha}} = A_{\hat{\alpha}}^a \theta^a, \omega_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}} = A_{\hat{\alpha}a}^{\hat{\beta}} \theta^a = -\omega_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}} = -A_{\hat{\alpha}a}^{\hat{\beta}} \theta^a, \quad a, b, c = 1, p, \quad (1.5)$$

где величины $A_{\hat{\alpha}}^a$ и $A_{\hat{\alpha}a}^{\hat{\beta}} = -A_{\hat{\alpha}a}^{\hat{\beta}}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям [4, (1.9)]. Как и в [4] предполагается, что числа p, m и n удовлетворяют неравенствам [4, (1.11)]:

$$1 < p < N. \quad (1.6)$$

2. Двумерные площадки в линейных подпространствах l_m, P_{n-m} и L_p

2.1. В статье [4] показано, что каждой точке $B(u^a)$ базы M_p в соответствующей m -плоскости $l_m \in S_p^m$ отвечает в общем случае одна точка G_1 (первый центр), координаты x^{α} которой определяются системой линейных уравнений [4, (3.6)], где величины A^{α} и A_{α}^{β} определяются по формулам [4, (2.1)]. Поэтому всегда можно провести такую канонизацию ортонормального репера R , при которой точка $A \in l_m$ окажется первым центром G_1 . Однако в данной статье такую канонизацию репера R проводить не будем, будем предполагать точку $A \in l_m$, отвечающую точке $B(u^a) \in M_p$, заданной. Тогда кроме дифференциальных уравнений (1.5) на базе M_p будут выполняться дифференциальные уравнения

$$\omega^a = A_a^\alpha \theta^a, \quad (2.1)$$

где в силу (1.1) величины A_a^α удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dA_a^\alpha + A_a^\beta \omega_\beta^\alpha - A_b^\alpha \theta_a^b = \tilde{A}_{ab}^\alpha \theta^b. \quad (2.2)$$

Поскольку теперь точка $A \in l_m$, отвечающая точке $B(u^r) \in M_p$, задана, то точке $B(u^r)$ можно с учётом (1.4), (1.3) и (1.1) сопоставить $(n-m)$ -плоскость

$$P_{n-m} = (\bar{A}, \bar{e}_{m+1}, \dots, \bar{e}_n), \quad (2.3)$$

ортогональную m -плоскости l_m . Поэтому с этой $(n-m)$ -плоскостью P_{n-m} можно связать величины, аналогичные (2.2). В частности, на базе M_p можно рассмотреть с учётом (2.1) и (1.5) величины

$$A_{\alpha}^{\hat{\beta}} = \frac{1}{2} A_{\alpha(a}^{\alpha} A_{|\alpha| \beta)}^{\hat{\beta}} A^{ab}, \quad (2.4)$$

которые в силу (2.2) и [4, (2.3–2.5)] удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dA_{\alpha}^{\hat{\beta}} + A_{\alpha}^{\hat{\gamma}} \omega_{\gamma}^{\hat{\beta}} - A_{\gamma}^{\hat{\beta}} \omega_{\alpha}^{\hat{\gamma}} = A_{\alpha}^{\hat{\beta}} \theta^a.$$

Здесь явный вид величин, стоящих при θ^a , для нас несущественный. Поэтому величины (2.4) образуют смешанный тензор в смысле Г.Ф. Лаптева [2]. Как показано в [4, (2.9), (3.9)], тензор $\{A_{\alpha}^{\hat{\beta}}\}$ определяет линейный оператор $\Pi = \{A_{\alpha}^{\hat{\beta}}\}: l_m \rightarrow l_m$, который с учётом [4, (3.10)] в общем случае является невырожденным на базе M_p . Аналогично показывается, что величины (2.4) определяют линейный оператор

$$\hat{\Pi} = \{A_{\alpha}^{\hat{\beta}}\}: P_{n-m} \rightarrow P_{n-m}, \quad (2.5)$$

являющийся в общем случае невырожденным на базе M_p :

$$\det[A_{\alpha}^{\hat{\beta}}] \neq 0. \quad (2.6)$$

Заметим с учётом (2.5) и [4, (3.10)], что линейные операторы Π и $\hat{\Pi}$ можно рассматривать в каждой точке $B(u^r) \in M_p$ как невырожденные в силу (2.6) и [4, (3.10)] центроаффинные преобразования соответствующих линейных подпространств.

2.2. В [4] показано, что каждому направлению [4, (3.2)] в L_p отвечает симметрический линейный оператор [4, (3.6)]:

$$\Pi(t) = \{A_{ab}^{\beta} t^a t^b\}: l_m \rightarrow l_m, \quad (2.7)$$

$$\text{где} \quad A_{ab}^{\beta} = \frac{1}{2} A_{\alpha(a}^{\alpha} A_{|a| \beta)}^{\beta}. \quad (2.8)$$

Из (2.7) с учётом [4, (3.9)] заключаем, что совокупность всех направлений [4, (3.2)] $\bar{t} = (\bar{B}, \bar{e}_a) t^a \in L_p$, которым отвечают линейные операторы Π и $\hat{\Pi}(t) = \Pi \cdot \Pi(t): l_m \rightarrow l_m$ с нулевыми следами, образует в L_p гиперконусы K_{p-1} [4, (3.7)] и K_{p-1}^* второго порядка с вершиной $B(u^r) \in L_p$:

$$K_{p-1}: A_{ab} t^a t^b = 0, K_{p-1}^*: B_{ab} t^a t^b = 0, \\ A_{ab} = A_{ab}^{\alpha}, B_{ab} = A_{ab}^{\gamma} A_{\gamma}^{\alpha}, \quad (2.9)$$

причём компоненты тензоров A_{ab} и B_{ab} удовлетворяют дифференциальным уравнениям [4, (2.2)] и уравнениям:

$$dB_{ab} - B_{cb} \theta_a^c - B_{ac} \theta_b^c = B_{abc} \theta^c. \quad (2.10)$$

Здесь явный вид величин B_{abc} для нас несущественный.

Из (2.9) и [4, (3.7)] с учётом [4, (2.1)] и (2.10) следует, что каждой точке $B(u^r) \in M_p$ отвечает центроаффинное преобразование пространства L_p , порожаемое гиперконусами K_{p-1} и K_{p-1}^* :

$$P = \{B_a^b\}, B_a^b = B_{ac} A^{cb}, dB_a^b + B_a^c \theta_c^b - B_c^b \theta_a^c = B_{ac}^b \theta^c. \quad (2.11)$$

Здесь явный вид величин B_{ac}^b для нас несущественный.

2.3. Отмеченные в данном пункте 2 центроаффинные преобразования $\Pi: l_m \rightarrow l_m$, $\hat{\Pi}: P_{n-m} \rightarrow P_{n-m}$, $P: L_p \rightarrow L_p$, отвечающие точке $B(u^r) \in M_p$, дают возможность определить двумерные площадки $l_2^1 \subset l_m$, $l_2^2 \subset P_{n-m}$ и $L_2^* \subset L_p$.

В дальнейшем будет использована следующая система индексов:

$$\alpha, \beta, \gamma, \sigma = \overline{1, m}; \quad \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\sigma} = \overline{m+1, n}; \\ a, b, c, e = \overline{1, p}; \quad \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \sigma_1 = \overline{1, 2}; \\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \sigma_2 = \overline{3, m}; \quad \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\gamma}_1, \hat{\sigma}_1 = \overline{m+1, m+2}; \\ \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2, \hat{\gamma}_2, \hat{\sigma}_2 = \overline{m+3, n}; \quad a_1, b_1, c_1, e_1 = \overline{1, 2}; \\ a_2, b_2, c_2, e_2 = \overline{3, p}. \quad (2.12)$$

Каждой точке $B(u^r) \in M_p$ сопоставим нижеследующие двумерные плоскости, определённые соответствующими линейными уравнениями:

$$l_2^1 \subset l_m \Leftrightarrow x^{\alpha_2} = g_{\alpha_1}^{\alpha_2} x^{\alpha_1}, \quad x^{\hat{\alpha}} = 0; \\ l_2^2 \subset P_{n-m} \Leftrightarrow x^{\hat{\alpha}_2} = g_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\alpha}_2} x^{\hat{\alpha}_1}, \quad x^{\alpha} = 0; \\ L_2^* \subset L_p \Leftrightarrow t^{a_2} = h_{a_1}^{a_2} t^{a_1}. \quad (2.13)$$

Здесь величины $g_{\alpha_1}^{\alpha_2}$, $g_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\alpha}_2}$ и $h_{a_1}^{a_2}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dg_{\alpha_1}^{\alpha_2} + g_{\alpha_1}^{\beta_2} \omega_{\beta_2}^{\alpha_2} - g_{\beta_1}^{\alpha_2} \omega_{\alpha_1}^{\beta_2} + \omega_{\alpha_1}^{\alpha_2} = g_{\alpha_1 a}^{\alpha_2} \theta^a; \\ dg_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\alpha}_2} + g_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\beta}_2} \omega_{\hat{\beta}_2}^{\hat{\alpha}_2} - g_{\hat{\beta}_1}^{\hat{\alpha}_2} \omega_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\beta}_2} + \omega_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\alpha}_2} = g_{\hat{\alpha}_1 a}^{\hat{\alpha}_2} \theta^a; \\ dh_{a_1}^{a_2} + h_{a_1}^{b_2} \omega_{b_2}^{a_2} - h_{b_1}^{a_2} \omega_{a_1}^{b_2} + \omega_{a_1}^{a_2} = h_{a_1 a}^{a_2} \theta^a. \quad (2.14)$$

Из [4, (3.9)], (2.5, 2.6 и 2.9) с учётом (2.13) заключаем, что 1) плоскость $l_2^1 \subset l_m$, проходящая через точку A ; 2) плоскость $l_2^2 \subset P_{n-m}$, проходящая через точку A ; 3) двумерная площадка $L_2^* \ni B(u^r)$ в L_p , соответственно параллельна двумерному направлению, неподвижному 1) при линейном операторе $\Pi: l_m \rightarrow l_m$, 2) при линейном операторе $\hat{\Pi}: P_{n-m} \rightarrow P_{n-m}$, 3) при центроаффинном преобразовании $P: L_p \rightarrow L_p$ тогда и только тогда, когда величины $g_{\alpha_1}^{\alpha_2}$, $g_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\alpha}_2}$ и $h_{a_1}^{a_2}$ удовлетворяют алгебраическим уравнениям, соответственно:

$$l_2^1: \varphi_{\alpha_1}^{\alpha_2} \equiv A_{\beta_2}^{\beta_1} g_{\alpha_1}^{\beta_2} g_{\beta_1}^{\alpha_2} - A_{\alpha_1}^{\alpha_2} = 0, \\ A_{\alpha_1}^{\alpha_2} = A_{\alpha_2}^{\alpha_1}, \quad A_{\alpha_1 \beta_2}^{\alpha_2} = A_{\alpha_1}^{\beta_1} \delta_{\beta_2}^{\alpha_2} - A_{\beta_2}^{\alpha_2} \delta_{\alpha_1}^{\beta_1}; \quad (2.15)$$

$$l_2^2: \varphi_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\alpha}_2} \equiv \hat{A}_{\hat{\beta}_2}^{\hat{\beta}_1} g_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\beta}_2} g_{\hat{\beta}_1}^{\hat{\alpha}_2} - \hat{A}_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\alpha}_2} = 0, \\ \hat{A}_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\alpha}_2} = \hat{A}_{\hat{\alpha}_2}^{\hat{\alpha}_1}, \quad \hat{A}_{\hat{\alpha}_1 \hat{\beta}_2}^{\hat{\alpha}_2} = \hat{A}_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\beta}_1} \delta_{\hat{\beta}_2}^{\hat{\alpha}_2} - \hat{A}_{\hat{\beta}_2}^{\hat{\alpha}_2} \delta_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\beta}_1}; \quad (2.16)$$

$$L_2^* : \psi_{a_1}^{a_2} \equiv B_{b_2}^{b_1} h_{a_1}^{b_2} + B_{a_1 b_2}^{a_2 b_1} h_{b_1}^{b_2} - B_{a_1}^{a_2} = 0, \\ B_{a_1 b_2}^{a_2 b_1} = B_{a_1}^{b_1} \delta_{b_2}^{a_2} - B_{b_2}^{a_2} \delta_{a_1}^{b_1}. \quad (2.17)$$

Замечание 2.1. Каждая из систем неоднородных алгебраических уравнений (2.15, 2.16 и 2.17) имеет в общем случае конечное число решений относительно $g_{a_1}^{a_2}$, $g_{a_1}^{a_2}$ и $h_{a_1}^{a_2}$ в силу геометрического выбора соответствующих плоскостей $l_2^1 \subset l_m$, $l_2^2 \subset P_{n-m}$ и $L_2^* \subset L_p$. Этот результат также вытекает из того, что в общем случае на базе M_p каждый из нижеследующих определителей, как можно показать, не равен нулю:

$$1) \quad D \equiv \det [A_{\alpha_1 \beta_2}^{\alpha_2 \beta_1}]. \quad (2.18)$$

Здесь пара (β_1) указывает на номер строки, а пара (α_2) – на номер столбца.

$$2) \quad \hat{D} \equiv \det [A_{\alpha_1 \beta_2}^{\alpha_2 \beta_1}]. \quad (2.19)$$

Здесь пара (β_1) указывает на номер строки, а пара (α_2) – на номер столбца.

$$3) \quad L \equiv \det [B_{a_1 b_2}^{a_2 b_1}]. \quad (2.20)$$

Здесь пара (b_1) указывает на номер строки, а пара (a_2) – на номер столбца.

Неравенство нулю на базе M_p каждого из определителей (2.18–2.20) в общем случае обеспечивает алгебраическую независимость уравнений (2.15–2.17), что и приводит к конечному числу решений относительно $g_{a_1}^{a_2}$, $g_{a_1}^{a_2}$ и $h_{a_1}^{a_2}$.

Замечание 2.2. Из (2.13) замечаем, что

$$l_2^1 = (\bar{A}, \bar{\varepsilon}_1^*, \bar{\varepsilon}_2^*) \subset l_m, \quad l_2^2 = (\bar{A}, \bar{\varepsilon}_{m+1}^*, \bar{\varepsilon}_{m+2}^*) \subset P_{n-m}, \quad (2.21)$$

$$\text{где } \bar{\varepsilon}_{\alpha_1}^* = \bar{e}_{\alpha_1} + g_{\alpha_1}^{\alpha_2} \bar{e}_{\alpha_2}, \quad \bar{\varepsilon}_{\alpha_1}^* = \bar{e}_{\alpha_1} + g_{\alpha_1}^{\alpha_2} \bar{e}_{\alpha_2}. \quad (2.22)$$

Из (2.21) и (2.22) с учётом (1.3) следует, что каждой точке $B(u^a) \in M_p$ отвечают линейные подпространства

$$\tilde{l}_{m-2} = (\bar{A}, \bar{\varepsilon}_3^*, \dots, \bar{\varepsilon}_m^*) \perp l_2^1, \quad \tilde{l}_{m-2} \cup l_2^1 = l_m, \quad (2.23)$$

$$\tilde{P}_{n-m-2} = (\bar{A}, \bar{\varepsilon}_{m+3}^*, \dots, \bar{\varepsilon}_n^*) \perp l_2^2, \quad \tilde{P}_{n-m-2} \cup l_2^2 = P_{n-m},$$

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha_2}^* = \bar{e}_{\alpha_2} + g_{\alpha_2}^{\alpha_1} \bar{e}_{\alpha_1}, \quad \bar{\varepsilon}_{\alpha_2}^* = \bar{e}_{\alpha_2} + g_{\alpha_2}^{\alpha_1} \bar{e}_{\alpha_1},$$

$$\text{где } g_{\alpha_1}^{\alpha_2} = -g_{\alpha_2}^{\alpha_1}, \quad g_{\alpha_1}^{\alpha_2} = -g_{\alpha_2}^{\alpha_1}. \quad (2.24)$$

3. Отображения $f(t): l_2^1 \rightarrow l_2^2$ и $\hat{f}(t): l_2^1 \rightarrow l_2^2$ в направлении $t \in L_p$

3.1. Определение и геометрический смысл отображений $f(t)$ и $\hat{f}(t)$

Каждой точке $B(u^a) \in M_p$ сопоставим точки $X_1 \in l_2^1 \subset l_m$ и $X_2 \in l_2^2 \subset P_{n-m}$ с радиус-векторами

$$\bar{X}_1 = \bar{A} + x^{\alpha_1} \bar{\varepsilon}_{\alpha_1}^*, \quad \bar{X}_2 = \bar{A} + x^{\alpha_1} \bar{\varepsilon}_{\alpha_1}^*. \quad (3.1)$$

Из (3.1) с учётом (2.21), (2.22), (2.1), [4, (3.1)] и [4, (1.2), (1.4), (1.8)] получаем

$$d\bar{X}_1 = (\dots)^{\alpha} \bar{\varepsilon}_{\alpha}^* + (\dots)^{\alpha_2} \bar{e}_{\alpha_2} + (G_a^{\alpha_1} + x^{\alpha_1} G_{\alpha_1 a}^{\alpha_1}) t^a \theta \bar{\varepsilon}_{\alpha_1}^*, \\ d\bar{X}_2 = (\dots)^{\alpha} \bar{\varepsilon}_{\alpha}^* + (\dots)^{\alpha_2} \bar{\varepsilon}_{\alpha_2}^* + (G_a^{\alpha_1} + x^{\alpha_1} G_{\alpha_1 a}^{\alpha_1}) t^a \theta \bar{\varepsilon}_{\alpha_1}^*. \quad (3.2)$$

Здесь символ $(\dots)$ означает несущественные выражения, а величины, стоящие в круглых скобках при векторах $\bar{\varepsilon}_{\alpha_1}^*$ и $\bar{\varepsilon}_{\alpha_2}^*$, определяются по формулам:

$$G_a^{\alpha_1} = A_a^{\alpha_1} + g_{\alpha_2}^{\alpha_1} A_a^{\alpha_2}, \quad G_a^{\alpha_2} = A_a^{\alpha_2} + g_{\alpha_1}^{\alpha_2} A_a^{\alpha_1}, \\ G_{\alpha_1 a}^{\alpha_1} = A_{\alpha_1 a}^{\alpha_1} + g_{\alpha_2}^{\alpha_1} A_{\alpha_1 a}^{\alpha_2} + g_{\alpha_1}^{\alpha_2} A_{\alpha_2 a}^{\alpha_1} + A_{\alpha_2 a}^{\alpha_2} g_{\alpha_1}^{\alpha_2} g_{\alpha_2}^{\alpha_1}, \quad (3.3) \\ G_{\alpha_1 a}^{\alpha_2} = A_{\alpha_1 a}^{\alpha_2} + g_{\alpha_2}^{\alpha_2} A_{\alpha_1 a}^{\alpha_1} + g_{\alpha_1}^{\alpha_2} A_{\alpha_2 a}^{\alpha_1} + A_{\alpha_2 a}^{\alpha_2} g_{\alpha_1}^{\alpha_2} g_{\alpha_2}^{\alpha_1}$$

и в силу (1.5), (2.2) и (2.14) удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dG_a^{\alpha_1} + G_a^{\beta_1} \omega_{\beta_1}^{\alpha_1} - G_b^{\alpha_1} \theta^b = G_{ab}^{\alpha_1} \theta^b,$$

$$dG_a^{\alpha_2} + G_a^{\beta_2} \omega_{\beta_2}^{\alpha_2} - G_b^{\alpha_2} \theta^b = G_{ab}^{\alpha_2} \theta^b,$$

$$dG_{\alpha_1 a}^{\alpha_1} + G_{\alpha_1 a}^{\beta_1} \omega_{\beta_1}^{\alpha_1} - G_{\beta_1 a}^{\alpha_1} \omega_{\alpha_1}^{\beta_1} - G_{\alpha_1 b}^{\alpha_1} \theta^b = G_{\alpha_1 ab}^{\alpha_1} \theta^b,$$

$$dG_{\alpha_1 a}^{\alpha_2} + G_{\alpha_1 a}^{\beta_2} \omega_{\beta_2}^{\alpha_2} - G_{\beta_2 a}^{\alpha_2} \omega_{\alpha_2}^{\beta_2} - G_{\alpha_1 b}^{\alpha_2} \theta^b = G_{\alpha_1 ab}^{\alpha_2} \theta^b.$$

Здесь явный вид величин, стоящих при θ^b , для нас несущественный.

Из (3.2) замечаем, что каждому направлению $t \in L_p$, касательному к кривой $k(t)$ на базе M_p , проходящей через точку $B(u^a) \in M_p$, отвечают точки $Y_1 \in l_2^1$ и $Y_2 \in l_2^2$ с радиус-векторами

$$\bar{Y}_1 = \bar{A} + y^{\alpha_1} \bar{\varepsilon}_{\alpha_1}^*, \quad \bar{Y}_2 = \bar{A} + y^{\alpha_1} \bar{\varepsilon}_{\alpha_1}^*, \quad (3.4)$$

где

$$y^{\alpha_1} = (G_a^{\alpha_1} + x^{\alpha_1} G_{\alpha_1 a}^{\alpha_1}) t^a, \quad y^{\alpha_2} = (G_a^{\alpha_2} + x^{\alpha_1} G_{\alpha_1 a}^{\alpha_2}) t^a. \quad (3.5)$$

Таким образом, каждому направлению $t \in L_p$ в точке $B(u^a) \in M_p$ отвечают линейные отображения

$$f(t): l_2^1 \rightarrow l_2^2 \Leftrightarrow f(t) X_1 = Y_2, \\ \hat{f}(t): l_2^1 \rightarrow l_2^2 \Leftrightarrow \hat{f}(t) X_2 = Y_1 \quad (3.6) \\ (t - \text{фиксировано}).$$

Каждое из этих отображений определяется соответствующими функциями (3.5) (при фиксированных t^a) и в силу (3.2), (2.22), [4, (3.2), (3.13)], (2.3, 3.4 и 1.5) геометрически характеризуется следующим образом

$$\{T(X_1)_{k(t)} \cup l_m \cup \tilde{P}_{n-m-2}\} \cap l_2^2 = Y_2,$$

$$\{T(X_2)_{k(t)} \cup P_{n-m} \cup \tilde{l}_{m-2}\} \cap l_2^1 = Y_1.$$

Здесь из рассмотрения исключается случай, когда точки $X_1 \in l_m$ и $X_2 \in P_{n-m}$, отвечающие точке $B(u^a) \in M_p$, являются фокусами в смысле [5] линейных подпространств l_m и P_{n-m} вдоль кривой $k(t)$ на базе M_p расслоения $R_{p,N}$.

3.2. Отображения $f(t) \rightarrow f_a(t)$ и $\hat{f}(t) \rightarrow \hat{f}_a(t)$

Каждое из отображений (3.6), отвечающих точке $B(u^a) \in M_p$, при фиксированных t^a определяется соответствующими двумя функциями двух аргументов.

Определение 3.1. Отображение $f(t): l_2^1 \rightarrow l_2^2$ ($\hat{f}(t): l_2^1 \rightarrow l_2^2$), отвечающее точке $B(u^a) \in M_p$, называется отображением $f_a(t)$ ($\hat{f}_a(t)$), т.е. $f(t) \rightarrow f_a(t)$ ($\hat{f}(t) \rightarrow \hat{f}_a(t)$)

(t – фиксировано), если соответствующие две функции двух аргументов, его определяющие, удовлетворяют условиям Коши-Римана [6. С. 43–44]:

$$\frac{\partial y^{m+1}}{\partial x^1} = \frac{\partial y^{m+2}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial y^{m+2}}{\partial x^1} = -\frac{\partial y^{m+1}}{\partial x^2}$$

$$\left(\frac{\partial y^1}{\partial x^{m+1}} = \frac{\partial y^2}{\partial x^{m+2}}, \quad \frac{\partial y^2}{\partial x^{m+1}} = -\frac{\partial y^1}{\partial x^{m+2}} \right). \quad (3.7)$$

Из (3.7) и (3.5) с учётом (3.3), (1.5) и (1.2) вытекает

Утверждение 3.1. Отображение $f(t): l_2^1 \rightarrow l_2^2$, отвечающее точке $B(u^a) \in M_p$, будет отображением $f_a(t)$, т.е. $f(t) \rightarrow f_a(t)$, тогда и только тогда, когда

$$\hat{f}(t) \rightarrow \hat{f}_a(t) \Leftrightarrow \begin{cases} (G_{1a}^{m+1} - G_{2a}^{m+2})t^a = 0, \\ (G_{2a}^{m+1} + G_{1a}^{m+2})t^a = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (G_{m+1,a}^1 - G_{m+2,a}^2)t^a = 0, \\ (G_{m+2,a}^1 + G_{m+1,a}^2)t^a = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

(при фиксированных t^a).

Теорема 3.1. Каждой паре плоскостей $l_2^1 \subset l_m$ и $l_2^2 \subset P_{n-m}$, отвечающих точке $B(u^a) \in M_p$, в центроаффинном пространстве L_p в общем случае соответствует $(p-2)$ -мерное подпространство

$$\Gamma_{p-2} = \{t \in L_p \mid f(t) \rightarrow f_a(t): l_2^1 \rightarrow l_2^2\} \ni B. \quad (3.9)$$

Доказательство. Будем предполагать, что на базе M_p

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} G_{1a}^{m+1} - G_{2a}^{m+2} \\ G_{2a}^{m+1} + G_{1a}^{m+2} \end{bmatrix} = 2 \quad (a - \text{номер столбцов}). \quad (3.10)$$

Поэтому система (3.8) состоит из двух линейных однородных уравнений с p неизвестными t^a и, следовательно, определяет в L_p линейное подпространство (3.9).

Замечание 3.1. Пусть в каждой точке $B(u^a) \in M_p$ линейное подпространство (3.9) задаётся уравнениями:

$$\Gamma_{p-2}: t^{a_1} = h_{a_2}^{a_1} t^{a_2}, \quad (3.11)$$

где $h_{a_2}^{a_1}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dh_{a_2}^{a_1} + h_{a_2}^{b_1} \theta_{b_1}^{a_1} - h_{b_2}^{a_1} \theta_{a_2}^{b_2} + \theta_{a_2}^{a_1} = h_{a_2 a}^{a_1} \theta^a.$$

Из (3.11), 2.13, 2.9, 2.23 и 2.24) следует, что плоскость $L_2^* \subset L_p$ и $(p-2)$ -плоскость $\Gamma_{p-2} \subset L_p$ полярно сопряжены относительно гиперконуса K_{p-1} тогда и только тогда, когда

$$A_{a_2 b_1} h_{b_2}^{b_1} h_{a_1}^{a_2} + A_{a_1 b_1} h_{b_2}^{b_1} + A_{a_2 b_2} h_{a_1}^{a_2} + A_{a_1 b_2} = 0. \quad (3.12)$$

Если величины $h_{a_2}^{a_1}$ с учётом (3.11) и (3.10) определить из системы (3.8), то из системы (3.12) в общем случае алгебраически независимых $2(p-2)$ уравнений можно определить величины $h_{a_2}^{a_1}$ в каждой точке $B(u^a) \in M_p$, с которыми в силу (2.13) ассоциируется плоскость $L_2^* \subset L_p$. Таким образом, с каждой парой плоскостей $l_2^1 \subset l_m$ и $l_2^2 \subset P_{n-m}$, отвечающих точке $B(u^a) \in M_p$, ассоциируется в L_p двумерная плоскость $L_2^* \subset L_p$, полярно сопряжённая $(p-2)$ -плоскости $\Gamma_{p-2} \subset L_p$ относительно гиперконуса $K_{p-1} \subset L_p$.

3.3. Случай $n=p+4$

Теорема 3.2. В общем случае при выполнении условий

$$n=p+4, \quad 1 < p < (m+1)(p+4-m) \quad (3.13)$$

в каждой точке $B(u^a) \in M_p$ существует конечное число плоскостей $l_2^1 \subset l_m$ и $l_2^2 \subset P_{n-m}$ таких, что

$$f(t) \rightarrow f_a(t): l_2^1 \rightarrow l_2^2, \quad \forall t \in L_p. \quad (3.14)$$

Доказательство. Из (3.8) следует, что величины $g_{a_1}^{a_2}$ и $g_{a_1}^{a_2}$, общее число которых равно

$$n^* = 2(n-4), \quad (3.15)$$

определяют плоскости $l_2^1 \rightarrow l_2^2$, о которых идёт речь в (3.14), удовлетворяют с учётом (3.3) следующей системе неоднородных алгебраических уравнений:

$$\varphi_a \equiv A_{a_2 a}^{\alpha_2} (g_{a_2}^{\alpha_2} g_{a_2}^{m+1} - g_{a_2}^{\alpha_2} g_{a_2}^{m+2}) +$$

$$+ A_{1a}^{\alpha_2} g_{a_2}^{m+1} - A_{a_2 a}^{m+2} g_{a_2}^{\alpha_2} + A_{1a}^{m+1} - A_{2a}^{m+2} = 0, \quad (3.16)$$

$$\psi_a \equiv A_{a_2 a}^{\alpha_2} (g_{a_2}^{\alpha_2} g_{a_2}^{m+2} + g_{a_2}^{\alpha_2} g_{a_2}^{m+1}) + A_{1a}^{\alpha_2} g_{a_2}^{m+2} +$$

$$+ A_{a_2 a}^{m+1} g_{a_2}^{\alpha_2} + A_{1a}^{m+2} - A_{2a}^{m+1} = 0, \quad (a = \overline{1, p}).$$

Заметим, что система (3.16) состоит из $2p$ алгебраических уравнений и содержит $n^*=2(n-4)$ неизвестных $g_{a_1}^{a_2}$ и $g_{a_1}^{a_2} = -g_{a_1}^{a_2}$. В случае же $n=p+4$ эта система обладает одинаковым числом $2p$ уравнений и n^* неизвестных. Можно показать, что ранг якобиевой матрицы

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_a}{\partial g_{a_1}^{\alpha_2}} & \frac{\partial \varphi_a}{\partial g_{a_2}^{\alpha_1}} \\ \frac{\partial \psi_a}{\partial g_{a_1}^{\alpha_2}} & \frac{\partial \psi_a}{\partial g_{a_2}^{\alpha_1}} \end{bmatrix}$$

при $n^*=2p$ в общем случае на базе M_p равен $2p$. Это означает, что система (3.16) состоит в общем случае из $2p$ алгебраически независимых уравнений. Поэтому она допускает в общем случае конечное число решений относительно $g_{a_1}^{a_2}$ и $g_{a_1}^{a_2} = -g_{a_1}^{a_2}$, что в силу (2.17) и (1.6) и в соответствии с (3.13) и доказывает настоящую теорему.

3.4. Случай $n > p+4$

Теорема 3.3. В общем случае при выполнении неравенств

$$n > p+4, \quad 1 < p < (m+1)(n-m) \quad (3.17)$$

в каждой точке $B(u^a) \in M_p$ существует бесчисленное множество плоскостей $l_2^1 \subset l_m$ и $l_2^2 \subset P_{n-m}$ таких, что

$$f(t) \rightarrow f_a(t): l_2^1 \rightarrow l_2^2, \quad \forall t \in L_p.$$

Доказательство данной теоремы вытекает из того, что в случае (3.17) с учётом (3.15) система (3.16) содержит неизвестных больше, чем уравнений, входящих в эту систему.

3.5. Случай $n < p+4$

В предыдущих пунктах было показано существование в каждой точке $B(u^a) \in M_p$ в общем случае при

$n \geq p+4$ конечного или бесконечного числа пар плоскостей $l_2 \subset l_m$ и $l_2 \subset P_{n-m}$ типа (3.14). В этом пункте будет показано существование аналогичных пар плоскостей в каждой точке $B(u^e) \in M_p$ при выполнении неравенств

$$n < p+4, \quad 1 < p < (m+1)(n-m). \quad (3.18)$$

Из (3.16) с учётом (3.15) и (3.18) замечаем, что в рассматриваемом случае указанные пары плоскостей $l_2 \subset l_m$ и $l_2 \subset P_{n-m}$ определяются системой алгебраических уравнений, у которой число n^* неизвестных $g_{a_1}^{\alpha_2}$ и $g_{a_1}^{\alpha_2} = -g_{a_1}^{\alpha_2}$ меньше числа $2p$ уравнений. Поэтому в данном случае существование этих пар плоскостей l_2 и l_2 типа (3.14) может быть обеспечено только в некотором частном случае многообразия S_p^m — p -семейства m -плоскостей l_m в E_n . Такое многообразие S_p^m обозначим $\tilde{S}_p^m$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.4. Многообразие $\tilde{S}_p^m$ — многообразие S_p^m в E_n , у которого в каждой точке $B(u^e) \in M_p$ при $n < p+4$ имеется хотя бы одна пара двумерных плоскостей $l_2 \subset l_m$ и $l_2 \subset P_{n-m}$ типа: $f(t) \rightarrow f_a(t): l_2 \rightarrow l_2^a, \forall t \in L_p$, всегда существует.

Доказательство. Точке $B(u^e) \in M_p$ сопоставим плоскости $l_2 \subset l_m$ и $l_2 \subset P_{n-m}$. Для упрощения дальнейших аналитических выкладок и геометрических рассуждений проведём в точке $B(u^e) \in M_p$ такую канонизацию ортонормального репера R , при которой

$$g_{a_2}^{\alpha_1} \equiv g_{a_1}^{\alpha_2} = 0, \quad g_{a_1}^{\alpha_2} \equiv -g_{a_2}^{\alpha_1} = 0, \quad (3.19)$$

что в силу (2.14) приводит к дифференциальным уравнениям:

$$\omega_{a_1}^{\alpha_2} = g_{a_1 a}^{\alpha_2} \theta^a, \quad \omega_{a_2}^{\alpha_1} = g_{a_2 a}^{\alpha_1} \theta^a, \quad (3.20)$$

где величины $g_{a_1 a}^{\alpha_2}$ и $g_{a_2 a}^{\alpha_1}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} dg_{a_1 a}^{\alpha_2} + g_{a_1 a}^{\beta_2} \omega_{\beta_2}^{\alpha_2} - g_{\beta_1 a}^{\alpha_2} \omega_{a_1}^{\beta_1} - g_{a_1 b}^{\alpha_2} \theta^b &= g_{a_1 a b}^{\alpha_2} \theta^b, \\ dg_{a_2 a}^{\alpha_1} + g_{a_2 a}^{\beta_1} \omega_{\beta_1}^{\alpha_1} - g_{\beta_2 a}^{\alpha_1} \omega_{a_2}^{\beta_2} - g_{a_1 b}^{\alpha_1} \theta^b &= g_{a_2 a b}^{\alpha_1} \theta^b. \end{aligned}$$

Здесь явный вид величин, стоящих при θ^b , для нас несущественный. Из (2.21) и (2.22) в силу (3.19) получаем

$$l_1^1 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2), \quad l_2^1 = (\bar{A}, \bar{e}_{m+1}, \bar{e}_{m+2}). \quad (3.21)$$

Пусть плоскости (3.21) удовлетворяют условию (3.14). Тогда из (3.16) в силу (3.19) получаем, что многообразие $\tilde{S}_p^m$, о котором идёт речь в настоящей теореме, характеризуется соотношениями, выполняющимися на базе M_p :

$$A_{1a}^{m+1} - A_{2a}^{m+2} = 0, \quad A_{1a}^{m+2} + A_{2a}^{m+1} = 0, \quad (3.22)$$

которые в силу (1.5) приводят к дифференциальным уравнениям

$$\omega_1^{m+1} - \omega_2^{m+2} = 0, \quad \omega_1^{m+2} + \omega_2^{m+1} = 0. \quad (3.23)$$

Предположим, что на базе M_p выполняются с учётом (3.20) и (3.23) дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \omega_1^{m+1} - \omega_2^{m+2} = 0, \quad \omega_1^{m+2} + \omega_2^{m+1} = 0, \\ \omega_{a_2}^{\alpha_1} = 0, \quad \omega_{a_1}^{\alpha_2} = 0, \quad \omega_{a_1}^{\alpha_2} = 0, \quad \omega_{a_2}^{\alpha_1} = 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

которые определяют многообразие $\tilde{S}_p^m$ — частный случай многообразия S_p^m . Из (1.1) замечаем, что система (3.24) замкнута относительно операции внешнего дифференцирования [1]. Это означает существование многообразия $\tilde{S}_p^m$, а, следовательно, и многообразия S_p^m . Теорема 3.4 доказана.

4. Геометрические свойства многообразия $\tilde{S}_p^m$

4.1. Из дифференциальных уравнений (1.5) и (3.24) с учётом (2.12) следует, что в случае многообразия $\tilde{S}_p^m$ на базе M_p имеют место соотношения (3.22) и

$$A_{a_1 a}^{\alpha_2} = 0, \quad A_{a_1 a}^{\alpha_2} = 0, \quad A_{a_1 a}^{\alpha_2} = 0, \quad A_{a_1 a}^{\alpha_2} = 0. \quad (4.1)$$

Из (2.4, 2.8 и 4.1) получаем

$$\begin{aligned} A_{a_1}^{\alpha_1} &= \frac{1}{2} A_{a_1(a}^{\alpha_2} A_{|a_2|b)}^{\alpha_1} A^{ab}, \quad A_{a_2}^{\alpha_2} = \frac{1}{2} A_{a_2(a}^{\alpha_1} A_{|a_1|b)}^{\alpha_2} A^{ab}, \\ A_{a_1}^{\beta_1} &= \frac{1}{2} A_{a_1(a}^{\alpha_1} A_{|a_1|b)}^{\beta_1} A^{ab}, \quad A_{a_2}^{\beta_2} = \frac{1}{2} A_{a_2(a}^{\alpha_2} A_{|a_2|b)}^{\beta_2} A^{ab}, \quad A_{a_1}^{\beta_2} = A_{\beta_2}^{\alpha_1} = 0, \\ A_{ab} &= A_{a_1 a}^{\alpha_1} A_{|a_1|b}^{\alpha_1} + A_{a_2 a}^{\alpha_2} A_{|a_2|b}^{\alpha_2}, \quad A_{a_1}^{\beta_1} = \frac{1}{2} A_{a_1(a}^{\alpha_1} A_{|a_1|b)}^{\beta_1}, \\ A_{a_2}^{\beta_2} &= \frac{1}{2} A_{a_2(a}^{\alpha_2} A_{|a_2|b)}^{\beta_2} A^{ab}, \quad A_{ab} = A_{a_1}^{\beta_2} = A_{\beta_2}^{\alpha_1} = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Отсюда следует, что на базе M_p многообразия $\tilde{S}_p^m$ в общем случае имеют место неравенства

$$\det[A_{\alpha}^{\beta}] = \det[A_{a_1}^{\beta_1}] \cdot \det[A_{a_2}^{\beta_2}] \neq 0,$$

$$\det[A_{\alpha}^{\beta}] = \det[A_{a_1}^{\beta_1}] \cdot \det[A_{a_2}^{\beta_2}] \neq 0, \quad \det[A_{ab}] \neq 0,$$

что не противоречит соотношениям [4, (2.1)], (2.6) и [4, (3.10)]. Поэтому многообразие $\tilde{S}_p^m$ представляет собой частный случай многообразия S_p^m — p -семейства (в общем случае необязательно центроаффинных) m -плоскостей l_m в E_n .

4.2. Из (1.4, 2.3, 2.21 и 2.23) с учётом (2.15, 2.16 и 4.2) получаем, что в каждой точке $B(u^e) \in M_p$ определены следующие линейные подпространства:

$$\begin{aligned} \Gamma_4^1 &= l_1^1 \cup l_2^1 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_{m+1}, \bar{e}_{m+2}), \\ \Gamma_{n-4}^2 &= \tilde{l}_{m-2} \cup \tilde{P}_{n-m-2} = (\bar{A}, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_m, \bar{e}_{m+3}, \dots, \bar{e}_n), \\ G_{n-2}^1 &= l_m \cup \tilde{P}_{n-m-2} = (\bar{A}, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m, \bar{e}_{m+3}, \dots, \bar{e}_n), \\ G_{n-2}^2 &= \tilde{l}_{m-2} \cup P_{n-m} = (\bar{A}, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_m, \bar{e}_{m+1}, \dots, \bar{e}_n). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь линейные подпространства l_1^1 и l_2^1 являются неподвижными при центроаффинных преобразованиях $\Pi: l_m \rightarrow l_m$ и $\Pi: P_{n-m} \rightarrow P_{n-m}$, соответственно.

Теорема 4.1. В каждой точке $B(u^e) \in M_p$ многообразия $\tilde{S}_p^m$ в E_n все характеристики $(n-2)$ -плоскостей G_{n-2}^1 и G_{n-2}^2 вдоль любой кривой $k(t)$ на базе M_p , проходящей через точку $B(u^e) \in M_p$, параллельны линейному подпространству Γ_{n-4}^2 .

Доказательство. Из (4.3) следует, что точка $Z \in G_{n-2}^1$ с радиус-вектором $\bar{Z} = \bar{A} + x^{\alpha_2} \bar{e}_{\alpha_2} + x^{\alpha_1} \bar{e}_{\alpha_1}$, отвечающая точке $B(u^e) \in M_p$, будет текущей точкой $(\text{ch } G_{n-2}^1)_{\forall k(t)}$ — характеристики $(n-2)$ -плоскости G_{n-2}^1 вдоль любой кривой $k(t)$ на базе M_p — тогда и только тогда, когда $(d\bar{Z}, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_m, \bar{e}_{m+3}, \dots, \bar{e}_n) = 0$, (θ^a — любые). Отсюда с учётом (1.1, 1.5, 2.1, 3.20, 3.24, 2.1 и 4.2) получаем справедливость настоящей теоремы как для $(n-2)$ -плоскости G_{n-2}^1 , так и аналогично для G_{n-2}^2 .

4.3. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.2. В каждой точке $B(u^*) \in M_p$ многообразия S_p^m в E_n ($n > 4$) перспективные аффинные связности в смысле [3]: $C_{12}: \Gamma_4^1 \rightarrow \Gamma_{n-4}^2$ и $C_{21}: \Gamma_{n-4}^2 \rightarrow \Gamma_4^1$ являются локально плоскими.

Доказательство. В соответствии с [3] связность $C_{12}\{C_{21}\}$ отображает $\Gamma_4\{\Gamma_{n-4}\}$, соседнюю $\Gamma_4'\{\Gamma_{n-4}'\}$ (бесконечно близкую первого порядка) в направлении $\Gamma_{n-4}\{\Gamma_4\}$. Каждая из этих связностей имеет 1-формы связности:

$$C_{12}: \omega^{\alpha_1}, \omega^{\hat{\alpha}_1}, \omega^{\beta_1}, \omega^{\hat{\beta}_1} = -\omega^{\alpha_1}_{\alpha_1};$$

$$C_{21}: \omega^{\alpha_2}, \omega^{\hat{\alpha}_2}, \omega^{\beta_2}, \omega^{\hat{\beta}_2} = -\omega^{\alpha_2}_{\alpha_2},$$

которые в силу (1.1) и (3.24) удовлетворяют следующим структурным уравнениям:

$$\Omega^{\alpha_1} \equiv D\omega^{\alpha_1} - \omega^{\beta_1} \wedge \omega^{\alpha_1}_{\beta_1} - \omega^{\hat{\beta}_1} \wedge \omega^{\alpha_1}_{\hat{\beta}_1} = 0,$$

$$\Omega^{\hat{\alpha}_1} \equiv D\omega^{\hat{\alpha}_1} - \omega^{\alpha_1} \wedge \omega^{\hat{\alpha}_1}_{\alpha_1} - \omega^{\hat{\beta}_1} \wedge \omega^{\hat{\alpha}_1}_{\hat{\beta}_1} = 0,$$

$$\Omega^{\beta_1} \equiv D\omega^{\beta_1} - \omega^{\alpha_1} \wedge \omega^{\beta_1}_{\alpha_1} - \omega^{\gamma_1} \wedge \omega^{\beta_1}_{\gamma_1} = 0,$$

$$\Omega^{\hat{\beta}_1} \equiv D\omega^{\hat{\beta}_1} - \omega^{\alpha_1} \wedge \omega^{\hat{\beta}_1}_{\alpha_1} - \omega^{\gamma_1} \wedge \omega^{\hat{\beta}_1}_{\gamma_1} = 0,$$

$$\Omega^{\alpha_2} \equiv D\omega^{\alpha_2} - \omega^{\beta_2} \wedge \omega^{\alpha_2}_{\beta_2} - \omega^{\hat{\beta}_2} \wedge \omega^{\alpha_2}_{\hat{\beta}_2} = 0,$$

$$\Omega^{\hat{\alpha}_2} \equiv D\omega^{\hat{\alpha}_2} - \omega^{\alpha_2} \wedge \omega^{\hat{\alpha}_2}_{\alpha_2} - \omega^{\hat{\beta}_2} \wedge \omega^{\hat{\alpha}_2}_{\hat{\beta}_2} = 0,$$

$$\Omega^{\beta_2} \equiv D\omega^{\beta_2} - \omega^{\alpha_2} \wedge \omega^{\beta_2}_{\alpha_2} - \omega^{\gamma_2} \wedge \omega^{\beta_2}_{\gamma_2} = 0,$$

$$\Omega^{\hat{\beta}_2} \equiv D\omega^{\hat{\beta}_2} - \omega^{\alpha_2} \wedge \omega^{\hat{\beta}_2}_{\alpha_2} - \omega^{\gamma_2} \wedge \omega^{\hat{\beta}_2}_{\gamma_2} = 0.$$

Это означает, что 2-формы кручения и кривизны связностей C_{12} и C_{21} равны нулю на базе M_p многообразия S_p^m , что и доказывает настоящую теорему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – М.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.
2. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды московского математического общества. – М., 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
3. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. – М.: ВИНТИ АН СССР, 1979. – С. 7–246.
4. Ивлев Е.Т., Молдованова Е.А. О центрировании семейства линейных подпространств в многомерном евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. – 2005. – Т. 308. – № 3. – С. 6–10.
5. Аквис М.А. Фокальные образы поверхностей ранга r // Известия вузов. Сер. Математика. – 1957. – № 1. – С. 9–19.
6. Александров И.А. Теория функций комплексного переменного. – Томск: Томский государственный университет, 2002. – 510 с.

УДК 519.644

К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ ПО ПОВЕРХНОСТИ СФЕРЫ $(n+1)$ -МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Э.А. Шамсиев

Ташкентский государственный технический университет
E-mail: shamciev_tstu@mail.ru

Предлагается способ получения кубатурной формулы $(2m-1)$ -й степени точности для многомерной сферы, когда известна формула аналогичной степени точности для сферы, чья размерность на единицу меньше.

Рассмотрим в n -мерном евклидовом пространстве R^n единичную сферу $S_{n-1} = \{x \in R^n | x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$. Для произвольного одночлена $x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$

$$\int_{S_{n-1}} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n} dS = \begin{cases} \frac{2\Gamma\left(\frac{\beta_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta_2+1}{2}\right)\dots\Gamma\left(\frac{\beta_n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_n+n}{2}\right)}, & \text{если все } \beta_i \text{ четны} \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

где $\Gamma(k) = \int_0^\infty t^{k-1} e^{-t} dt$ – гамма-функция Эйлера.

Пусть известна кубатурная формула $(2m-1)$ -й степени точности

$$\int_{S_{n-1}} f(x) dS \cong \sum_{i=1}^N C_i f(a^{(i)}). \quad (1)$$

Исследуем вопрос существования кубатурной формулы аналогичной степени точности для S_n вида

$$\int_{S_n} f(x) dS \cong \sum_{j=1}^m T_j \sum_{i=1}^N C_j f(\sqrt{1-t_j^2} a^{(i)}, t_j), \quad (2)$$

где T_j и t_j определяются как параметры некоторой весовой квадратурной формулы типа Гаусса для отрезка $[-1; 1]$: