

4.3. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.2. В каждой точке $B(u^*) \in M_p$ многообразия S_p^m в E_n ($n > 4$) перспективные аффинные связности в смысле [3]: $C_{12}: \Gamma_4^1 \rightarrow \Gamma_{n-4}^2$ и $C_{21}: \Gamma_{n-4}^2 \rightarrow \Gamma_4^1$ являются локально плоскими.

Доказательство. В соответствии с [3] связность $C_{12}\{C_{21}\}$ отображает $\Gamma_4\{\Gamma_{n-4}\}$, соседнюю $\Gamma_4'\{\Gamma_{n-4}'\}$ (бесконечно близкую первого порядка) в направлении $\Gamma_{n-4}\{\Gamma_4\}$. Каждая из этих связностей имеет 1-формы связности:

$$C_{12}: \omega^{\alpha_1}, \omega^{\hat{\alpha}_1}, \omega_{\alpha_1}^{\beta_1}, \omega_{\alpha_1}^{\hat{\beta}_1} = -\omega_{\alpha_1}^{\alpha_1};$$

$$C_{21}: \omega^{\alpha_2}, \omega^{\hat{\alpha}_2}, \omega_{\alpha_2}^{\beta_2}, \omega_{\alpha_2}^{\hat{\beta}_2} = -\omega_{\alpha_2}^{\alpha_2},$$

которые в силу (1.1) и (3.24) удовлетворяют следующим структурным уравнениям:

$$\Omega^{\alpha_1} \equiv D\omega^{\alpha_1} - \omega^{\beta_1} \wedge \omega_{\beta_1}^{\alpha_1} - \omega^{\hat{\beta}_1} \wedge \omega_{\hat{\beta}_1}^{\alpha_1} = 0,$$

$$\Omega^{\hat{\alpha}_1} \equiv D\omega^{\hat{\alpha}_1} - \omega^{\alpha_1} \wedge \omega_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} - \omega^{\hat{\beta}_1} \wedge \omega_{\hat{\beta}_1}^{\hat{\alpha}_1} = 0,$$

$$\Omega_{\alpha_1}^{\beta_1} \equiv D\omega_{\alpha_1}^{\beta_1} - \omega_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} \wedge \omega_{\hat{\alpha}_1}^{\beta_1} - \omega_{\alpha_1}^{\gamma_1} \wedge \omega_{\gamma_1}^{\beta_1} = 0,$$

$$\Omega_{\alpha_1}^{\hat{\beta}_1} \equiv D\omega_{\alpha_1}^{\hat{\beta}_1} - \omega_{\alpha_1}^{\beta_1} \wedge \omega_{\beta_1}^{\hat{\alpha}_1} - \omega_{\alpha_1}^{\gamma_1} \wedge \omega_{\gamma_1}^{\hat{\alpha}_1} = 0,$$

$$\Omega^{\alpha_2} \equiv D\omega^{\alpha_2} - \omega^{\beta_2} \wedge \omega_{\beta_2}^{\alpha_2} - \omega^{\hat{\beta}_2} \wedge \omega_{\hat{\beta}_2}^{\alpha_2} = 0,$$

$$\Omega^{\hat{\alpha}_2} \equiv D\omega^{\hat{\alpha}_2} - \omega^{\alpha_2} \wedge \omega_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2} - \omega^{\hat{\beta}_2} \wedge \omega_{\hat{\beta}_2}^{\hat{\alpha}_2} = 0,$$

$$\Omega_{\alpha_2}^{\beta_2} \equiv D\omega_{\alpha_2}^{\beta_2} - \omega_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2} \wedge \omega_{\hat{\alpha}_2}^{\beta_2} - \omega_{\alpha_2}^{\gamma_2} \wedge \omega_{\gamma_2}^{\beta_2} = 0,$$

$$\Omega_{\alpha_2}^{\hat{\beta}_2} \equiv D\omega_{\alpha_2}^{\hat{\beta}_2} - \omega_{\alpha_2}^{\beta_2} \wedge \omega_{\beta_2}^{\hat{\alpha}_2} - \omega_{\alpha_2}^{\gamma_2} \wedge \omega_{\gamma_2}^{\hat{\alpha}_2} = 0.$$

Это означает, что 2-формы кручения и кривизны связностей C_{12} и C_{21} равны нулю на базе M_p многообразия S_p^m , что и доказывает настоящую теорему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – М.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.
2. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды московского математического общества. – М., 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
3. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. – М.: ВИНТИ АН СССР, 1979. – С. 7–246.
4. Ивлев Е.Т., Молдованова Е.А. О центрировании семейства линейных подпространств в многомерном евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. – 2005. – Т. 308. – № 3. – С. 6–10.
5. Аквис М.А. Фокальные образы поверхностей ранга r // Известия вузов. Сер. Математика. – 1957. – № 1. – С. 9–19.
6. Александров И.А. Теория функций комплексного переменного. – Томск: Томский государственный университет, 2002. – 510 с.

УДК 519.644

К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ ПО ПОВЕРХНОСТИ СФЕРЫ $(n+1)$ -МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Э.А. Шамсиев

Ташкентский государственный технический университет
E-mail: shamciev_tstu@mail.ru

Предлагается способ получения кубатурной формулы $(2m-1)$ -й степени точности для многомерной сферы, когда известна формула аналогичной степени точности для сферы, чья размерность на единицу меньше.

Рассмотрим в n -мерном евклидовом пространстве R^n единичную сферу $S_{n-1} = \{x \in R^n | x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$. Для произвольного одночлена $x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$

$$\int_{S_{n-1}} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n} dS = \begin{cases} \frac{2\Gamma\left(\frac{\beta_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta_2+1}{2}\right)\dots\Gamma\left(\frac{\beta_n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_n+n}{2}\right)}, & \text{если все } \beta_i \text{ четны} \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

где $\Gamma(k) = \int_0^\infty t^{k-1} e^{-t} dt$ – гамма-функция Эйлера.

Пусть известна кубатурная формула $(2m-1)$ -й степени точности

$$\int_{S_{n-1}} f(x) dS \cong \sum_{i=1}^N C_i f(a^{(i)}). \quad (1)$$

Исследуем вопрос существования кубатурной формулы аналогичной степени точности для S_n вида

$$\int_{S_n} f(x) dS \cong \sum_{j=1}^m T_j \sum_{i=1}^N C_j f(\sqrt{1-t_j^2} a^{(i)}, t_j), \quad (2)$$

где T_j и t_j определяются как параметры некоторой весовой квадратурной формулы типа Гаусса для отрезка $[-1; 1]$:

$$\int_{-1}^1 p(t) \varphi(t) dt \cong \sum_{j=1}^m T_j \varphi(t_j). \quad (3)$$

Очевидно, что для одночлена $x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_{n+1}^{\beta_{n+1}}$ формула (2) точна, если хотя бы одно из чисел $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{n+1}$ нечетно (за счет кубатурной формулы (1), если нечетно одно из чисел $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ и за счет квадратурной формулы (3), если нечетно β_{n+1}). Для определения значений T_j и t_j положим $\beta_1 = 2\alpha_1, \beta_2 = 2\alpha_2, \dots, \beta_{n+1} = 2\alpha_{n+1}$ ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1} \leq m-1$), и приравняв значение одночлена $x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \dots x_{n+1}^{2\alpha_{n+1}}$, вычисленное по формуле (2) с $\int_{S_n} x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} \dots x_{n+1}^{2\alpha_{n+1}} dS$, получаем

$$\frac{2\Gamma\left(\frac{2\alpha_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2\alpha_2+1}{2}\right)\dots\Gamma\left(\frac{2\alpha_{n+1}+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2\alpha_1+2\alpha_2+\dots+2\alpha_{n+1}+n}{2}\right)} \sum_{j=1}^m (1-t_j^2)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{n+1}} t_j^{\alpha_{n+1}} =$$

$$= \frac{2\Gamma\left(\frac{2\alpha_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2\alpha_2+1}{2}\right)\dots\Gamma\left(\frac{2\alpha_{n+1}+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2\alpha_1+2\alpha_2+\dots+2\alpha_{n+1}+n+1}{2}\right)}.$$

После цепочки несложных упрощений, пользуясь формулой 855.41 из [1. С. 183], приходим к равенству

$$(1-t_j^2)^{\alpha_1+\dots+\alpha_n} t_j^{\alpha_{n+1}} T_j =$$

$$= \sum_{j=1}^m \frac{\Gamma\left(\frac{2\alpha_1+2\alpha_2+\dots+2\alpha_n+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2\alpha_{n+1}+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2\alpha_1+2\alpha_2+\dots+2\alpha_{n+1}+n+1}{2}\right)} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2\alpha_1+2\alpha_2+\dots+2\alpha_n+n-2}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{2\alpha_{n+1}+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n+\frac{n-2}{2}+\frac{2\alpha_{n+1}+3}{2}\right)} =$$

$$= 2 \int_0^1 t^{\alpha_{n+1}} (1-t^2)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n+\frac{n-2}{2}} dt = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{n-2}{2}+\alpha_1+\dots+\alpha_n} t^{\alpha_{n+1}} dt.$$

Таким образом, в искомой квадратурной формуле (3) весовая функция $p(t) = (1-t^2)^{\frac{n-2}{2}}$. Число узлов кубатурной формулы (2) равно mN . Можно получить кубатурную формулу с меньшим числом узлов, если вместо квадратурной формулы (3) воспользоваться квадратурной формулой типа Гаусса-Маркова с той же весовой функцией и двумя фиксированными узлами $t_0 = -1, t_m = 1$:

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{n-2}{2}} \varphi(t) dt \cong T_0 \varphi(-1) + T_m \varphi(1) + \sum_{j=1}^{m-1} T_j \varphi(t_j).$$

Число узлов кубатурной формулы в этом случае равно $(m-1)N+2$. Отметим, что если кубатурная формула (1) инвариантна относительно некоторой конечной ортогональной группы G [2. С. 129], то формула (2) инвариантна относительно группы, которая получается из G в R^{n+1} добавлением преобразования симметрии относительно гиперплоскости $x_{n+1} = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1977. — 228 с.
2. Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. — М.: Наука, 1981. — 336 с.

Примеры.

- 1) Кубатурная формула типа прямоугольников с $2m$ узлами дает следующую кубатурную формулу $(2m-1)$ -й степени точности для S_2

$$\int_{S_2} f(x) dS \cong \frac{\pi}{m} \sum_{j=1}^m T_j \sum_{k=1}^{2m} f(\sqrt{1-t_j^2} \cos \frac{\pi k}{m}, \sqrt{1-t_j^2} \sin \frac{\pi k}{m}, t_j). \quad (4)$$

Здесь T_j и t_j параметры квадратурной формулы Гаусса с постоянным весом:

$$\int_{-1}^1 \varphi(t) dt \cong \sum_{j=1}^m T_j \varphi(t_j).$$

- 2) Двенадцатиточечная кубатурная формула 5-й степени точности [2. С. 313] позволяет получить кубатурную формулу аналогичной степени точности для S_3 :

$$\int_{S_3} f(x) dS \cong \frac{\pi^2}{10} \sum_{i=1}^2 \left[f(0, 0, \pm 1) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{12} f\left(\sqrt{\frac{5}{6}} a^{(i)}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \right],$$

где $a^{(i)}$ — вершины икосаэдра, вписанного в S_2 .

- 3) Использование кубатурной формулы $(4p-1)$ -й степени точности для S_3 дает следующую кубатурную формулу

$$\int_{S_4} f(x) dS \cong \frac{\pi^2}{4p^2} \sum_{j=1}^{2p} T_j \sum_{n=0}^1 \sum_{k=1}^p D_k \sum_{i_1, i_2=1}^{2p}$$

$$f\left(\sqrt{(1-t_j^2)(1-\tau_k)} \cos \frac{(2i_1-n)\pi}{2p}, \sqrt{(1-t_j^2)(1-\tau_k)} \sin \frac{(2i_1-n)\pi}{2p}, \right.$$

$$\left. \sqrt{(1-t_j^2)\tau_k} \cos \frac{(2i_2-n)\pi}{2p}, \sqrt{(1-t_j^2)\tau_k} \sin \frac{(2i_2-n)\pi}{2p}, t_j \right),$$

где D_k и τ_k параметры квадратурной формулы [3]

$$\int_0^1 \varphi(t) dt \cong \sum_{k=1}^p D_k \varphi(\tau_k), \text{ а } T_j \text{ и } t_j \text{ параметры квадратурной формулы}$$

ной формулы

$$\int_{-1}^1 (1-t^2) \varphi(t) dt \cong \sum_{j=1}^{2p} T_j \varphi(t_j).$$

- 4) Воспользуемся формулой (2) $n-1$ раз. На первом шаге в качестве кубатурной формулы (1) возьмем формулу прямоугольников с $2m$ узлами, на каждом последующем шаге — вновь полученную формулу. Тогда получаем известную кубатурную формулу И.П. Мысовских для S_{n-1} [2. С. 119–123], ранее полученную методом повторного применения квадратурных формул. Формула (4) является частным случаем этой кубатурной формулы.

Примечание. Указанным способом можно получить кубатурную формулу и для многомерного шара, если известна кубатурная формула для шара, чья размерность на единицу меньше.

3. Шамсиев Э.А. О некоторых кубатурных формулах для трехмерной сферы // Известия Томского политехнического университета. — 2004. — Т. 307. — № 7. — С. 6–7.