

О СВЯЗЯХ ХАРАКТЕРИСТИК ЗАТУХАНИЯ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ С НЕКОТОРЫМИ ПАРАМЕТРАМИ МОТОРНОЙ УСТАНОВКИ

В. К. НЕЧАЕВ

В предыдущей статье [1] автора была установлена сильная зависимость обобщенных коэффициентов демпфирования крутильных колебаний вала моторной установки с поршневым двигателем от скоростного и нагрузочного режимов работы двигателя.

Можно показать также, что эти обобщенные коэффициенты k_0 и a_0 изменяются и при изменении упругих (c) и инерционных (θ) характеристик моторной установки¹⁾.

Для этого необходимо провести детальный анализ влияния величин жесткостей $c_{i,i+1}$ участков вала и моментов инерции θ_i масс моторной установки на коэффициент, α входящий в выражения

$$k_0 = k(1 + \alpha), \quad (1)$$

$$a_0 = a \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \quad (2)$$

для обобщенного коэффициента линейного демпфирования k_0 и обобщенного гистерезисного коэффициента a_0 .

Здесь k —действительный коэффициент вязкого (линейного) демпфирования в механизме каждого цилиндра двигателя;

a —константа гистерезиса для материала вала установки.

Для установки, весь вал которой изготовлен из одной марки стали, коэффициент α определяется из приближенного уравнения [1]:

$$\alpha(1 + \alpha)^{q-2} = \frac{\nu a \lambda^{q-2}}{(\mu k \omega)^{q-1}} M_h^{q-2}. \quad (3)$$

Таким образом, коэффициент α зависит от целого ряда величин: $\lambda, \mu, \nu, \omega, k, a, q, M_h$, из которых первые четыре тесно связаны с величинами моментов инерции θ_i и жесткостей $c_{i,i+1}$, приведенной моторной установки²⁾.

Ограничимся здесь кратким исследованием вопросов о зависимостях обобщенных коэффициентов k_0 и a_0 от положения узла колебаний вала, частоты свободных колебаний вала ω и от абсолютных размеров моторной установки.

¹⁾ Экспериментальному исследованию вопроса о зависимостях обобщенных коэффициентов демпфирования от величины момента инерции одной из масс установки, посвящена публикуемая в данном сборнике статья А. Т. Болгова [4].

²⁾ Мы сохраняем здесь все обозначения, принятые ранее [1]. Необходимые дополнительные пояснения даны ниже.

Зависимость коэффициентов k_0 и a_0 от φ_{cp} и положения узла колебаний вала

Рассмотрим сначала простейший случай, когда в многоцилиндровом двигателе работает только один из его цилиндров, в котором и создается резонирующий ¹⁾ возбуждающий гармонический момент M_h ; все остальные цилиндры работают на холостом ходу и в них $M_h = 0$.

Здесь вместо общего выражения для коэффициента λ [1]:

$$\lambda = \pi \sum \varphi_i \quad (4)$$

имеем

$$\lambda = \pi \varphi_x,$$

где φ_x — относительная амплитуда свободных колебаний приведенной массы работающего цилиндра.

Теперь вместо (3) можно написать

$$\alpha(1 + \alpha)^{q-2} = \frac{\nu a}{(\mu k \omega)^{q-1}} (\pi \varphi_x)^{q-2} M_h^{q-2}. \quad (5)$$

Отсюда в частном случае, при $q = 3$:

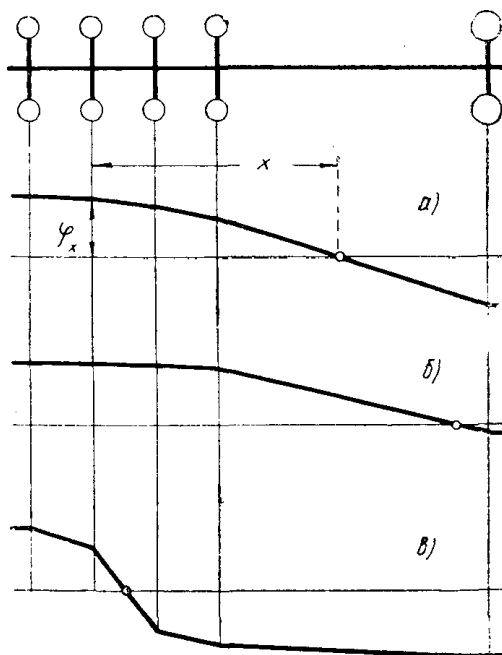
$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\nu a}{\mu k \omega} \pi \varphi_x M_h} - \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Входящие сюда коэффициенты μ, ν, a также и частота ω являются характеристиками свободных колебаний вала установки и не зависят от номера работающего цилиндра или от числа цилиндров, включенных в работу ²⁾.

При включении в работу вместо данного цилиндра которого-либо другого цилиндра в выражениях (5) и (6) изменится только величина φ_x , зависящая, очевидно, от расстояния работающего цилиндра от узла колебаний вала (фиг. 1а).

Следовательно, в рассматриваемом нами случае работы одного цилиндра, величины обобщенных коэффициентов демпфирования k_0 и a_0 моторной установки зависят от амплитуды φ_x , то есть от номера работающего цилиндра или от расстояния точки приложения возбуждающего момента M_h от узла колебаний вала.

Коэффициент k_0 убывает, а коэффициент a_0 увеличивается по мере уменьшения φ_x . При этом зависимость коэффициента k_0 от φ_x оказывается совершенно аналогичной зависимости k_0 от нагрузки цилиндра или амплитуды M_h , рассмотренной нами ранее [1].



Фиг. 1

¹⁾ Здесь и далее предполагается, что двигатель работает точно на одном из критических чисел оборотов.

²⁾ Здесь предполагается, что действительный коэффициент вязкого (линейного) демпфирования k в механизме цилиндра двигателя не зависит от режима работы этого цилиндра и одинаков как при холостом ходе цилиндра, так и при работе его под полной нагрузкой.

Очевидно, что в установках с многоцилиндровыми двигателями должны существовать аналогичные зависимости и при работе всех цилиндров. Здесь характеристикой средней удаленности точек приложения возбуждающих моментов M_h от узла колебаний может служить средняя относительная амплитуда свободных колебаний приведенных масс цилиндров двигателя

$$\varphi_{cp} = \frac{1}{m} \sum_1^m \varphi_i,$$

где $\sum \varphi_i$ — алгебраическая сумма всех этих амплитуд,
 m — число цилиндров двигателя.

Теперь для главных порядков h вместо (4) имеем

$$\lambda = \pi m \varphi_{cp}$$

и вместо (5) и (6)

$$\alpha(1 + \alpha)^{q-2} = \frac{(\pi m \varphi_{cp})^{q-2}}{\mu^{q-1}} \cdot \frac{\nu a}{(k\omega)^{q-1}} M_h^{q-2}, \quad (7)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\nu a}{\mu k \omega} \pi m \varphi_{cp} M_h} - \frac{1}{2}. \quad (8)$$

В случае, если узел колебаний находится далеко вне двигателя, относительные амплитуды φ_i всех его цилиндров практически одинаковы (фиг. 1б) и равны единице. Поэтому здесь

$$\lambda \cong \pi m; \quad \frac{(m \varphi_{cp})^{q-2}}{\mu^{q-1}} \cong 1$$

и коэффициент α определяется из уравнения

$$\alpha(1 + \alpha)^{q-2} = \frac{\pi^{q-2} \nu a}{(k\omega)^{q-1}} M_h^{q-2}$$

или при $q=3$ из

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\pi \nu a}{k \omega} M_h} - \frac{1}{2}.$$

Если же узел колебаний находится в середине двигателя (фиг. 1в), то

$$\lambda \cong 0; \quad \varphi_{cp} \cong 0$$

и

$$\alpha = 0.$$

Очевидно, что уже в этих двух крайних случаях коэффициенты k_0 и a_0 будут иметь различные значения.

Изменение величины φ_{cp} в моторной установке может явиться, например, результатом перемещения узла колебаний (и соответствующего изменения кривой формы колебаний вала) при замене маховика другим, с иным моментом инерции, при установке или снятии противовесов на коленчатом валу, при изменении длины или диаметра промежуточного вала между двигателем и маховиком и т. п.

Очевидно, что все такие „конструктивные“ изменения в моторной установке влекут за собою определенные изменения величины обобщенных коэффициентов демпфирования k_0 и a_0 . Но закономерности изменения

этих коэффициентов в зависимости от φ_{cp} будут более сложными, чем это установлено выше при анализе случая переключения всей нагрузки двигателя с одного цилиндра на другой.

При изменении жесткости какого-либо участка вала или момента инерции которой-нибудь из масс установки изменится характер кривой формы свободных колебаний вала, переместится узел колебаний и станет другой частота свободных колебаний вала ω . Эти изменения кривой формы свободных колебаний и положения узла приведут не только к изменению средней амплитуды φ_{cp} свободных колебаний масс двигателя, но и к новым численным значениям коэффициентов μ и ν .

Таким образом теперь в правой части выражений (5) и (6) останутся постоянными только коэффициенты k, a, q и, может быть, амплитуда возбуждающих моментов M_h (если изменение ω невелико, и мы попрежнему рассматриваем только работу двигателя на критическом числе оборотов).

Детальное исследование зависимостей коэффициентов λ, μ, ν , частоты ω и особо интересующего нас коэффициента α от величины жесткостей $c_{i,i+1}$ участков вала и моментов инерции Θ_i масс моторной установки в общем виде едва ли возможно. Здесь неизбежны громоздкие выкладки.

Мы ограничимся здесь одним примером. На фиг. 2 и 3 представлен ряд кривых для одной моторной установки, состоящей из четырехцилиндрового рядного двигателя и маховика (или генератора). Кривые вычислены для случая, когда в этой установке изменяется величина момента инерции Θ_m маховика (якоря генератора) при неизменных величинах жесткостей всех участков вала и моментов инерции Θ приведенных масс каждого цилиндра двигателя. Вычисления произведены на основании формул, приведенных выше, а так же в статье [1]. Принятые для расчета исходные параметры указаны на графиках. В расчетах предполагалось, что источниками демпфирования в рассматриваемой установке являются только цилиндры двигателя (линейное демпфирование, характеризуемое коэффициентом k) и вал моторной установки (гистерезисное демпфирование, характеризуемое константой гистерезиса a и показателем степени q). Демпфирование генератора не учитывалось. Амплитуда M_h возбуждающих гармонических моментов принята постоянной, не зависящей от ω .

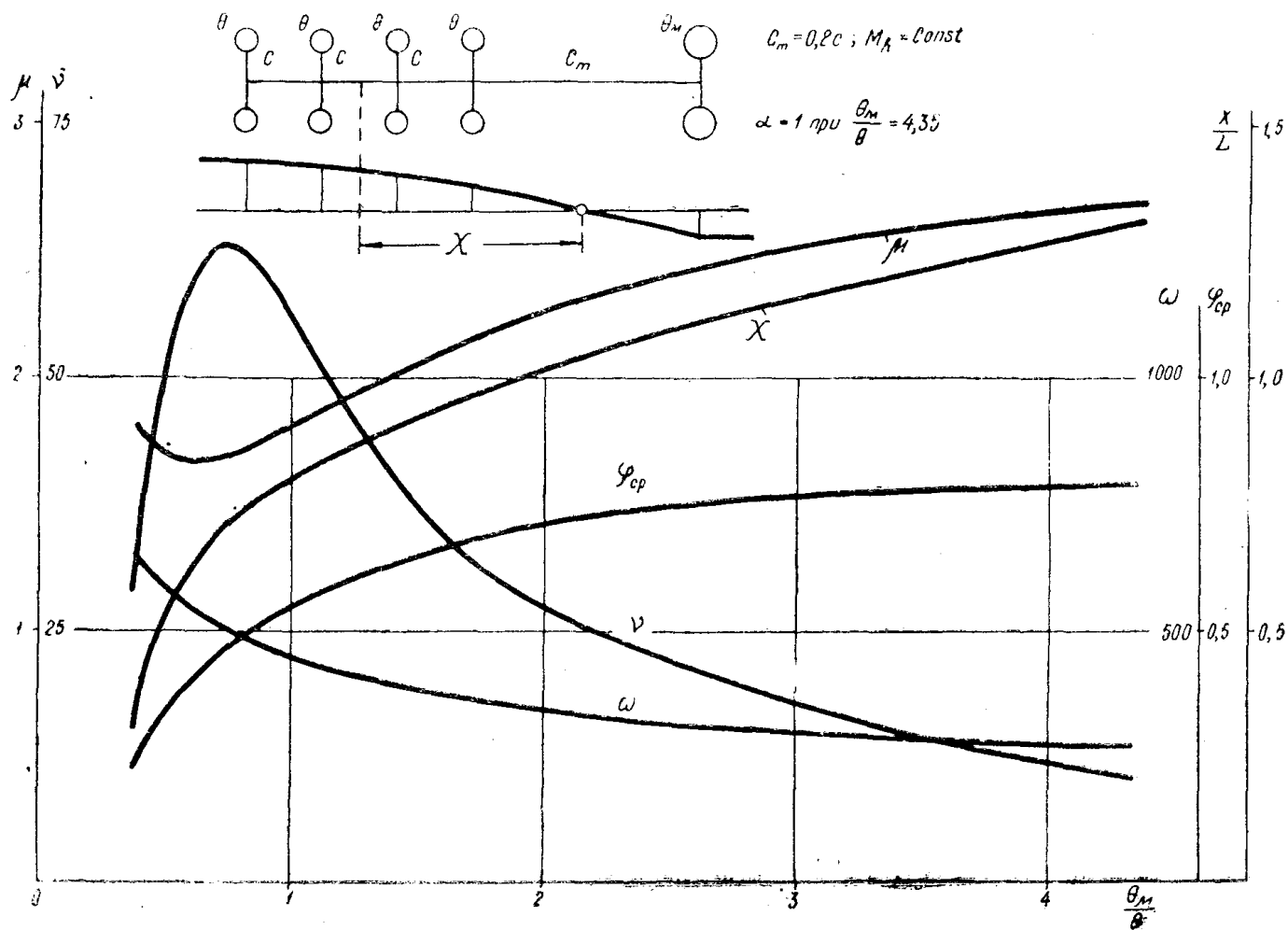
На фиг. 2 показаны, в функции отношения $\frac{\Theta_m}{\Theta}$, величины коэффициентов μ, ν , а также средней относительной амплитуды φ_{cp} колебаний масс двигателя, частоты ω свободных колебаний вала и расстояния X от узла колебаний до середины двигателя.

Отметим здесь сравнительно быстрый рост коэффициента ν при уменьшении отношения $\frac{\Theta_m}{\Theta}$. Согласно [1] этот коэффициент входит в выражение для работы, поглощаемой гистерезисными сопротивлениями за цикл резонансных колебаний

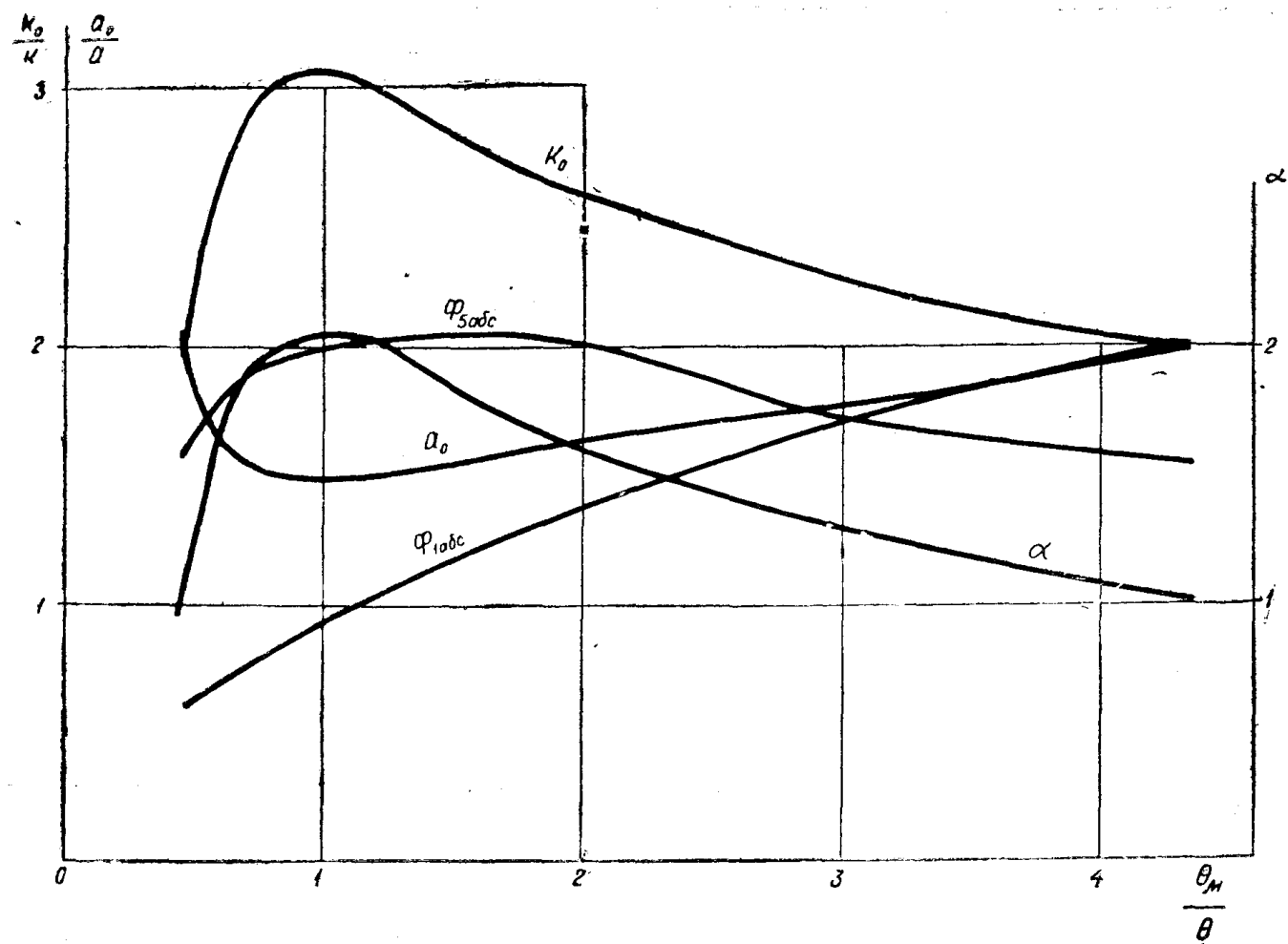
$$A_g = \nu a \Phi_{1abc}^q. \quad (9)$$

Рост коэффициента ν вызван увеличением относительных углов закручивания вала и свидетельствует о повышении удельного веса гистерезисных потерь при уменьшении отношения $\frac{\Theta_m}{\Theta}$ (исключая случай очень малых величин этого отношения).

На фиг. 3 показаны для того же двигателя зависимости от отношения $\frac{\Theta_m}{\Theta}$ абсолютных амплитуд колебаний Φ_{1abc} (первой массы двигателя).



Фиг. 2



Фиг. 3

и Φ_{5abc} (маховика), коэффициента α и обобщенных коэффициентов демпфирования k_0 и a_0 .

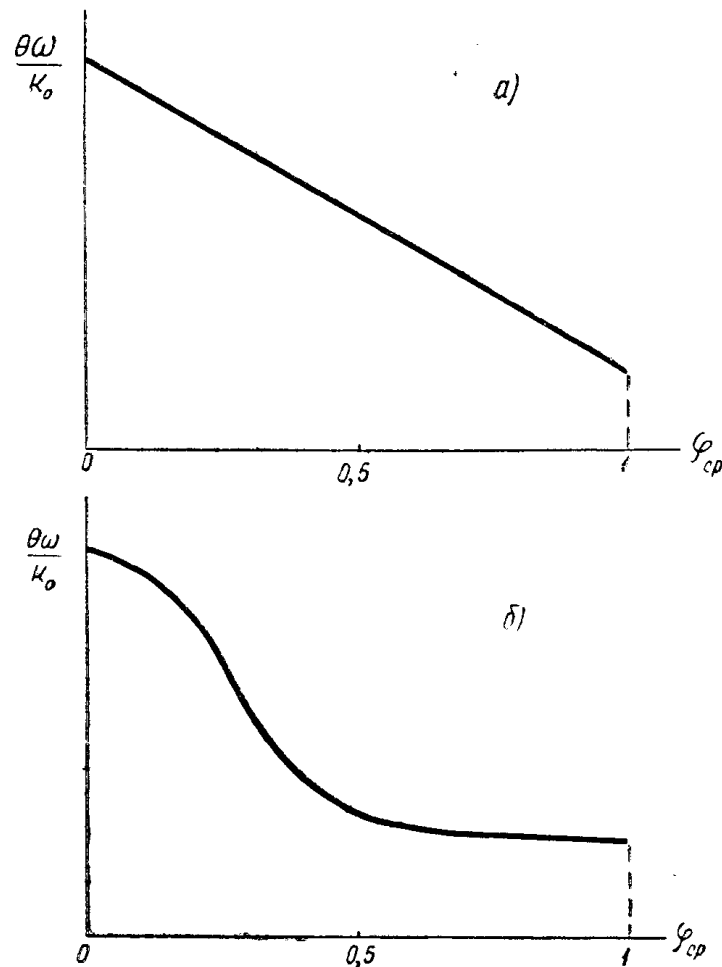
Эти графики свидетельствуют о наличии в моторных установках достаточно сильной и сложной зависимости обобщенных коэффициентов k_0 и a_0 от таких, казалось бы, чисто конструктивных параметров, как моменты инерции масс установки.

Сходные графики можно было бы построить и для случая, например, изменения длины или диаметра промежуточного вала между двигателем и маховиком.

Указанную выше связь обобщенного линейного коэффициента демпфирования k_0 с средней амплитудой φ_{cp} свободных колебаний приведенных масс двигателя впервые подметил Шеннон [6] в своих опытах с четырехцилиндровым автомобильным двигателем, приводимым во вращение от электромотора. На основании этих опытов Шеннон дает график зависимо-

сти величины $\frac{\theta\omega}{k_0}$ от φ_{cp} (фиг. 4а).

Для сравнения, нами на основании фиг. 2 и 3, построен график (фиг. 4б) для рассмотренного выше в качестве примера четырехцилиндро-



Фиг. 4

вого двигателя с маховиком. Как видно из нашего графика, зависимость коэффициента k_0 от φ_{cp} может иметь значительно более сложный характер,

чем это установил Шеннон. Причиной этому является сложное одновременное, вместе с φ_{cp} , изменение величин μ, ν, ω , входящих в (7) и (8).

В разных моторных установках при одинаковых значениях в них Θ, φ_{cp} и ω могут оказаться различными величины коэффициентов μ и ν . Различны могут быть и характеристики гистерезисных свойств материала вала—константа a и показатель степени q . При попытках провести расчеты резонансных вибраций различных установок с помощью приведенного выше графика Шеннона—все эти конкретные обстоятельства окажутся неучтенными. Результаты расчетов будут мало достоверными, тем более, что не только график, но и вся предложенная Шенноном методика подсчета k_0 через φ_{cp} совершенно не учитывает влияния на коэффициент k_0 величины абсолютной амплитуды резонансных колебаний Φ_{1abc} или амплитуды возбуждающих моментов M_h .

Все это дает основания рассматривать зависимость, предложенную Шенноном (фиг. 4а), только как эмпирическое выражение частных опытных данных, полученных на одной экспериментальной установке с некоторыми конкретными и точно неучтенными значениями коэффициентов μ, ν, a, q и при определенных, имевших место в экспериментах, значениях M_h . Ясно, что зависимости такого рода не могут иметь сколько-нибудь универсального значения.

Едва ли намного больше может дать и более новая, разработанная в Англии, методика учета демпфирования в моторных установках, описанная в статье Дори [8]. Здесь предлагается выбирать коэффициент усиления при резонансе β (при расчете по К. Вильсону) в функции от величины равновесной амплитуды φ_0 свободного конца вала установки, пользуясь для этого универсальным графиком, связывающим β и φ_0 . В целом эта методика, построенная на довольно большом опытном материале по судовым установкам, заслуживает внимания и детального анализа и проверки. Однако, одним из ее очевидных недостатков является отсутствие учета конкретных гистерезисных характеристик материала вала и возможного различного удельного веса линейного демпфирования в двигателе.

Можно думать, что более надежные данные о закономерностях изменения демпфирования в моторных установках должны дать расчет и изучение графиков, подобных фиг. 2 и 3, вычисленных и построенных для установок интересующего нас типа и детальное сопоставление этих графиков с результатами опытного торсиографирувания.

О выборе показателя степени q при определении обобщенного коэффициента гистерезисного демпфирования a_0

Выше, при рассмотрении вопроса о влиянии конструктивных параметров моторной установки на обобщенные коэффициенты демпфирования k_0 и a_0 , а также в статье [1] предполагалось, что показатель степени q в обобщенном выражении для всей работы демпфирования в моторной установке за цикл резонансных колебаний

$$A_{возд} = A_K + A_2 = \nu a_0 \Phi_{1abc}^q \quad (10)$$

точно равнялся действительному гистерезисному показателю q для материала вала рассматриваемой конкретной установки.

Только при этом условии можно было вместо (10) написать

$$\mu k \omega \Phi_{1abc}^2 + \nu a \Phi_{1abc}^q = \nu a_0 \Phi_{1abc}^q \quad (11)$$

и получить отсюда выражение

$$a_0 = a \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right),$$

использованное нами выше и в статье [1] при анализе закономерностей изменения опытных значений коэффициента a_0 .

Однако обеспечить равенство показателей q в обеих частях выражения (11) удастся лишь в редких случаях.

Вопрос о выборе показателя q неизбежно должен возникнуть у экспериментатора, как только последний поставит перед собою задачу опытного определения коэффициента a_0 в исследуемой им моторной установке по результатам торсиографирования. Это опытное значение коэффициента a_0 определяется выражением [1]

$$a_0 = - \frac{\lambda M_h}{\nu \Phi_{1abc}^{q-1}}. \quad (12)$$

Отсюда легко видеть, что конкретная величина коэффициента a_0 при известных из опыта значениях Φ_{1abc} и M_h сильно зависит от принятого экспериментатором для своих подсчетов по (12) значения q , которое входит в (12) не только в виде показателя степени при Φ_{1abc} , но и в выражение для коэффициента ν ¹⁾:

$$\nu = \sum \left[(\varphi_{i-1} - \varphi_i) \frac{c_{i,i+1}}{w_p} \right]^q d^2 l. \quad (13)$$

Но экспериментатор редко располагает точными данными в отношении величины q для материала вала его опытной моторной установки. Литературные данные по гистерезисным характеристикам сталей крайне ограничены. Опытное же определение коэффициентов a и q довольно сложно и требует специальных экспериментов.

Поэтому при подсчетах опытных значений коэффициента a_0 по (12) для гистерезисного показателя q часто принимается некоторое приближенное (ориентировочное) значение, равное 2,3 или 3, в соответствии с рекомендациями Льюиса и К. Вильсона, данными ими применительно к обычным расчетам амплитуд резонансных крутильных колебаний валов моторных установок.

Покажем, что при таком „произвольном“ выборе величины гистерезисного показателя q в правых частях выражений (10) и (12) мы можем получить сильно искаженную картину закономерностей, которым подчиняется обобщенный коэффициент a_0 .

Рассмотрим общий случай, когда в правых частях выражений (10) и (12) принят некоторый показатель степени q_0 , отличный от действительного показателя q для материала вала интересующей нас моторной установки. Теперь, при

$$q_0 \neq q$$

вместо (11) следует написать

$$\mu k \omega \Phi_{1abc}^2 + \nu a \Phi_{1abc}^q = \nu_0 a_0 \Phi_{1abc}^{q_0},$$

где коэффициенты ν и ν_0 подсчитаны по (13) при, соответственно, показателях степени q и q_0 .

¹⁾ Здесь и далее предполагается, что весь вал моторной установки изготовлен из одного материала, с постоянными по всей длине вала гистерезисными характеристиками a и q .

Отсюда получаем выражение для обобщенного коэффициента

$$a_0 = \frac{\nu a}{\nu_0} \cdot \frac{1}{\Phi_{1abc}^{q_0-q}} + \frac{\mu k \omega}{\nu_0 a} \cdot \frac{1}{\Phi_{1abc}^{q_0-2}}$$

или

$$a_0 = a \frac{\nu}{\nu_0} \cdot \frac{1}{\Phi_{1abc}^{q_0-q}} \left[1 + \frac{\mu k \omega}{\nu a} \cdot \frac{1}{\Phi_{1abc}^{q-2}} \right]. \quad (14)$$

С другой стороны, вводя, как и ранее [1], понятие об обобщенном коэффициенте линейного демпфирования k_0 , вместо (11) имеем

$$\mu k \omega \Phi_{1abc}^2 + \nu a \Phi_{1abc}^q = \mu k_0 \omega \Phi_{1abc}^2,$$

откуда

$$k_0 = k(1 + \alpha),$$

где

$$\alpha = \frac{A_z}{A_k} = \frac{\nu a}{\mu k \omega} \Phi_{1abc}^{q-2}.$$

Теперь вместо (14) можно написать

$$a_0 = a \frac{\nu}{\nu_0} \cdot \frac{1}{\Phi_{1abc}^{q_0-q}} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right). \quad (15)$$

Мы получили для коэффициента a_0 выражение более сложное, чем формула (2), приведенная в начале данной статьи.

Из (15) видно, что величина a_0 сильно зависит от правильности выбора расчетного показателя степени q_0 . Только при

$$q_0 = q$$

и вытекающем отсюда равенстве

$$\nu_0 = \nu$$

выражение (15) переходит в выражение (2), исследованное нами ранее в статье [1].

Формула (2) послужила нам также основой для расчета и построения конкретной зависимости обобщенного коэффициента a_0 от момента инерции Θ_m маховика для установки четырехцилиндровый двигатель—маховик (фиг. 2). В этой установке коэффициент α убывает с увеличением Θ_m , что является следствием изменения характера кривой формы свободных колебаний вала. Это уменьшение α приводит, согласно (2), к увеличению a_0 с увеличением Θ_m , что и было показано на фиг. 3. Но из фиг. 3 следует также, что с увеличением Θ_m непрерывно возрастает (при $M_h = \text{const}$) амплитуда Φ_{1abc} резонансных колебаний левого (свободного) конца вала установки.

Очевидно, что при выборе $q_0 > q$ мы, согласно (15), получим иной, по сравнению с показанным на фиг. 3, характер изменения коэффициента a_0 в функции величины Θ_m момента инерции маховика: ¹⁾ обобщенный коэффициент a_0 будет теперь падать с увеличением Θ_m , и это падение будет тем более быстрым, чем больше разность $q_0 - q$.

¹⁾ Именно этот случай ($q_0 > q$) и имел место при подсчетах опытных значений a_0 , приведенных в статье А. Т. Болгова [4]. Здесь при вычислениях a_0 по формуле аналогичной (12) было принято $q_0 = 3$, тогда как специальные эксперименты по определению гистерезисных характеристик главной части вала опытной моторной установки дали $q \cong 2,5$.

Это указывает на необходимость проявления особой осторожности при анализе опытных данных по коэффициенту a_0 и при обработке результатов экспериментов. Неправильный выбор показателя (когда $q_0 \neq q$) может привести к превратной картине закономерностей изменения обобщенного коэффициента a_0 и к совершенно случайным „опытным“ значениям этого коэффициента ¹⁾.

Следовательно, есть все основания считать, что неправильный выбор показателя q_0 при обработке результатов торсиографирования является одним из существенных источников того большого разброса приводимых в литературе опытных значений коэффициента a_0 , с которым сталкивается конструктор при попытках выбрать подходящее значение этого коэффициента для рассчитываемой им установки.

Зависимость коэффициентов k_0 и a_0 от частоты ω свободных колебаний вала установки

Из выражения (3) следует, что при $M_h = \text{const}$ снижение частоты ω свободных колебаний вала ведет к уменьшению коэффициента α , если только уменьшение ω^{q-1} не перекрывается увеличением отношения

$$\frac{\nu \lambda^{q-2}}{\mu^{q-1}}.$$

Снижение ω может быть достигнуто, например, увеличением момента инерции Θ_m маховика, установкой на коленчатом валу противовесов, уменьшением жесткости промежуточного вала и т. п. Во всех этих случаях, конечно, изменится кривая формы свободных колебаний вала и, как следствие этого, изменятся коэффициенты λ , μ и ν . В итоге зависимость коэффициента α (а следовательно и коэффициентов k_0 и a_0) от частоты ω может оказаться сложной и различной по силе и направлению. Установить ее конкретный характер можно только на основе детальных расчетов для каждого интересующего нас типа моторных установок.

На фиг. 5 показаны, в качестве примера, зависимости обобщенных коэффициентов k_0 и a_0 от ω для рассмотренного выше четырехцилиндрового двигателя, в котором уменьшение частоты ω достигается за счет увеличения момента инерции Θ_m маховика.

Зависимость коэффициентов k_0 и a_0 от абсолютных размеров моторной установки

Рассмотрим какие-либо две геометрически подобные установки типа многоцилиндровый рядный двигатель—маховик ²⁾. При этом будем предполагать для простоты, что моменты инерции Θ приведенных масс всех цилиндров в каждом из двигателей одинаковы между собою; также одинаковы и жесткости c участков вала между каждыми двумя соседними цилиндрами. Валы обеих установок изготовлены из одной и той же марки стали.

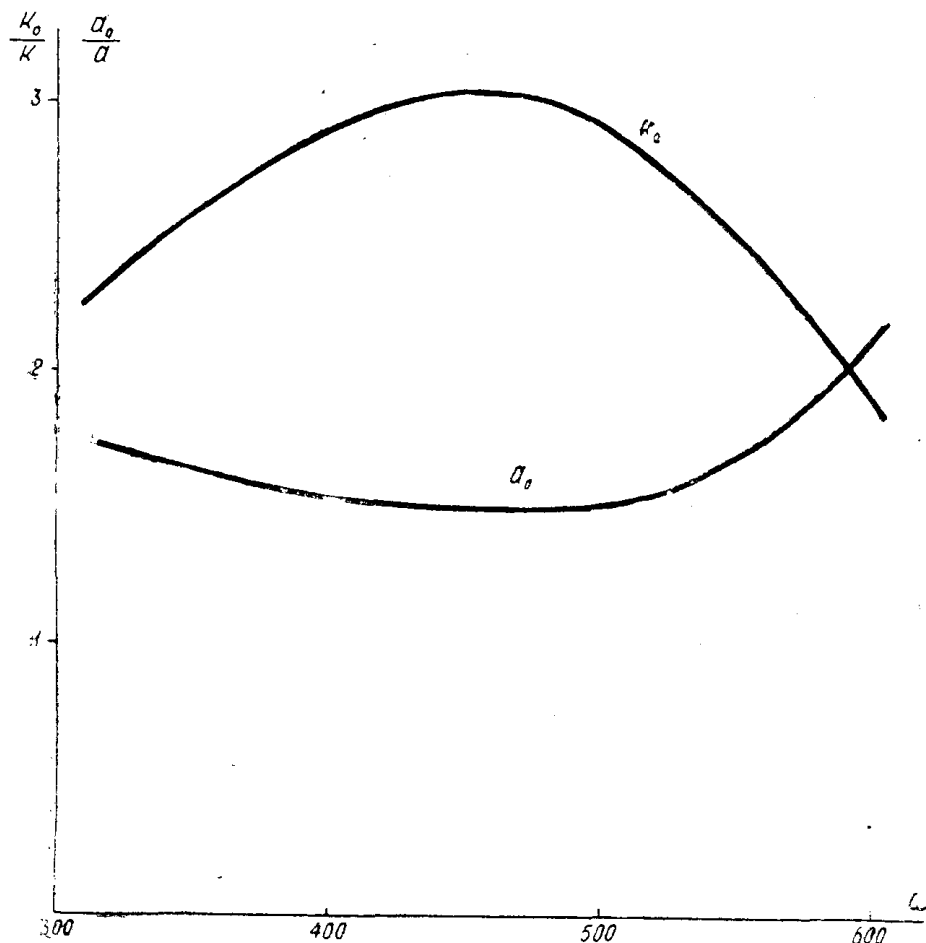
Пусть все линейные размеры второй установки в p раз больше, чем первой. Тогда

$$\begin{aligned} c_2 &= p^3 c_1 \quad ; \quad c_{m2} = p^3 c_{m1} \\ \Theta_2 &= p^5 \Theta_1 \quad ; \quad \Theta_{m2} = p^5 \Theta_{m1}, \end{aligned} \quad (16)$$

¹⁾ При $q_0 \neq q$ изменится, конечно, и характер ряда зависимостей коэффициента a_0 от режима работы двигателя, установленных в статье [1].

²⁾ Под геометрическим подобием мы понимаем здесь подобие всех линейных размеров (длин и диаметров) в обеих установках.

где c — жесткость участка вала между соседними цилиндрами,
 c_m — жесткость промежуточного вала между последним цилиндром
и маховиком,
1 и 2 — индексы, относящиеся, соответственно, к первой (меньшей) и
второй (большей) установке.



Фиг. 5

Можно показать [2], что при заданных постоянных отношениях $\frac{c_m}{c}$
и $\frac{\theta_m}{\theta}$ характер кривой формы свободных колебаний вала установки за-
висит только от безразмерного параметра

$$A = \frac{\theta \omega^2}{c}.$$

При свободных, например одноузловых, колебаниях вала этот параметр
приобретает некоторое определенное численное значение A_0 , зависящее
только от числа цилиндров двигателя и отношений $\frac{c_m}{c}$ и $\frac{\theta_m}{\theta}$.

Очевидно, что в рассматриваемых двух геометрически подобных установках с двигателями с одинаковым числом цилиндров

$$\frac{c_{m1}}{c_1} = \frac{c_{m2}}{c_2},$$

$$\frac{\theta_{m1}}{\theta_1} = \frac{\theta_{m2}}{\theta_2},$$

и поэтому

$$A_{01} = A_{02},$$

то есть

$$\frac{\theta_1 \omega_1^2}{c_1} = \frac{\theta_2 \omega_2^2}{c_2}.$$

Здесь ω_1 и ω_2 — частоты свободных колебаний валов, соответственно, первой и второй установок.

Отсюда

$$\omega_2^2 = \frac{\theta_1}{\theta_2} \frac{c_2}{c_1} \omega_1^2$$

или учитывая (16)

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{p}. \quad (17)$$

Таким образом, с увеличением абсолютных размеров моторной установки частота ω свободных колебаний ее вала уменьшается обратно пропорционально масштабному коэффициенту p .

Но при подобных кривых формы свободных колебаний вала в обеих рассматриваемых установках

$$\lambda_2 = \lambda_1$$

и

$$\nu_2 = p^3 \nu_1$$

$$\mu_2 = p^4 \mu_1,$$

что вытекает из (13) и выражения [1]:

$$\mu = \pi F r^2 \sum \varphi_i^2.$$

Теперь на основании (3) можно написать

$$\alpha_1(1 + \alpha_1)^{q-2} = \frac{\nu_1 a \lambda_1^{q-2}}{(\mu_1 k_1 \omega_1)^{q-1}} M_{h1}^{q-2},$$

$$\alpha_2(1 + \alpha_2)^{q-2} = \frac{\nu_2 a \lambda_2^{q-2}}{(\mu_2 k_2 \omega_2)^{q-2}} M_{h2}^{q-2}.$$

Отсюда, принимая, что в обеих установках одинаковы действительные коэффициенты линейного демпфирования

$$k_1 = k_2 = k, \quad (18)$$

а так же одинаковы и гистерезисные характеристики a и q материала вала, имеем

$$\frac{\alpha_2(1 + \alpha_2)^{q-2}}{\alpha_1(1 + \alpha_1)^{q-2}} = \frac{\nu_2 \left(\frac{\mu_1 \omega_1}{\mu_2 \omega_2} \right)^{q-1} \left(\frac{M_{h2}}{M_{h1}} \right)^{q-2}}{\nu_1}$$

или на основании (16) и (17)

$$\frac{\alpha_2(1 + \alpha_2)^{q-2}}{\alpha_1(1 + \alpha_1)^{q-2}} = \frac{1}{p^{3(q-2)}} \left(\frac{M_{h2}}{M_{h1}} \right)^{q-2} \quad (19)$$

Допустим, что рабочие процессы в цилиндрах обеих сравниваемых установок совершенно одинаковы. Тогда можно написать

$$M_{h2} = p^3 M_{h1}.$$

Теперь из (19)

$$\frac{\alpha_2(1 + \alpha_2)^{q-2}}{\alpha_1(1 + \alpha_1)^{q-2}} = 1,$$

то есть

$$\alpha_2 = \alpha_1.$$

Отсюда, согласно (2), следует, что обобщенные коэффициенты демпфирования k_0 и a_0 не зависят от абсолютных размеров моторной установки. Конечно, этот вывод справедлив только при выполнении условия (18), то есть, если действительные коэффициенты линейного демпфирования в цилиндрах геометрически подобных установок одинаковы и не зависят от абсолютных размеров цилиндров.

Попытки связать коэффициент демпфирования k в механизме цилиндра с конструктивными параметрами цилиндра были сделаны еще Хольцером [5] и Шенноном [6], и позднее Драминским [7].

Записывая выражение для работы демпфирования в механизме одного цилиндра за цикл резонансных колебаний в виде (в наших обозначениях):

$$A_u = \pi k_n \omega \Phi_{abc}^2, \quad (20)$$

Хольцер дал для коэффициента демпфирования в цилиндре эмпирическое выражение

$$k_n = 0,04 \Theta \omega, \quad (21)$$

полученное им на основании обработки результатов торсиографирования ряда четырехцилиндровых дизелей.

Сравнивая (20) с принятым нами ранее [1], в соответствии с Видлером, выражением для работы демпфирования в одном цилиндре

$$A_u = \pi k F r^2 \omega \Phi_{abc}^2 \quad (22)$$

и учитывая (21), получаем выражение для интересующего нас коэффициента k по данным Хольцера

$$k = \frac{k_n}{F r^2} = 0,04 \frac{\Theta \omega}{F r^2}. \quad (23)$$

Шеннон [6] установил связь между коэффициентом k , средней относительной амплитудой свободных колебаний приведенных масс цилиндров

и параметрами цилиндра в виде приведенного выше графика (фиг. 4а). Из этого графика [3]

$$k = \frac{1}{55-45\varphi_{cp}} \cdot \frac{\Theta\omega}{Fr^2}.$$

Отсюда, учитывая возможные пределы изменения средней амплитуды

$$\varphi_{cp} = 0 \div 1$$

имеем

$$k = (0,018 \div 0,100) \frac{\Theta\omega}{Fr^2}, \quad (24)$$

что в среднем приблизительно совпадает с данными Хольцера¹⁾.

Драминский [7], считая, что основным источником линейного демпфирования в цилиндре являются потери энергии в масляном слое в подшипниках, получил выражение для работы демпфирования в одном коренном подшипнике (за цикл колебаний)

$$A = \pi m_a r \Phi_{abc}^2 \omega^2 \frac{eh}{\sin \delta}$$

или для всего цилиндра (учитывая и демпфирование в шатунном под-
шипнике)

$$A_u \cong 1,5\pi m_a r \Phi_{abc}^2 \omega^2 \frac{eh}{\sin \delta}. \quad (25)$$

Здесь, кроме обозначений принятых нами ранее,

m_a — приведенная к радиусу кривошипа неуравновешенная вращающаяся масса шатунно-кривошипного механизма цилиндра;

e — радиальный зазор в подшипнике,

δ — некоторый угол (обычно около 15°).

Сравнивая (25) и (22) получаем выражение для коэффициента линейного демпфирования k одного цилиндра по данным Драминского

$$k = 1,5 \frac{m_a \omega e h}{Fr^2 \sin \delta}. \quad (26)$$

Но в двух геометрически подобных моторных установках, справедливы, кроме (16) и (17), соотношения

$$r_2 = p r_1; \quad F_2 = p^2 F_1;$$

$$m_{a2} = p^3 m_{a1}.$$

Можно допустить также, что

$$e_2 = p e_1.$$

Теперь из (23), (24) или (26) легко получить

$$k_1 = k_2,$$

¹⁾ Численные коэффициенты в формулах (23 и 24) получены на основании обработки результатов торсиографирования моторных установок. Следовательно, было бы правильное считать, что эти формулы дают значения не действительных (k), а обобщенных (k_0) коэффициентов демпфирования, отнесенных к одному цилиндру и как-то включающих в себя и гистерезисное демпфирование в валу моторной установки. Но сейчас нас интересует только структура этих формул, поэтому замену в них коэффициента k_0 коэффициентом k можно считать здесь уместной.

то есть, что коэффициенты линейного демпфирования в цилиндре двигателя, определяемые по Хольцеру, Шеннону или Драминскому, не зависят от абсолютных размеров моторной установки. Следовательно, в геометрически подобных установках должны быть одинаковы и обобщенные коэффициенты k_0 и a_0 .

Однако приведенные выше зависимости Хольцера, Шеннона, Драминского нельзя считать достаточно надежными. Вопрос о демпфировании в цилиндрах двигателя еще требует дальнейшего изучения.

Опытные значения обобщенного коэффициента k_0 , полученные для крупных дизелей, оказываются обычно в несколько раз большими, чем значения k_0 , найденные при торсиографировании автомобильных и авиационных двигателей. Одной из причин этого различия следует, видимо, считать то обстоятельство, что для изготовления валов крупных установок применяется обычная углеродистая сталь, имеющая большие величины a и q , нежели высоколегированные стали, используемые для валов быстроходных двигателей легкого типа. Как было указано ранее [1], увеличение a и q при прочих равных условиях ведет к увеличению α , то есть к увеличению обобщенного коэффициента линейного демпфирования k_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Нечаев В. К. К вопросу о характеристиках демпфирующих сил в моторных установках с поршневыми ДВС. Известия Томского политехнического института, т. 85, 1957.
 2. Нечаев В. К. Графический метод определения частот собственных колебаний. Известия Томского индустриального института, т. 54, вып. 6, 1935.
 3. Нечаев В. К. Теоретические торсиограммы для вала двигателя внутреннего сгорания. Известия Томского индустриального института, т. 58, вып. 2, 1937.
 4. Болгов А. Т. К вопросу о зависимости характеристик демпфирующих сил в моторных установках от момента инерции маховика. Известия Томского политехнического института, т. 85, 1957.
 5. Holzer, H. Die Berechnung der Drehschwingungen, Berlin, 1921.
 6. Shannon J. Damping Influences in Torsional Oscillation, Engineering, Dec. 20, 27, 1935.
 7. Draminsky, Crankshaft Damping, J.M.E. Proc., Applied Mechanics. Vol. 159, (War Emergency Issue № 46), 1948.
 8. Dorey S. F. Government Rules, The Engineer, Centenary Number, p. 248, 1956.
-