ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА
Том 85 1957 г.

К ТЕОРИИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Г. А. ДОЩИНСКИЙ

(Представлено научным семинаром кафедры сопротивления материалов).

Объектами анализа математической теории упруго-пластической деформации являются тела, наделенные некоторыми обобщенными и подчас существенно упрощенными механическими характеристиками и свойствами. Теория устанавливает зависимости между тензорами напряжений и деформаций в различных точках тела, и на этой основе позволяет решать ряд практически важных вопросов. При этом обычным в теории является разложение тензоров напряжений и деформаций на шаровую и девиаторную часть с выражением связи между соответствующими частями этих тензоров

$$T_\sigma = T_\sigma{}^\circ + D_\sigma, \qquad T_e = T_e^\circ + D_e, \qquad (1)$$
$$T_\sigma = f_1(T_e^\circ), \qquad D_\sigma = f_2(D_e).$$

Разложение тензоров на части по форме (1) имеет определенный смысл позволяя характеризовать особенности объемной деформации и формоизменения различных материалов. Ограниченность объемной деформации материалов, в частности металлов, позволяет в ряде практических задач формулировать определенные допущения относительно деформации объема. Поэтому зависимости между указанными частями тензоров обычно рассматриваются раздельно. Употребительными при решении задач являются допущения о несжимаемости материалов, неизменности объема при пластической деформации, линейно упругой объемной деформируемости и т. п.

Величина объемной деформации сама по себе зачастую не имеет существенного значения. Однако представляет определенный интерес анализ изменений количественного и качественного характера, которые вносятся в теорию вместе с указанными допущениями. Эти изменения могут приниматься во внимание при изучении экспериментальных фактов, не укладывающихся в рамки теории и анализе отклонений, обнаруживаемых при экспериментальной проверке законов упруго-пластической деформации. На этой основе возможно также некоторое уточнение теории. Современная техника эксперимента разрешает проверить и выводы, которые могут быть получены при подобном исследовании.

Экспериментальным основанием для постановки подобной задачи являются опыты, обнаруживающие остаточное изменение объема (исследования Давиденкова [1], Мейера [1], Эндрью и Ли [9] и др.), многочисленные опыты Бриджмена, показывающие, что объемная деформация не является линейно упругой [7], некоторые систематические отклонения в опытах по проверке условий пластичности и т. д.

На эту задачу, в частности, было указано Ю. Н. Работновым в докладе на объединенной сессии ОТН ОФМН АН СССР по проблеме прочности и ее физическим основам в 1954 г.:

„Из всех законов пластичности, пожалуй наибольшее сомнение вызывает первый, а именно условие несжимаемости объема при пластической деформации" [4].

Ниже рассматривается одна из возможностей анализа упруго-пластической деформации без каких-либо предварительных допущений относительно объемной деформации.

Основные зависимости между напряжениями и деформациями при упруго-пластическом деформировании

Рассмотрим тело находящееся в стадии упруго-пластической деформации. Допустим, что все компоненты напряженного состояния получили бесконечно малые приращения. Этим приращениям напряжений будут соответствовать некоторые бесконечно малые приращения компонентов деформации. Вследствие малости приращений напряжений и деформаций зависимость между ними может быть принята линейной. Допуская также сохранение изотропии можно представить соотношения между бесконечно малыми приращениями напряжений и деформаций в форме, используемой для упругой деформации. Используя выражение обобщенного закона упругости для деформаций [13] представим его в дифференциальной форме

$$d\,T_e = \frac{1}{\alpha}\,d\,T^{\circ}_{\sigma} + \frac{1}{\beta}\,d\,D_{\sigma}\,. \qquad (2)$$

Для простого (по Ильюшину А. А. [3]) нагружения принимая пропорциональность всех компонентов напряжения одному параметру имеем:

$$\sigma_x = \bar{\sigma}_x . \lambda, \qquad \tau_{xy} = \bar{\tau}_{xy} . \lambda,$$

$$\sigma_y = \bar{\sigma}_y . \lambda, \qquad \tau_{yz} = \bar{\tau}_{yz} . \lambda,$$

$$\sigma_z = \bar{\sigma}_z . \lambda, \qquad \tau_{zx} = \bar{\tau}_{zx} . \lambda,$$

где $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$, $\bar{\sigma}_z$, $\bar{\tau}_{xy}$, $\bar{\tau}_{yz}$, $\bar{\tau}_{zx}$ — некоторые постоянные величины,
λ — переменный параметр.

В обобщенном виде можно записать:

$$T_{\sigma} = \bar{T}_{\sigma}\,.\lambda = (\bar{T}_{\sigma}{}^{\circ} + \bar{D}_{\sigma}).\lambda = \bar{T}_{\sigma}{}^{\circ}\,.\lambda + \bar{D}_{\sigma}\,.\lambda.$$

Дифференцируя по параметру λ имеем

$$d\,T^{\circ}_{\sigma} = \bar{T}^{\circ}_{\sigma}\,.\,d\lambda \qquad d\,D_{\sigma} = \bar{D}_{\sigma}.d\lambda$$

и, следовательно, уравнение (2) можно записать в виде:

$$d\,\bar{T}_e = \frac{1}{\alpha}\,T^{\circ}_{\sigma}\,.d\lambda + \frac{1}{\beta}\bar{D}_{\sigma}\,.d\lambda.$$

Интегрируя (2) по параметру λ получим

$$T_e = \bar{T}^{\circ}_{\sigma} \int\limits_0^{\lambda} \frac{1}{\alpha}\,d\lambda + \bar{D}_{\sigma} \int\limits_0^{\lambda} \frac{1}{\beta}\,d\lambda,$$

так как $$T^{\circ}_{\sigma} = \frac{T^{\circ}_{\sigma}}{\lambda}\,, \qquad D_{\sigma} = \frac{D_{\sigma}}{\lambda}\,,$$

то $$T_e = T^\circ_\sigma \cdot \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\lambda \frac{1}{\alpha}\, d\lambda + D_\sigma \cdot \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\lambda \frac{1}{\beta}\, d\lambda$$

или
$$T_e = \frac{T^\circ_\sigma \cdot \frac{1}{\lambda}}{\int\limits_0^\lambda \frac{1}{\alpha} d\lambda} + \frac{D_\sigma \cdot \frac{1}{\lambda}}{\int\limits_0^\lambda \frac{1}{\beta} d\lambda}.$$

Вводя обозначения:
$$\alpha(\lambda) = \frac{\lambda}{\int\limits_0^\lambda \frac{1}{\alpha} d\lambda} \quad \text{и} \quad \beta(\lambda) = \frac{\lambda}{\int\limits_0^\lambda \frac{1}{\beta} d\lambda}$$

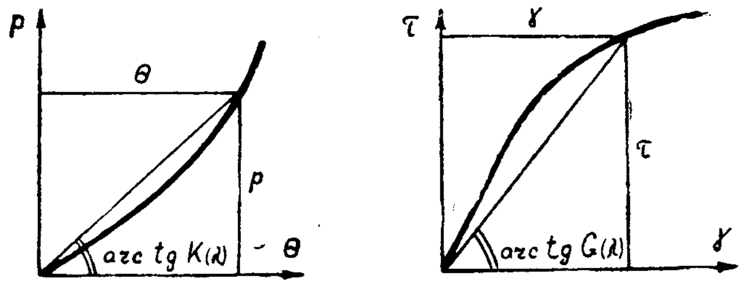
можем представить обобщенный закон упруго-пластической деформации в форме обобщенного закона упругости. Причем здесь $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ уже не постоянные, а некоторые функции параметра λ
$$T_e = \frac{1}{\alpha(\lambda)} T^\circ_\sigma + \frac{1}{\beta(\lambda)} D_\sigma. \tag{3}$$

Из уравнения (3) в проекциях на оси координат x, y, z, можно получить выражения для компонентов деформации через напряжения
$$\begin{aligned}
&a)\ e_x = \frac{\sigma_{cp}}{\alpha(\lambda)} + \frac{\sigma_x - \sigma_{cp}}{\beta(\lambda)}, && d)\ \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{2\tau_{xy}}{\beta(\lambda)} = \frac{2\tau_{yx}}{\beta(\lambda)},\\
&b)\ e_y = \frac{\sigma_{cp}}{\alpha(\lambda)} + \frac{\sigma_y - \sigma_{cp}}{\beta(\lambda)}, && e)\ \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{2\tau_{yz}}{\beta(\lambda)} = \frac{2\tau_{zy}}{\beta(\lambda)},\\
&c)\ e_z = \frac{\sigma_{cp}}{\alpha(\lambda)} = \frac{\sigma_z - \sigma_{cp}}{\beta(\lambda)}, && f)\ \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{2\tau_{zx}}{\beta(\lambda)} = \frac{2\tau_{xz}}{\beta(\lambda)},
\end{aligned} \tag{4}$$

где
$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3},$$

откуда
$$\beta(\lambda) = 2\left(\frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}}\right) = 2G(\lambda), \tag{5}$$

где $G(\lambda)$ представляет собой секущий модуль сдвига на диаграмме сдвига $\tau - \gamma$ (фиг. 1*a*) — переменная величина, определяемая свойствами материала
$$G(\lambda) = \frac{\tau}{\gamma_{упр.} + \gamma_{ост.}}.$$



а Фиг. 1 *б*

Суммируя уравнения (4 *a*, *b*, *c*) получим

$$e_x+e_y+e_z=3\,\frac{\sigma_{cp}}{\alpha(\lambda)}+\frac{(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)}{\beta(\lambda)}-\frac{3\sigma_{cp}}{\beta(\lambda)}=3\,\frac{\sigma_{cp}}{\alpha(\lambda)}.$$

Обозначая относительное изменение объема Θ

$$\Theta=(e_x+e_y+e_z)=(e_1+e_2+e_3)$$

и вводя гидростатическое давление $p=\sigma_{cp}$

имеем: $$\Theta=\frac{3p}{\alpha(\lambda)},\qquad \text{откуда}\qquad \alpha(\lambda)=3\left(\frac{p}{\Theta}\right)=3\,K(\lambda). \tag{6}$$

$K(\lambda)$ — представляет собой секущий модуль объемной упругости при упруго-пластической деформации (фиг. 1*б*)

$$K(\lambda)=\frac{p}{\Theta_{упр.}+\Theta_{ост.}}.$$

Обычно в теории малых упруго-пластических деформаций объемная деформация предполагается линейно упругой

$$K(\lambda)=\text{const}=K,$$

вследствие чего поведение материала при упруго-пластической деформации определяется единственной переменной характеристикой $G(\lambda)$ и постоянной K. Однако многочисленные исследования Бриджмена [7] показывают, что объемная деформация металлов следует закону

$$\Theta=a.p-b.p^2, \tag{7}$$

где a и b—экспериментальные постоянные материала. Поэтому поведение материалов при упруго-пластической деформации, без упрощающих допущений должно описываться двумя переменными $G(\lambda)$ и $K(\lambda)$ или $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$,

Выражения (4) после подстановки σ_{cp} и преобразований приводятся к следующей форме:

$$e_x=\frac{1}{\left[\dfrac{3\alpha(\lambda).\beta(\lambda)}{\beta(\lambda)+2\alpha(\lambda)}\right]}\cdot\left[\sigma_x-\frac{\alpha(\lambda)-\beta(\lambda)}{\beta(\lambda)+2\alpha(\lambda)}\cdot(\sigma_y+\sigma_z)\right]\qquad \gamma_{xy}=\frac{2}{\beta(\lambda)}\,\tau_{xy}$$

$$e_y = \frac{1}{\left[\frac{3\,\alpha(\lambda).\beta(\lambda)}{\beta(\lambda)+2\alpha(\lambda)}\right]} \cdot \left[\sigma_y - \frac{\alpha(\lambda)+\beta(\lambda)}{\beta(\lambda)+2\alpha(\lambda)} \cdot (\sigma_z + \sigma_x)\right] \qquad \gamma_{yz} = \frac{2}{\beta(\lambda)}\tau_{yz} \quad (8)$$

$$e_z = \frac{1}{\left[\frac{3\,\alpha(\lambda).\beta(\lambda)}{\beta(\lambda)+2\alpha(\lambda)}\right]} \cdot \left[\sigma_z - \frac{\alpha(\lambda)-\beta(\lambda)}{\beta(\lambda)+2\alpha(\lambda)} \cdot (\sigma_x + \sigma_y)\right] \qquad \gamma_{zx} = \frac{2}{\beta(\lambda)}\tau_{zx}\,.$$

Для растяжения $\sigma_z = \sigma$, $\sigma_x = \sigma_y = 0$, $\tau_{ik} = 0$ и компоненты деформации выражаются:

$$e_z = \frac{\sigma_z}{\left[\frac{3\alpha(\lambda).\beta(\lambda)}{\beta(\lambda)+2\alpha(\lambda)}\right]} \qquad e_y = e_x = -\left[\frac{\alpha(\lambda)-\beta(\lambda)}{\beta(\lambda)+2\alpha(\lambda)}\right] \cdot \frac{\sigma_z}{\left[\frac{3\,\alpha(\lambda).\beta(\lambda)}{\beta(\lambda)+2\,\alpha(\lambda)}\right]}\,.$$

Отсюда следует:

$$\frac{3\,\alpha(\lambda),\beta(\lambda)}{\beta(\lambda)+2\alpha(\lambda)} = \frac{\sigma_z}{e_z} = \frac{\sigma_1}{e_1} = E(\lambda)\,. \quad E(\lambda) = \frac{\sigma}{e_{упр.} + e_{ост.}} \quad (9)$$

$E(\lambda)$ — представляет собой секущий модуль на диаграмме растяжения,

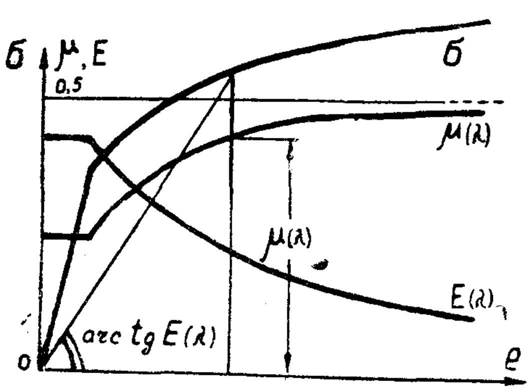
а $$\frac{\alpha(\lambda)-\beta(\lambda)}{\beta(\lambda)+2\alpha(\lambda)} = \frac{-e_x}{e_z} = \frac{-e_y}{e_z} = \mu(\lambda) \quad (10)$$

выполняет роль коэффициента поперечной деформации при упруго-пластической деформации с простым нагружением (фиг. 2). Используя эти характеристики уравнения (8) для главных направлений можно представить в виде:

$$e_1 = \frac{1}{E(\lambda)}\left[\sigma_1 - \mu(\lambda).(\sigma_2+\sigma_3)\right],$$

$$e_2 = \frac{1}{E(\lambda)}\left[\sigma_2 - \mu(\lambda).(\sigma_3+\sigma_1)\right], \quad (11)$$

$$e_3 = \frac{1}{E(\lambda)}\left[\sigma_3 - \mu(\lambda).(\sigma_1+\sigma_2)\right].$$



Фиг. 2

Из выражений (5), (6), (9), (10) вытекают соотношения между характеристиками $E(\lambda)$, $\mu(\lambda)$, $K(\lambda)$, $G(\lambda)$:

$$E(\lambda)=\frac{9K(\lambda).G(\lambda)}{G(\lambda)+3K(\lambda)}=3K(\lambda)\left[1-2\mu(\lambda)\right]; \qquad G(\lambda)=\frac{E(\lambda)}{2\left[1+\mu(\lambda)\right]};$$

$$\mu(\lambda)=\frac{3K(\lambda)-2G(\lambda)}{6K(\lambda)+2G(\lambda)}=\frac{E(\lambda)}{2G(\lambda)}-1; \qquad K(\lambda)=\frac{E(\lambda)}{3\left[1-2\mu(\lambda)\right]}. \qquad (12)$$

Решая уравнения (4) относительно $\sigma_x; \sigma_y; \sigma_z; \tau_{xy}; \tau_{yz}; \tau_{xz}$ можно получить выражения для компонентов напряжений через компоненты деформации:

$$\left.\begin{array}{l|l}
\sigma_x=\beta(\lambda).e_x+\left[\alpha(\lambda)-\beta(\lambda)\right].\dfrac{\Theta}{3} & \tau_{xy}=\tau_{yx}=\beta(\lambda).\dfrac{\gamma_{xy}}{2}=\beta(\lambda).\dfrac{\gamma_{yx}}{2} \\
\sigma_y=\beta(\lambda).e_y+\left[\alpha(\lambda)-\beta(\lambda)\right].\dfrac{\Theta}{3} & \tau_{yz}=\tau_{zy}=\beta(\lambda).\dfrac{\gamma_{yz}}{2}=\beta(\lambda).\dfrac{\gamma_{zy}}{2} \\
\sigma_z=\beta(\lambda).e_z+\left[\alpha(\lambda)-\beta(\lambda)\right].\dfrac{\Theta}{3} & \tau_{zx}=\tau_{xz}=\beta(\lambda).\dfrac{\gamma_{zx}}{2}=\beta(\lambda).\dfrac{\gamma_{xz}}{2}
\end{array}\right. \qquad (13)$$

Вычитая из уравнений (13) значение σ_{cp}, причем выраженное для правой части через e_{cp} получаем:

$$\begin{aligned}
\sigma_x-\sigma_{cp}&=2G(\lambda)(e_x-e_{cp})\\
\sigma_y-\sigma_{cp}&=2G(\lambda)(e_y-e_{cp})\\
\sigma_z-\sigma_{cp}&=2G(\lambda)(e_z-e_{cp}),
\end{aligned} \qquad (14)$$

откуда следуют пропорции, определяющие подобие кругов Мора для напряжений и деформаций при упруго-пластической деформации в условиях простого нагружения. Предположения о совпадении главных направлений для напряжений и деформаций могут считаться обоснованными лишь в пределах сохранения материалом свойств изотропии.

Следовательно при указанных условиях основные соотношения между напряжениями и деформациями для упруго-пластической деформации могут быть представлены в сходной по внешнему виду форме с аналогичными соотношениями теории упругости. Подобное представление уравнений (11) и др. не является новым [10, 11, 12]. Однако следует отметить некоторую количественную и качественную особенность уравнений (11) в том, что $\mu(\lambda)$ здесь—независимая характеристика. В теории упруго-пластической деформации $\mu(\lambda)$ величина либо постоянная и равная 0,5, либо определяемая по прочностной характеристике $\sigma-f(e)$ и константам упругости

$$\mu(\lambda)=\frac{1}{2}-\frac{1}{6K}E(\lambda), \qquad \text{где} \quad K=\text{const}.$$

Поведение изотропного материала при „чисто упругой" деформации определяется двумя постоянными K и G. Если предполагать сохранение свойств изотропности при упруго-пластической деформации, то соотношения между напряжениями и деформациями (как показано выше) также определяются через посредство двух величин $K(\lambda)$ и $G(\lambda)$ $(\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$, которые уже являются величинами переменными, зависящими от степени деформации. Вместо $K(\lambda)$ и $G(\lambda)$ для выражения связи напряжений и деформаций могут быть использованы производные характеристики $E(\lambda)$ и $\mu(\lambda)$. При любом выборе формы записи выражений для компонентов напряжений и деформаций необходимым является использование двух характеристик материала. Любое допущение, позволяющее представить зависимости между напряжениями и деформациями через одну какую либо характеристику будет предписывать материалу некоторые, вытекающие из подобного допущения свойства. Таким образом для точного описания поведения материала при упруго-пластической деформации необходимо из опыта получить две кривые как функции степени деформации. Ориентируясь на растяжение, как простейший опыт, за такие кривые можно принять

$$E(\lambda)=f_1(e) \quad \text{и} \quad \mu(\lambda)=f_2(e),$$

где e — продольная деформация образца.

$E(\lambda)=f_1(e)$, характеризует прирост сопротивления (напряжения) в связи с ростом деформации, и потому может быть заменена кривой изменения прочностных свойств материала $\sigma=f(e)$.

$\mu(\lambda)=f_2(e)$ показывает изменение соотношений между компонентами деформации, что определяет в конечном счете распределение работы деформации на деформацию объема и формоизменение, поэтому может быть названа кривой изменения деформационных свойств материала.

Кривые изменения прочностных и деформационных свойств материала можно взять из испытания на растяжение лишь при условии измерения в процессе опыта как продольной, так и поперечной деформации образца. Однако измерение последней несколько усложняет опыт и обычно не производится. Не взятые, вследствие этого, сведения о поведении материала при деформировании предписываются материалу на основе различного рода допущений как неизменность объема при пластической деформации, линейной упругости объемной деформации и т. п. Это заранее обусловливает приближенность теории упруго-пластической деформации и, вероятно, может приводить даже к тому, что некоторые экспериментальные факты могут оказаться не укладывающимися в рамки теории, построенной на неполных сведениях о материале.

Получение из опыта на растяжение кривых $E(\lambda)=f_1(e)$ и $\mu(\lambda)=f_2(e)$ практически представляется более удобным, нежели получение из отдельных опытов $K(\lambda)=f_3(\theta)$ и $G(\lambda)=f_4(\gamma)$. Экспериментальное определение $K(\lambda)=f_3(\theta)$ отличается несравненной сложностью опыта. Кроме того связь результатов различных испытаний может быть установлена лишь на основе каких-либо предположений о равноэффективности степеней деформаций в двух отдельных опытах. Однако эти предположения, в свою очередь, нуждаются в дополнительных обоснованиях.

Условие эквивалентности различных напряженных состояний при упруго-пластической деформации. Закон упрочнения

Основой построения многочисленных расчетных выражений в теории упруго-пластической деформации является предположение о существовании обобщенной кривой течения, не зависящей от вида напряженного состояния. Возможность сравнения различных напряженных состояний для стадии упруго-пластической деформации анализировалась целым рядом исследователей и неоднократно подвергалась экспериментальной проверке. Некоторые экспериментальные факты иногда являлись основанием для высказывания сомнений в возможности определения эквивалентных состояний материала при различных нагружениях.

Обобщенная кривая течения представляет характеристику поведения материала, подвергнутого механическому воздействию. Приведение различных сил к механическому эквиваленту позволяет предполагать возможность определения этой характеристики. Разумеется, что теория построенная только на категориях механики будет в той степени отражать действительное поведение материала, в какой несущественное значение будут иметь неучитываемые ею физические, химические и т. п. явления в процессе работы материала и их влияние на механическую сторону процесса деформации.

Существование обобщенной кривой позволяет характеризовать поведение материала при любом загружении на основе анализа его поведения при простейшем испытании. Наиболее употребительным для этой цели является испытание на растяжение. Точность характеристики различных напряженных состояний по данным опыта на растяжение, естественно, будет зависеть от полноты сведений о поведении материала, взятых из опыта на растяжение.

Возможность характеризовать поведение материала при любом виде загружения единой зависимостью, повидимому, впервые обстоятельно изучена Людвиком [8]. Подобную обобщенную кривую он считает основной технологической характеристикой. Обобщенной кривой по мнению Людвика является диаграмма $\tau_{max} - \gamma_{max}$. Предложенная им методика построения обобщенной кривой по данным опыта на растяжение, основанная на измерении лишь продольной деформации в принципе сохраняется до настоящего времени.

Обобщенная кривая $\tau_{max} - \gamma_{max}$, соответствующая условию пластичности Сен-Венана, анализируется в ряде теоретических и экспериментальных работ, из которых может быть сделан вывод о приближенности этой зависимости и отражении ею лишь плоской схемы. Поэтому указанная зависимость в последнее время вытесняется зависимостью $\sigma_i - e_i (\tau_{okm} - \gamma_{okm})$, соответствующей условию пластичности Мизеса-Генки. Многочисленные эксперименты подтверждают возможность характеризовать поведение материала обобщенной кривой, и для металлов и сплавов со стабильной структурой это считается почти несомненным, хотя в опытах и обнаруживается некоторое расхождение кривых. Эти расхождения являются не только результатом неточностей экспериментов. Обнаруживая некоторую систематичность они позволяют предполагать одной из причин и приближенность условий эквивалентности, построенных без получения из опыта действительной кривой изменения деформационных свойств с компенсацией недостающих сведений различного рода допущениями. Деформационная характеристика материала не берется из опыта и выпадает как в условии пластичности Сен-Венана $\tau_{max} = \tau_s$ так и в условии Мизеса-Генки $\sigma_i = \sigma_s$. Не вводится она также и в соответствующие выражения закона упрочнения. Например в соответствии с употребительным выражением закона упрочнения: интенсивность напряжений есть функция интенсивности деформаций, не зависящая от напряженного состояния-совпадение с диаграммой растяжения имеет место лишь при условии допущения о несжимаемости материала, а именно зависимость $\sigma_i = \Phi\left(\frac{3}{2}\frac{1}{1+\mu(\lambda)}\cdot e_i\right)$ переходит в $\sigma_i = \Phi(e_i)$ при принятии $\mu(\lambda) = 0{,}5$. [3]. На этой основе строятся и физические уравнения теории малых упруго-пластических деформаций.

Условие, определяющее эквивалентность различных напряженных состояний в процессе упруго-пластической деформации, представляемое в форме зависимости некоторого приведенного напряжения от приведенной деформации должно учитывать изменение свойств материала, характеризуемое двумя указанными кривыми. Это является необходимым для обеспечения совместности уравнений, описывающих процесс упруго-пластической деформации, так как связь между компонентами напряжений и деформаций выражается через посредство двух независимых характеристик.

Выше была рассмотрена возможность представления основных соотношений при упруго-пластической деформации с простым нагружением в форме, свойственной для упругой деформации. Продолжая эту аналогию нужно попытаться представить и условие эквивалентности при упруго-пластической деформации в той же форме, что и условие эквивалентности различных напряженных состояний для упругой деформации.

Для этой цели обратимся к рассмотренному ранее условию, использованному для определения предельного упругого состояния и находящемуся в хорошем соответствии с экспериментальными данными [13]. Предполагая, что эквивалентные состояния при различных загружениях определяются равенством средней деформации, исходное условие записываем в виде:

$$e_{cp}=\sqrt{\frac{e_1^2+e_2^2+e_3^2}{3}}=C,$$

используя значения главных удлинений представленных в форме (11) и приравнивая выражения средних деформаций для общего случая и эквивалентного растяжения, после преобразований приходим к уравнению эквивалентности в напряжениях:

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-k(\lambda)_e\cdot(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)=\sigma_s^2, \tag{15}$$

где σ_s — прочностная характеристика материала на данной стадии деформирования, соответствующая эквивалентному напряжению при растяжении.

$k(\lambda)_e=\dfrac{4\mu(\lambda)-2\mu(\lambda)^2}{1+2\mu(\lambda)^2}$ — характеристика, учитывающая деформационные свойства на этой стадии.

Изменению $\mu(\lambda)$ в пределах $0{,}25\div0{,}5$ соответствуют значения $k(\lambda)_e=0{,}777\div1$.

Из соотношений (12) вытекает выражение для коэффициента поперечной деформации при упруго-пластической деформации

$$\mu(\lambda)=\frac{1}{2}-\frac{1}{6K(\lambda)}\cdot\frac{\sigma}{e_{упр}+e_{ост}}, \tag{16}$$

которое в предположении „чисто пластической“ деформации, происходящей без изменения объема дает $\mu(\lambda)^\circ=0{,}5$, при этом условие (15) переходит в условие пластичности Мизеса-Генки.

Закон упрочнения может быть выражен следующим образом: приведенное напряжение для каждого материала является определенной и не зависящей от характера напряженного состояния функцией приведенной деформации

$$\sigma_{прив}=\Phi(e_{прив}),$$

где

$$\sigma_{прив}=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-k(\lambda)_e(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)},$$

$$\sigma_{прив}=\frac{e_p}{\sqrt{1+2\mu(\lambda)^2}}=\sqrt{\frac{e_1^2+e_2^2+e_3^2}{1+2\mu(\lambda)^2}}.$$

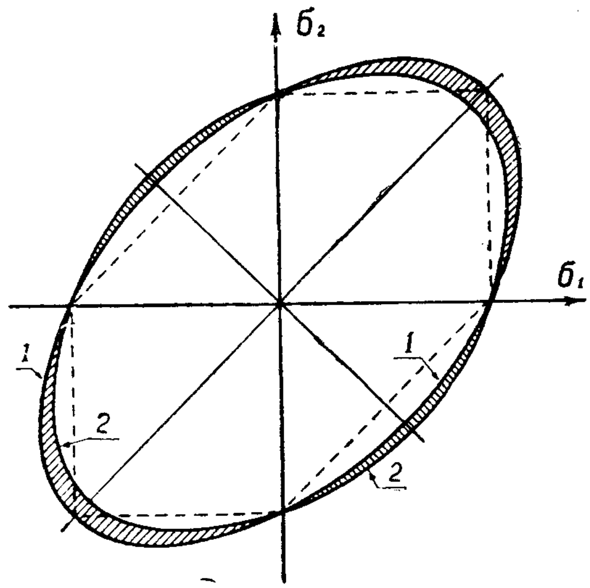
Функция $\sigma_{прив} = \Phi(e_{прив})$ полностью совпадает с диаграммой растяжения $\sigma - e$ и может быть взята из опыта на растяжение [1]).

При плоской интерпретации данного условия эквивалентные состояния материала в процессе упруго-пластической деформации для различных напряженных состояний характеризуются точками, расположенными между эллипсом Мизеса-Генки и эллипсом, соответствующим уравнению

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{4\mu - 2\mu^2}{1 + 2\mu^2}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} = \sigma_e,$$

где μ — коэффициент Пуассона.

Анализ экспериментов по проверке условий пластичности показывает, что именно в этих областях (на фиг. 3—заштрихованы) располагается подавляющее большинство экспериментальных точек.



Фиг. 3

Таким образом на основе использования двух экспериментальных функций представляется возможным описание процесса упруго-пластической деформации уравнениями, сходными по форме с уравнениями теории упругости. На этой основе возможна и оценка изменений, вносимых в теорию малых упруго-пластических деформаций различными допущениями относительно объемной деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Давиденков Н. Н. и Васильев Д. М. О коэффициенте поперечной деформации. Зав. лаб. № 5, 1952.
2. Жуков А. М. Сложное нагружение и теории пластичности изотропных металлов. Известия АН СССР. ОТН. № 8, 1955.
3. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, 1948.
4. Работнов Ю. Н. Малые пластические деформации как проблема механики. Известия АН СССР. ОТН. № 7, 1954.
5. Сб. Теория пластичности. Под ред. Работнова Ю. Н. ГИИЛ, 1948.

[1]) В теории Занделя (1919 г.) $e_{прив} = e_p = e$, что приводит и к иному выражению для $\sigma_{прив}$ [6].

6. Ривош О. А. Сопротивление материалов. Методическое руководство № 9. Издание Центр. Заочн. мех.-машиностр. института, 1933.
7. Бриджмен П. В. Новейшие работы в области высоких давлений. ГИИЛ, 1948.
8. P. Ludwik. Elemente der Technologischen Mechanik. Berlin, 1909.
9. Andrew, Lee A. O. Jron and Steel Inst. Vol. 165. p. 2. 1950.
10. Работнов Ю. Н. „Сопротивление материалов“. Издание МГУ, 1950.
11. Ржаницын А. Р. „Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов“. Москва, 1954.
12. Безухов Н. И. „Теория упругости и пластичности“. ГИТТЛ, 1953.
12. Дощинский Г. А. Теория предельного упругого состояния. Изв. ТПИ, т. 85. Томск, 1957.