ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА
Том 86 1958 г.

ИСКАЖЕНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ ПРИ РЕЗОНАНСНОМ ОТРАЖЕНИИ ОТ МЕТЕОРНЫХ СЛЕДОВ

Э. К. НЕМИРОВА

(Представлено профессором доктором физ-мат. наук Кессенихом В. Н.)

Введение

При радиолокации метеорных следов помимо искажений импульсов, обусловленных конечной полосой пропускания приемно-индикаторного тракта, можно ожидать наличия искажений, возникающих непосредственно при отражении высокочастотного импульса от столба ионизированного газа, образующегося в атмосфере при пролете метеорного тела.

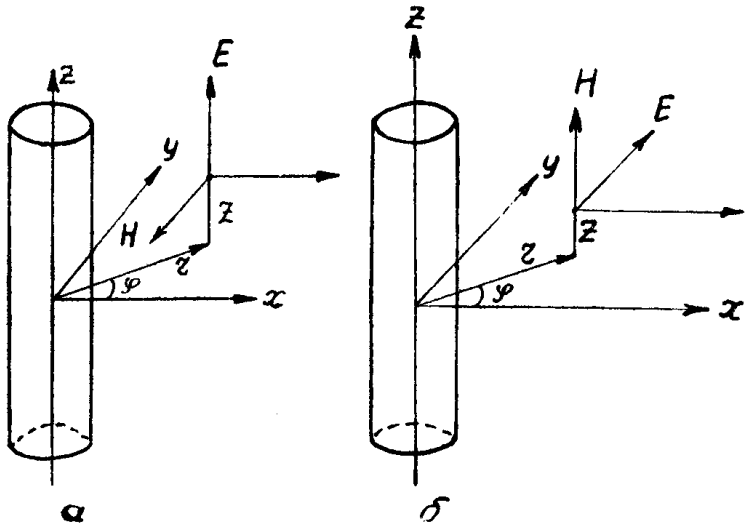


Рис. 1. а) Параллельная поляризация. б) Поперечная поляризация

Одной из причин искажений могут явиться дисперсионные свойства плазмы. С этой точки зрения наибольший интерес представляет случай резонансного отражения. Существование резонанса при поперечном падении радиоволны на метеорный след (рис. 1) было предсказано Герлофсоном в 1951 году [1]. Он показал, что коэффициент отражения при поперечном падении будет иметь максимум, если диа-

метр столба мал по сравнению с длиной волны и плотность электронов в некоторой части столба несколько выше критической.

Вопросу резонансного отражения посвящен ряд более поздних работ, из которых наибольший интерес представляют работы Кайзера, Клосса и Клегга [2, 3].

Теория Кайзера и Клосса [2] исходит из предположения о том, что метеорный след имеет цилиндрическую форму и медленно расширяется вследствие диффузии. При этом радиус его остается малым по сравнению с длиной падающей волны. Задача о нахождении коэффициента отражения от метеорного следа сводится к нахождению поля вблизи диэлектрического цилиндра с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon(r) = 1 - \frac{4\pi e^2 n(r)}{\kappa^2 m c^2}, \tag{1}$$

помещенного в однородное электростатическое поле. Решение электродинамической задачи заменяется, таким образом, решением задачи электростатики. Этот приближенный метод позволяет значительно упростить решение и в то же время дает количественные результаты, очень близкие к результатам, полученным непосредственным интегрированием уравнений Максвелла.

Для диэлектрического цилиндра в электростатическом поле справедливо уравнение:

$$div(\varepsilon\, grad\, V) = 0. \tag{2}$$

Решая это уравнение, записанное в цилиндрических координатах методом разделения переменных, получим решение в виде

$V(r, \varphi) = \sum_0^\infty V_m(r) \sin m\varphi$, причем V_m должно удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{dr}\left(\varepsilon(r)\, r \frac{dV_m}{dr}\right) = \frac{m^2 \varepsilon(r) V_m}{r}, \tag{3}$$

где $m = 1, 2, 3 \ldots$

Решая совместно два уравнения Максвелла [1])

$$rot\, \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$rot\, \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

получим уравнение для напряженности магнитного поля

$$\frac{d^2 H_m}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon'(r)}{\varepsilon(r)}\right) \frac{dH_m}{dr} + \left(\kappa^2 \varepsilon(r) - \frac{m^2}{r^2}\right) H_m = 0, \tag{4}$$

---

[1]) При последующем изложении теории Кайзера и Клосса применена Гауссова система единиц; фактор времени выбран в виде $ej^{\omega t}$.

$$H(r,\ \varphi) = \sum_{0}^{\infty} H_m(r) \cos m\varphi .$$

Для внешней области столба, т. е. при $\varepsilon = 1$, решение уравнения (3) известно и имеет вид

$$V_m(r) = A_m r^m + B_m r^{-m},$$

где A_m и B_m — произвольные постоянные.

Точное решение уравнения (4) для внешнего поля содержит функции Бесселя первого и второго рода.

Найдем приближенное решение для $H_m(r)$. Для этого упрощенно предполагая, что поле, имея $\overrightarrow{rot H}$, в отношении вектора $\vec{E}$ является потенциальным, найдем связь между H_m и V_m.

$$\vec{E} = grad\, V \ ^{1})$$

$$rot\ \vec{H} = j\kappa\varepsilon\ \vec{E}\ ,$$

отсюда

$$H_m = jk\varepsilon r \frac{\dfrac{dV_m}{dr}}{m},$$

т. е.

$$H_m(r) = jk\varepsilon (A_m r^m - B_m r^{-m}) \ [2]. \qquad (5)$$

Для нахождения постоянных A_m и B_m необходимо задать граничные условия, а следовательно, найти поле внутри цилиндра. Эта задача осложняется тем, что внутри цилиндра ε зависит от r, и может быть решена лишь численным интегрированием исходного уравнения (3).

Несмотря на свой приближенный характер, этот метод дает практически тот же количественный результат, что и метод непосредственного решения уравнения (4) [4].

Для нахождения коэффициента отражения можно воспользоваться разложением плоской падающей волны на цилиндрические гармоники с помощью функций Бесселя, а отраженную волну выразить через функцию Ханкеля:

$$H_{пад} = 1 \cdot e^{jkx} = I_0(\kappa r) + 2\sum_{1}^{\infty} j^m I_m(\kappa r) \cos m\varphi,$$

$$H_{отр} = \sum_{0}^{\infty} t_m \left[I_m(\kappa r) - j N_m(kr) \right] \cos m\varphi,$$

t_m - коэффициент отражения для цилиндрической гармоники. Полная напряженность магнитного поля

---

[1]) Это допущение делается лишь для области, расположенной вблизи цилиндра

$$H_{полн} = \sum_{0}^{\infty} H_m \cos m\varphi = H_{пад} + H_{отр}.$$

При условии $(\kappa r)^2 \ll 1$ можно воспользоваться приближенными аналитическими выражениями для $I_m(\kappa r)$ и $\mathbf{N}_m(\kappa r)$. Сравнивая полученное выражение с (5), найдем t_m.

$$t_m \cong -\frac{2j^m}{1 + j\dfrac{m!\,(m-1)!\,4^m}{\pi\kappa^{2m}}\dfrac{A_m}{B_m}} \quad [2]. \tag{6}$$

Полный коэффициент отражения для поперечной поляризации

$$g_1 = \sum_{0}^{\infty} j^m t_m. \tag{7}$$

Условие резонанса — $Re(A_m) = 0$. Нахождение g_1 для различных случаев распределения электронной плотности по радиусу столба и сравнение его с g_{11} (коэффициентом отражения при параллельной поляризации), произведенное Кайзером и Клоссом, показало, что резонанс имеет место при линейной электронной плотности $\alpha < 10^{12}\ \frac{эл}{см}$ [1])

Отношение $\frac{g_1}{g_{11}}$ имеет резонансный максимум, зависящий от диффузии столба. Авторами статьи [2] подробно исследован случай Гауссова распределения плотности

$$n(r) = n_0 e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^s} \qquad \text{при } s = 2.$$

Здесь $n(r)$ — объемная электронная плотность,
r_0 — радиус, на котором плотность составляет 37% от плотности на оси,

$$n_0 = \frac{\alpha}{\pi r_0^2}.$$

Случаи при $s > 2$ рассматриваются лишь в точке резонанса.

Наблюдения, проведенные на специальной аппаратуре Клеггом, Клоссом и Кайзером [3], подтвердили существование резонанса и дали удовлетворительное совпадение теоретических и экспериментальных результатов.

Целью настоящей работы является исследование влияния резонансных свойств метеорных следов на форму отраженного сигнала.

Частотные характеристики для различных случаев электронного распределения в следе

Метеорный след может быть представлен в виде четырехполюсника, коэффициент передачи которого (в данном случае коэффициент

---

[1]) Под линейной электронной плотностью понимается число электронов на единицу длины столба.

отражения) зависит от частоты поступающего на входагармонического сигнала. Это значит, что спектральные составляющие поступающего на вход сигнала (импульса, посылаемого передатчиком) будут передаваться на выход (отражаться) в различной степени. Таким образом, при рассмотрении искажений импульсного сигнала при отражении нас должна интересовать частотная зависимость комплексного коэффициента отражения

$$g_1 = G e^{-j\psi}.$$

Резонансные свойства столба ионизированного газа определяются в основном распределением электронной плотности по сечению столба [1]), зависящим от степени диффузии на его границах.

Наиболее благоприятным для резонанса является столб с резко выраженными границами в виде однородного цилиндра. Физически этот случай нереален, но может служить для сравнения при рассмотрении влияния диффузии на резонансные свойства следов.

При отражении от ионизированного цилиндра преобладающим является дипольный вид колебаний, поэтому в последующих расчетах принимаем $m = 1$.

Для однородного цилиндра [2]

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} a^{-2},$$

a — радиус цилиндра.

$$g_1 = j t_1 = \frac{2}{1 + j \dfrac{4}{\pi (\kappa a)^2} \dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}. \qquad (8)$$

Условие резонанса $\varepsilon = -1$.

В выражении (8) членами, зависящими от частоты, являются

$$\kappa = \frac{\omega}{c} \quad \text{и} \quad \varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}.$$

$$g_1 = \frac{2}{b^2 + 1}(1 - jb),$$

где

$$b = \frac{4c^2 m}{\pi^2 a^2 e^2 n} - \frac{4c^2}{\pi a^2 \omega^2}.$$

Модуль коэффициента отражения

$$G = \frac{2}{\sqrt{b^2 + 1}},$$

фаза

$$\psi = \operatorname{arctg} b.$$

---

[1]) При анализе принято, что вдоль оси цилиндра плотность распределена равномерно.

На рис. 2 приведены частотные характеристики для столбов с различными радиусами.

Для цилиндров с одной и той же объемной электронной плотностью резонансная частота не зависит от радиуса, полоса пропускания увеличивается с увеличением a.

При одинаковой линейной электронной плотности резонансная частота уменьшается с увеличением радиуса, полоса пропускания при этом сужается.

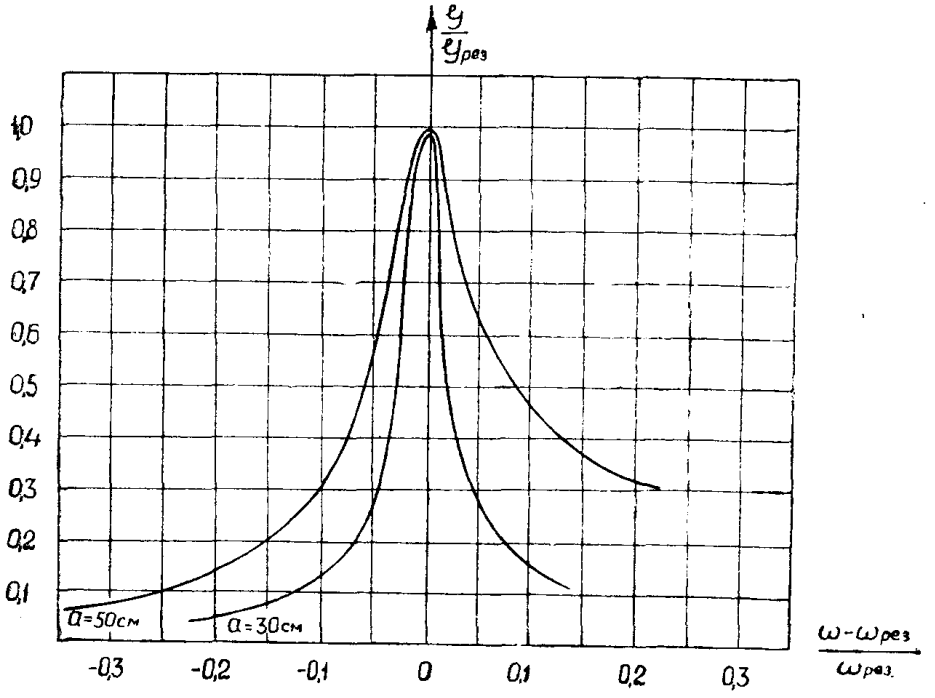


Рис. 2. Приведенные резонансные характеристики для однородного цилиндра при $N=2{,}2.10^7$ *элек/см*^{3}, $\omega_{рез} = 1{,}88.10^8$ 1/*сек*

Реальный метеорный след не может быть представлен в виде однородного цилиндра. Вследствие наличия диффузии, границы столба будут расплывчатыми. Степень расплывания может быть охарактеризована с помощью функции, показывающей распределение объемной электронной плотности вдоль радиуса. В литературе рассматривается несколько моделей метеорного следа, различающихся распределением электронной концентрации вдоль радиуса.

Герлофсон представлял метеорный след в виде цилиндра, в котором электронная плотность постоянна от оси до некоторого радиуса, а затем линейно падает до нуля. Файнштейн предполагал, что плотность уменьшается линейно, начиная от оси и кончая некоторым радиусом, где плотность равна нулю.

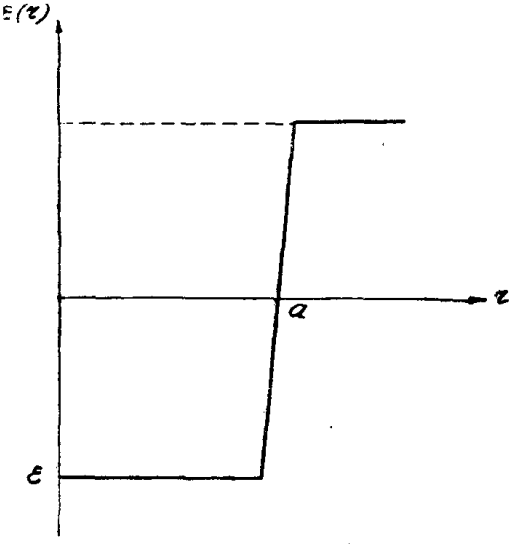
По Кайзеру и Клоссу объемная плотность зависит от радиуса следующим образом

$$n(r) = n_0 e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^s},$$

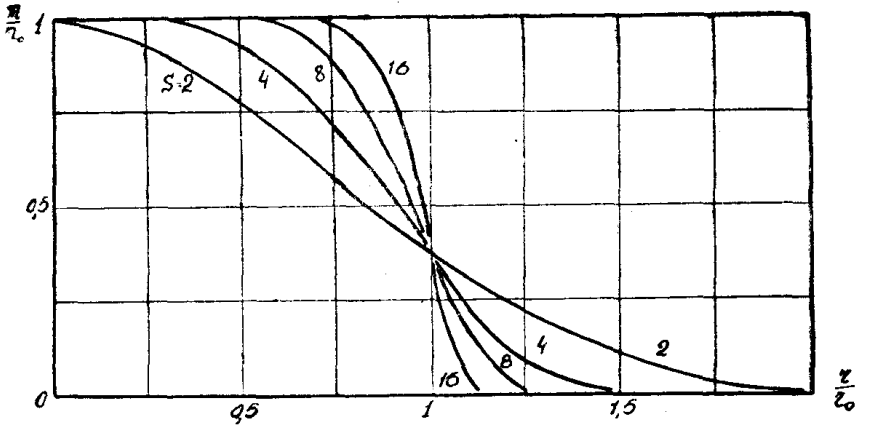
$$r_0^2 = 4Dt,$$

D — коэффициент диффузии, s — определяет степень размытости границ столба. При $s \gg 1$ это распределение близко к распределению Герлофсона. Различные виды распределений показаны на рис. 3.

Наиболее приемлемой можно считать модель Кайзера и Клосса. Введенная ими функция распределения охватывает как следы с почти линейно падающей плотностью, так и следы, близкие к рассмотренным Герлофсоном. При этом нахождение коэффициентов отражения для различных случаев распределения производится на общей основе. Частный случай при $s=2$ (Гауссово распределение) используется и в некоторых последующих работах [4].



а)



б)

Рис. 3. Различные виды распределения электронной плотности вдоль радиуса: а) модель Герлофсона, $\varepsilon=1-\frac{4\pi e^2 n(r)}{k^2 m c^2}$, б) модель Кайзера и Клосса, $n(r)=n_0 e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^s}$

Но и модель Кайзера—Клосса не охватывает всей полноты физических явлений, происходящих при образовании метеорного следа. В частности, не учитываются столкновения, не берется в расчет зависимость коэффициента диффузии от радиуса и времени под влиянием изменения температурного градиента на границе столба.

Вопрос о том, при каких условиях возможно то или иное распределение, не является в настоящее время достаточно изученным. Решение этого вопроса представляет значительную трудность и не является целью настоящей работы.

Рассмотрение резонансных свойств следов и степени искажения импульсов производится для нескольких значений s и для модели Герлофсона.

Выясним зависимость от частоты коэффициентов отражения для различных распределений.

В общем случае для $m=1$

$$g_1 = j t_1 = \frac{2}{1 + j \dfrac{4}{\pi (\kappa r_0)^2} \dfrac{A'}{B'}},$$

$$A_1 = A' r_0^{-1}, \qquad B_1 = B' r_0.$$

От распределения электронной плотности зависит отношение $\dfrac{A'}{B'}$.

Рассмотрим вначале модель Герлофсона (рис. 3 *а*). В этом случае столб неоднороден в области $r = a$.

$$\frac{A'}{B'} = \frac{(1+\varepsilon) + \dfrac{\varepsilon}{a\varepsilon'(a)} (j\pi - \ln|\varepsilon|)}{(1-\varepsilon) + \dfrac{\varepsilon}{a\varepsilon'(a)} (j\pi - \ln|\varepsilon|)} \quad [2].$$

При резонансе $\varepsilon = -1$.

$$\varepsilon = 1 - f e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^s}, \quad f = \frac{4\alpha}{(\kappa r_0)^2} \frac{e^2}{mc^2}, \tag{9}$$

$$a\varepsilon'(a) = s \ln f.$$

При рассмотрении модели Кайзера и Клосса

$$\varepsilon(\rho) = 1 - f e^{-\rho^s},$$

где

$\rho = \dfrac{r}{r_0}$, $\dfrac{A'}{B'}$ находится численным интегрированием уравнения (3), представленного в виде

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho \varepsilon \frac{dV}{d\rho}\right) = \frac{\varepsilon V}{\rho}. \tag{10}$$

На границе столба $\varepsilon = 1$ и

$$V = A' \rho = B' \rho^{-1}. \tag{11}$$

Условия на оси столба следующие:

$$\text{при } \rho \ll 1 \quad \varepsilon \cong \text{const} \quad \text{и} \quad V \cong \rho,$$

$$\text{на оси } V = 0, \quad \frac{\varepsilon V}{\rho} = \varepsilon(0).$$

Численно интегрируя (10) от точки к точке, начиная от оси, найдем V внутри цилиндра около его границы.

Накладывая граничные условия и используя (11), найдем A′ и B′. При этом

$$A' = A'_R + j A'_y, \qquad B' = B'_R + j B'_y.$$

При расчете удобно пользоваться отношениями

$$A = \frac{A'_R}{B'_R}, \quad B = \frac{A'_j}{B'_R} \quad \text{и} \quad C = \frac{B'_j}{B'_R}.$$

$$g_1 = \frac{2}{1 + \frac{4}{\pi (\kappa r_0)^2} \frac{-B + AC}{1 + C^2} + j \frac{4}{\pi (\kappa r_0)^2} \frac{A + BC}{1 + C^2}}. \qquad (12)$$

$\frac{A'_R}{B'_R}$, $\frac{A'_y}{B'_R}$ и $\frac{B'_y}{B'_R}$ задаются графически в зависимости от f.

В работе [2] произведено численное интегрирование только для Гауссова распределения. Так как на форму импульсов существенно сказываются лишь следы с распределением при $s > 2$, нами было проделано численное интегрирование для $s = 12$, в результате которого получены кривые на рис. 4.

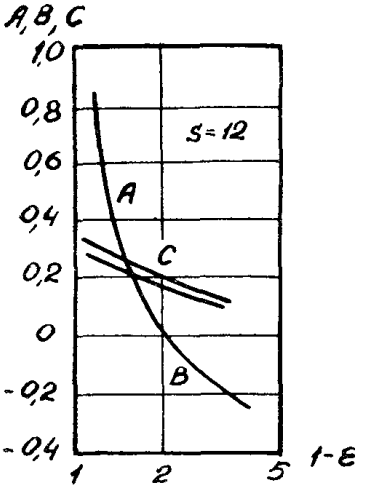


Рис. 4. Кривые для определения отношения произвольных постоянных A_m/B_m для случая при $s = 12$, полученные численным интегрированием уравнения (3)

Представляет интерес зависимость резонансной частоты, резонансного коэффициента отражения и полосы пропускания от линейной электронной плотности, радиуса столба и s.

Кривые на рис. 5 получены Кайзером и Клоссом. На основании кривой (c) построена зависимость резонансной частоты от α и r_0 (рис. 6).

Для столбов с одной и той же линейной электронной плотностью резонансная частота уменьшается с увеличением r_0. Для следов с одинаковыми размерами резонансная частота тем выше, чем больше α.

Резонансная характеристика определяется функцией распределения (в данном случае s), линейной электронной плотностью и радиусом столба. При образовании ионизированного следа его начальный диаметр имеет величину порядка средней длины пути свободного пробега молекул. При поперечной поляризации и некотором α имеются условия для резонанса на определенной частоте. При постепенном расплывании границ столба, закон которого определяется величиной s, происходит постепенное увеличение r_0 (радиуса, на котором объемная электронная плотность составляет 37% от плотности на оси). При этом плотность на оси некоторое время остается постоянной, резонанс еще наблюдается, но резонансный пик смещается по частоте, и в определенные моменты может пройти через полосу частот, занимаемую импульсом радиолокатора. Затем происходит постепенное разрушение следа. При этом очевидно, что без учета столкновений линейная электронная плотность должна при расширении столба сохранять свою величину. Для одной и той же линейной плотности резонансная частота уменьшается с увеличением радиуса (рис. 6), т. е. резонансный пик двигается со временем влево (рис. 7). При этом отраженный сигнал должен менять свою амплитуду и форму. Изменения амплитуды сигнала в этом случае наблюдались Клеггом, Клоссом и Кайзером. Амплитуда при поперечной поляризации сначала возрастает, достигает максимума, затем спадает.

Форма отраженного сигнала может быть найдена из рассмотрения частотных характеристик. Изменение формы можно проследить, установив зависимость вида частотной характеристики от r_0 для одной и той же величины s и плотности α.

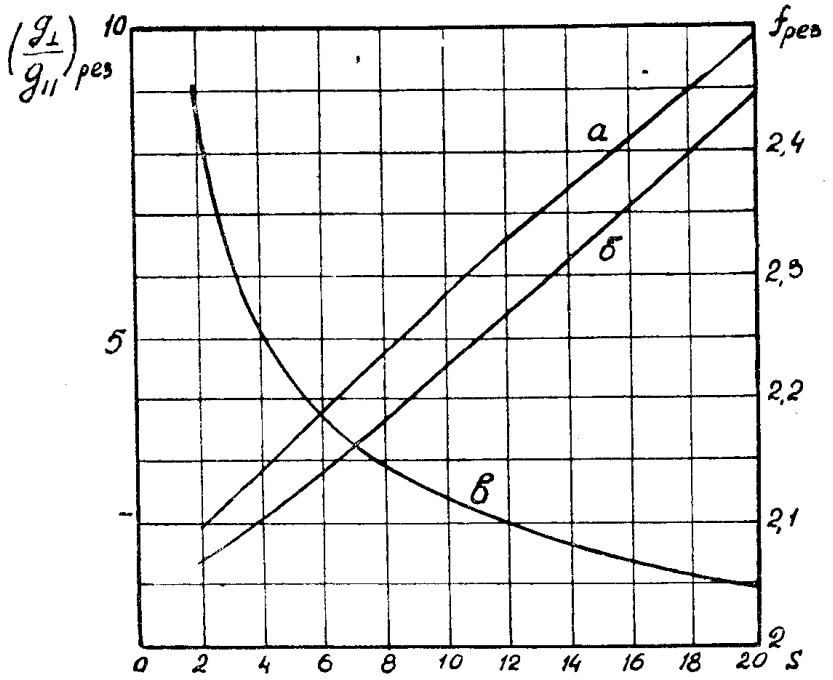


Рис. 5. а) $\left(\frac{g_1}{g_{11}}\right)_{рез}$, подсчитанное численным интегрированием уравнения (3), б) — то же для модели Герлофсона, в) $f_{рез} = 1 - \varepsilon_{рез}$ в зависимости от s

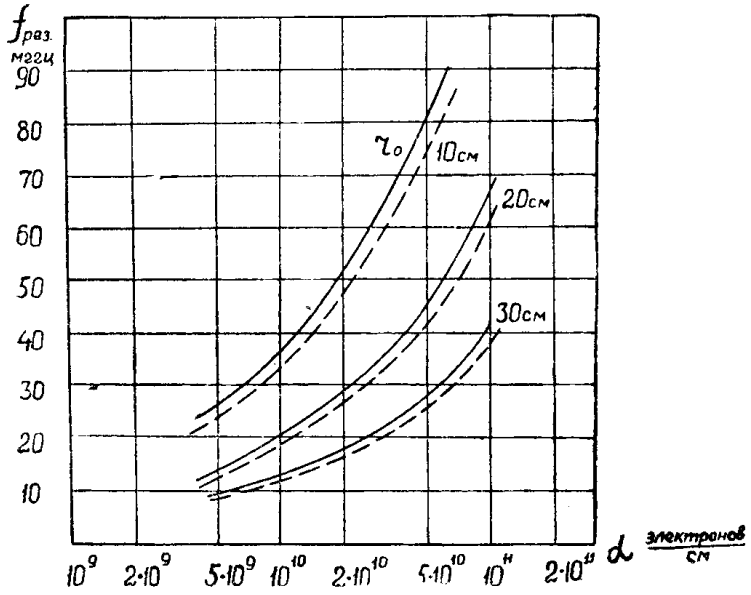


Рис. 6. Зависимость резонансной частоты от α и r_0
———— для распределений при $s \gg 1$.
— — — — для случая $s = 2$

Поведение коэффициента отражения при расширении следа видно из рис. 7. В пределах полосы частот зондирующего импульса частотная характеристика существенно меняет свою форму. Эти изменения происходят за время порядка 0.1 *сек*.

Изменение формы частотной характеристики в пределах полосы тем значительнее, чем больше градиент электронной плотности на границе столба, т. е. чем больше s.

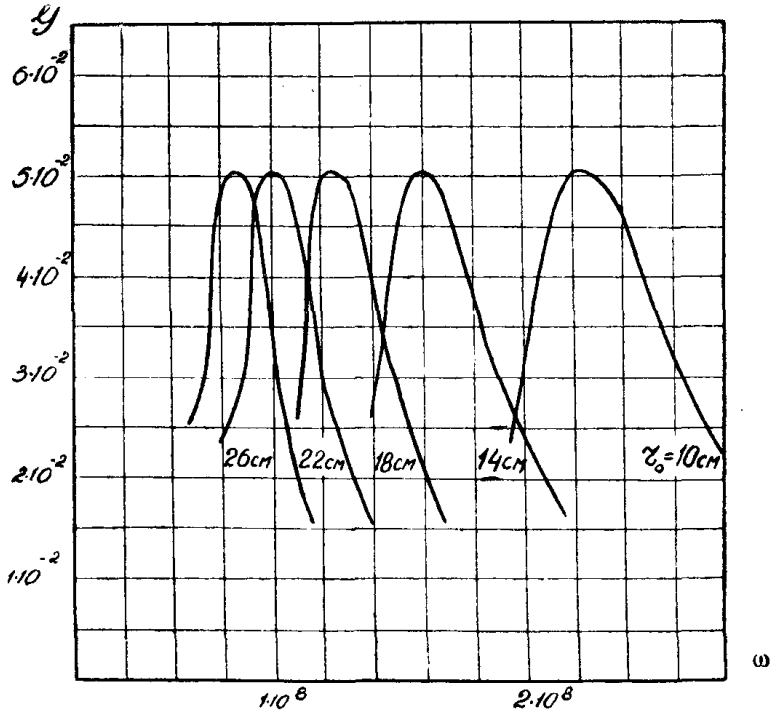


Рис. 7. Резонансные кривые расширяющегося следа, $\alpha = 10^{10}$ *эл/см* s=12

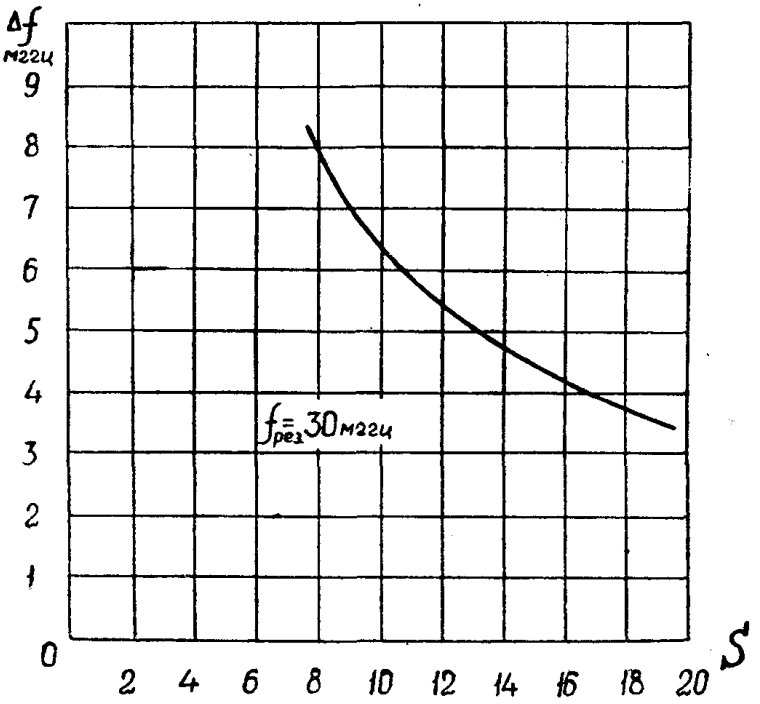


Рис. 8. Зависимость полосы пропускания от s (для модели Герлофсона)

Влияние резонансных свойств следа на форму отраженного сигнала можно характеризовать полосой пропускания амплитудно-частот-

ной характеристики. Полоса пропускания сильно зависит от s (рис. 8). (Кривая построена для модели Герлофсона в предположении, что все другие параметры следа постоянны).

Наиболее сильно может исказиться сигнал при отражении от однородного ионизированного столба.

С целью выяснения возможных видов искажений рассмотрен переходный процесс при отражении от однородного цилиндра (с радиусом $a = 30$ *см* и $\alpha = 6 \cdot 10^{10} \left(\frac{эл}{см} \right)$ единичного прямоугольного скачка огибающей синусоидального напряжения.

Так как в данном случае получение точных количественных результатов необязательно, резонансная характеристика следа аппроксимировалась резонансной кривой колебательного контура с добротностью $Q = 30$.

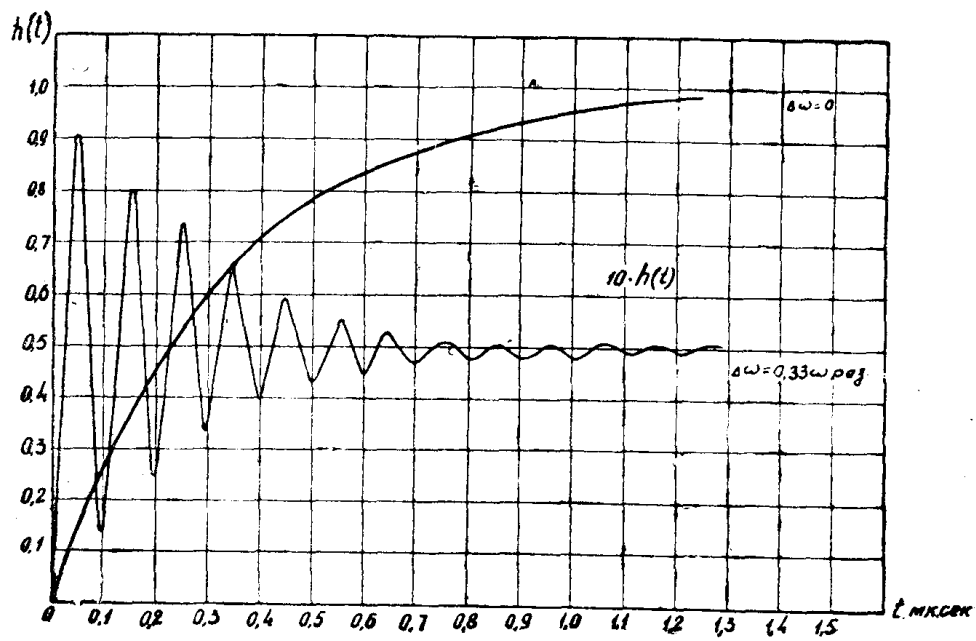


Рис. 9. Переходные процессы при отражении прямоугольного фронта импульса от однородного столба ионизированного газа

Совпадение как амплитудно-частотной, так и фазо-частотной характеристик удовлетворительно. На рис. 9 изображен переходный процесс для случая совпадения несущей частоты сигнала с резонансной частотой, а также для случая $\omega_0 \neq \omega_{рез}$. Можно сказать, что и для других случаев распределения ожидаемыми видами искажений являются затягивание фронтов импульсов и осцилляции на плоской части.

Нахождение форм огибающих отраженного сигнала в общем случае не может быть произведено достаточно точно с помощью подобной аппроксимации. Эта задача может быть решена применением приближенных методов, основанных на операционном исчислении.

Выводы

1. В случае резонансного отражения амплитуда и форма отраженного сигнала должны изменяться по мере расширения следа.

2. Эти изменения выражены тем сильнее, чем больше градиент электронной плотности на границе столба.

3. Влияние резонанса при отражении может выразиться в затягивании фронтов импульса и осцилляций на его вершине.

4. Изменения амплитуды и формы могут внести дополнительную погрешность в измерение дальности, скорости метеора и измерение скорости дрейфа метеорного следа когерентно-импульсным методом, а также могут вызвать погрешности при некоторых специальных измерениях.

Нахождение переходных процессов для различных случаев распределения и различных параметров следов представляет значительный интерес и является задачей дальнейшей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Herlofson N., Plasma resonance in ionospheric irregularities, Arkiv för Fysik, Bd 3, N 15, 1951.

2. Kaiser T. R. a. Closs R. L., Theory of radio reflections from meteor trails, Phil. Mag., V. 43, N 336, 1952.

3. Closs R. L., Clegg J. A. a. Kaiser T. R.,—An experimental study of radio reflections from meteor trails, Phil. Mag., V. 44, N 350, 1953.

4. Keitel G. H. Certain mode solutions of forward scattering by meteor trails, Proc. JRE, october, 1955, спец. выпуск.