ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 87 1957 г.

ЗАКОНОМЕРНОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ БЕТАТРОНА

Б. Н. РОДИМОВ

(Представлено научным семинаром физико-технического факультета)

Уравнения движения электрона в магнитном поле бетатрона

Уравнения движения электрона в магнитном поле бетатрона в цилиндрических координатах будут иметь вид:

$$F_r = -\frac{e}{c}\,\dot{\Theta}\,\frac{\partial(rA)}{\partial r} + mr\dot{\Theta}^2,$$

$$F_z = -\frac{e}{c}\,r\dot{\Theta}\,\frac{\partial A}{\partial z},$$

$$F_\Theta = \frac{e}{cr}\cdot\frac{d}{dt}(rA) = \frac{m}{r}\,\frac{d}{dt}(r^2\dot{\Theta}).$$

Здесь r, z, Θ — координаты электрона, $A = A_\Theta(r,z)$ вектор-потенциал магнитного поля, m — масса электрона (мы ограничиваемся пока нерелятивистским случаем).

Последнее из уравнений (1) непосредственно интегрируется:

$$\frac{cm}{e}\,r^2\dot{\Theta} - rA = \frac{cm}{e}\,r^2_0\dot{\Theta}_0 - r_0A_0 = \text{const} = C. \qquad (2)$$

Значки „о“ определяют начальные значения соответствующих величин

Введем величину $V_м = \dfrac{e}{2mc^2}\left(A + \dfrac{C}{r}\right)^2$ или $V_м = \dfrac{e}{2mc^2}\left(\dfrac{\dfrac{r^2H_z}{2} + C}{r}\right)^2$,

где $H_z = \dfrac{2A}{r}$ — средняя напряженность магнитного поля в круге радиуса r.

В этих обозначениях:

$$m\ddot{r} = -e\,\frac{\partial V_м}{\partial r},$$
$$m\ddot{z} = -e\,\frac{\partial V_м}{\partial z}, \tag{3}$$
$$mr\dot{\theta} = mv_t = \frac{e}{c}\left(\frac{\frac{r^2 H_z}{2} + C}{r}\right).$$

За достаточно малый промежуток времени функция $V_м$ может считаться постоянной. Тогда уравнения (3) определят движение электрона в плоскости r, z в поле потенциальных сил, определяемых функцией $V_м$.

В качестве условия существования фокусирующих сил для электрона, направленных к некоторому кругу радиуса R, для функции $V_м$ получаются обычные требования для существования минимума функции двух переменных:

$$\frac{\partial V_м}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2 V_м}{\partial r^2} > 0, \quad \frac{\partial V_м}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 V_м}{\partial z^2} > 0,$$
$$\frac{\partial^2 V_м}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial^2 V_м}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 V_м}{\partial r \partial z}\right)^2 > 0. \tag{4}$$

Эти требования приводят к известному условию для спадания поля по радиусу в окрестностях круга данного радиуса:

$$0 < -\frac{r}{H_z}\,\frac{\partial H_z}{\partial r} < 1.$$

Величина $-\frac{r}{H_z}\,\frac{\partial H_z}{\partial r}$ обычно обозначается буквой n.

При оценке фокусирующих свойств поля обычно ограничиваются исследованием величины n в разных точках поля. Однако распределение величины n в поле не позволяет наглядно представить распределение фокусирующих сил в поле и оценить с этой точки зрения качество поля. Для этой цели более подходящей является величина $V_м$—потенциальная функция фокусирующих сил магнитного поля бетатрона.

Связь величины n с потенциальной функцией $V_м$

Уравнения (3) показывают, что тангенциальная слагающая скорости электрона, движущегося в магнитном поле бетатрона, может быть выражена через потенциальную функцию $V_м$ этого поля:

$$v_t = \sqrt{\frac{2e}{m} V_м}. \tag{5}$$

Фокусирующую силу в направлении оси Z можно записать в виде

$$m\ddot{z} = -e\,\frac{\partial V_м}{\partial z} = \frac{e}{c}\,v_t H_r.$$

Отсюда

$$H_z = -c\sqrt{\frac{m}{e}}\cdot\frac{\frac{\partial V_м}{\partial z}}{\sqrt{2V_м}}.$$

Фокусирующая сила в направлении оси r запишется как

$$m\ddot{r} = -e\frac{\partial V_м}{\partial r} = -\frac{e}{c}v_t\Delta H_z.$$

Отсюда

$$\Delta H_z = c\sqrt{\frac{m}{e}}\cdot\frac{\frac{\partial V_м}{\partial r}}{\sqrt{2V_м}}.$$

Здесь $\Delta H_z = H_z - H_{zv}$, т. е. разности между магнитным полем, существующим в данной точке, и тем полем, которое требуется для кругового движения электрона на данном радиусе r со скоростью v_t. Эта разность и создает фокусирующую силу в направлении r. H_{zv} находится из соотношения

$$\frac{mv_t^2}{r} = \frac{e}{c}v_t H_{zv}.$$

Таким образом получается, что

$$H_z = \frac{c}{r}\sqrt{\frac{2m}{e}V_м} + c\sqrt{\frac{m}{e}}\cdot\frac{\frac{\partial V_м}{\partial r}}{\sqrt{2V_м}}. \tag{7}$$

Так как по определению

$$n = -\frac{r}{H_z}\cdot\frac{\partial H_z}{\partial r},$$

то получим

$$n = 1 - \frac{2\frac{\partial V_м}{\partial r} + r\left[\frac{\partial^2 V_м}{\partial r^2} - \frac{1}{2V_м}\left(\frac{\partial V_м}{\partial r}\right)^2\right]}{\frac{2V_м}{r} + \frac{\partial V_м}{\partial r}}. \tag{8}$$

Это и есть искомое уравнение для n.

В точке на равновесной орбите $r = R$, $z = 0$, $\frac{\partial V_м}{\partial r} = 0$, т. е.

$$n_R = 1 - R^2\left(\frac{\frac{\partial^2 V_м}{\partial r^2}}{2V_м}\right)_{r=R,\ z=0}.$$

Из условия $\frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{\partial H_r}{\partial z}$ можно получить соотношение

$$n_R = R^2\left(\frac{\frac{\partial^2 V_м}{\partial z^2}}{2V_м}\right)_{r=R,\ z=0}.$$

Вывод уравнения магнитного поля бетатрона

Уравнение (8) можно переписать как

$$\frac{\partial^2 V_м}{\partial r^2} - \frac{1}{2V_м}\left(\frac{\partial V_м}{\partial r}\right)^2 + \frac{1+n}{r}\cdot\frac{\partial V_м}{\partial r} - (1-n)\frac{2V_м}{r^2} = 0. \tag{9}$$

Если известно распределение n при данном значении z, то это уравнение может служить для нахождения формы зависимости $V_м$ от r при данном z.

Можно получить подобное же уравнение для зависимости $V_м$ от z. Беря известные уже выражения для H_r и H_z и используя уравнение Максвелла $\frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{\partial H_r}{\partial z}$, получим

$$\frac{\partial^2 V_м}{\partial r^2} - \frac{1}{2V_м}\left(\frac{\partial V_м}{\partial r}\right)^2 - n\left[\frac{2V_м}{r^2} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial V_м}{\partial r}\right] = 0. \tag{10}$$

Складывая левые части уравнений (9) и (10), будем иметь

$$\frac{\partial^2 V_м}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V_м}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_м}{\partial z^2} - \frac{1}{2V_м}\left[\left(\frac{\partial V_м}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_м}{\partial z}\right)^2\right] - \frac{2V_м}{r^2} = 0. \tag{11}$$

Это уравнение и будем называть уравнением магнитного поля бетатрона. так как им охватываются все основные свойства этого поля, представляющие интерес с точки зрения теории бетатрона.

Как показано [2], для $V_м$ имеет место соотношение

$$4\pi e\rho_{рав} = \frac{\partial^2 V_м}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V_м}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_м}{\partial z^2}, \tag{12}$$

где $\rho_{рав}$ — так называемая равновесная плотность пучка электронов. Уравнение поля позволяет получить для равновесной плотности второе выражение

$$4\pi e\rho_{рав} = \frac{1}{2V_м}\left[\left(\frac{\partial V_м}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_м}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{2V_м}{r^2}. \tag{13}$$

Функция $V_м$ оптимального поля

Оптимальное поле бетатрона должно обеспечить наибольший равновесный заряд в пространстве, которое задано для движения электронов. Математически задача сводится к разыскиванию экстремума следующего интеграла, представляющего полный равновесный заряд в области фокусирующих сил магнитного поля (для электронов с той величиной постоянной C, для которой берется и функция $V_м$)

$$J = \int\int\int 4\pi e\rho_{рав}\, r dr d\theta\, dz = 2\pi e \int\int\left[\frac{1}{2V_м}\left(\frac{\partial V_м}{\partial r}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2V_м}\left(\frac{\partial V_м}{\partial z}\right)^2 + \frac{2V_м}{r^2}\right] r dr dz.$$

Условием экстремума для J будет уравнение Эйлера для функции F

$$F = \frac{r}{2V_м}\left(\frac{\partial V_м}{\partial r}\right)^2 + \frac{r}{2V_м}\left(\frac{\partial V_м}{\partial z}\right)^2 + \frac{2V_м}{r},$$

т. е.

$$\frac{\partial F}{\partial V_м} - \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial V_м}{\partial r}\right)}\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial V_м}{\partial z}\right)}\right] = 0.$$

Легко убедиться, что уравнение Эйлера сводится опять к полученному нами уравнению поля (11). Таким образом, заданную область фокусирующих сил мы можем осуществить только одним единственным полем. Выбор оптимального поля сводится к выбору наилучшего контура для области фокусирующих сил. Этот последний производится в зависимости от требующейся интенсивности и из инженерных и экономических соображений.

Решение уравнения поля и применение его для расчета поля

Выражение потенциальной функции для электронов с любым значением постоянной C записывается в форме

$$V_{мс} = \frac{e}{2mc^2}\left[\frac{\frac{r^2\overline{H}_z}{2}+C}{r}\right]^2. \tag{14}$$

Его легко можно выразить через потенциальную функцию „нулевых" электронов, для которых $C=0$, т. е.

$$V_{мо} = \frac{e}{2mc^2}\left[\frac{r\overline{H}_z}{2}\right]^2, \tag{15}$$

в виде

$$V_{мс} = \left[\sqrt{V_{мо}} + \frac{C}{r}\sqrt{\frac{e}{2mc^2}}\right]^2. \tag{16}$$

Поэтому будет достаточным найти решение уравнения поля для нулевых электронов.

Для решения вернемся к выражению функции $V_{мо}$ через вектор-потенциал A

$$V_{мо} = \frac{eA^2}{2mc^2}. \tag{17}$$

Подставляя в уравнение поля вместо $V_м$ величину A, получим для A уравнение

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{A}{r^2} = 0. \tag{18}$$

Это уравнение решается разделением переменных. Полагаем

$$A = U(r) \,.\, W(z).$$

Получим два уравнения:

$$\frac{d^2 W(z)}{dz^2} = k^2 W(z) \tag{19}$$

и

$$\frac{d^2 U(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU(r)}{dr} + \left(k^2 - \frac{1}{r^2}\right)U(r) = 0. \tag{20}$$

Условие $\frac{dW}{dz} = 0$ при $z=0$ дает

$$W(z) = ch\,(kz). \tag{21}$$

Решением второго уравнения будет

$$U(r) = A_0\,[aJ_1(kr) + bN_1(kr)], \tag{22}$$

где $J_1(kr)$ и $N_1(kr)$—соответственно функции Бесселя и Неймана первого порядка.

Это решение будет простейшим и требующим наименьшего количества начальных условий. Осуществляемые на практике поля получаются более сложными по своему аналитическому выражению. Рассчитывать с самого начала именно такие поля не имеет смысла из-за необходимости задания большого количества начальных условий, выбирать которые весьма затруднительно.

Рассмотрим пример расчета поля.

Возьмем в качестве граничных условий $n = n_o$ на радиусе равновесного круга R_o и значение функции $A = A_o$ на этом радиусе. Кроме того, требуем, чтобы A_o было минимальным. Получаем:

$$\begin{aligned} &a\,J_1(kR_o) + b\,N_1(kR_o) = 1,\\ &a\,J'_1(kR_o) + b\,N_1'(kR_o) = 0,\\ &k^2 aJ_1(kR_o) + k^2 bN_1'(kR_o) = \frac{n_0}{R_0^2}\,. \end{aligned} \tag{23}$$

(Последнее выражение получается из соотношения $\frac{\partial^2 V_{мо}}{\partial z^2} = \frac{2V_0}{R_0^2}\,n_0$).

Первое и третье уравнения дают $k = \frac{\sqrt{n_o}}{R_o}$.

Амплитуды определяются из уравнений

$$\begin{aligned} &a\,J_1(\sqrt{n_o}) + b\,N_1(\sqrt{n_o}) = 1,\\ &a\,J_1'(\sqrt{n_o}) + bN_1'(\sqrt{n_o}) = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Для случая $R_o = 15$ *см* и $n_o = 0{,}5$ и $0{,}75$ получаются следующие значения амплитуд и коэффициента k

	$n_0 = 0{,}5$	$n_0 = 0{,}75$
k	0,04714	0,05773
a	1,51439	1,39161
b	—0,45481	—0,49872

На рисунках (1, 2, 3, 4) представлена функция $V_{мо} - \frac{eA^2}{2mc^2}$ для разных значений r и z в виде горизонталей и дан профиль потенциальной ямы для $z = 0$. Кривая n дает значения $n(r)$, вычисленные по формуле

$$n = \frac{\frac{A}{r} - \frac{\partial A}{\partial r} + r\,\frac{\partial^2 A}{\partial r^2}}{\frac{A}{r} + \frac{\partial A}{\partial r}}\,, \tag{25}$$

представляющей модификацию формулы (8).

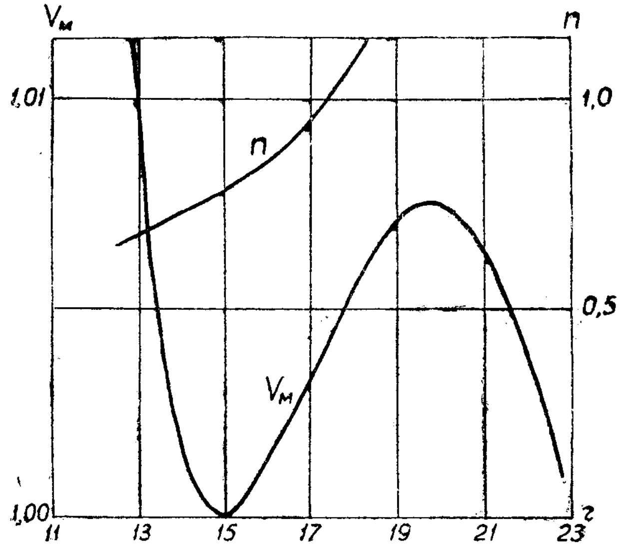

Рис. 1

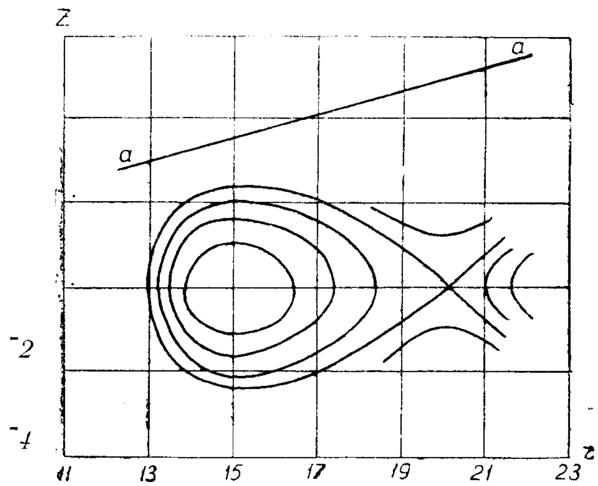

Рис. 2

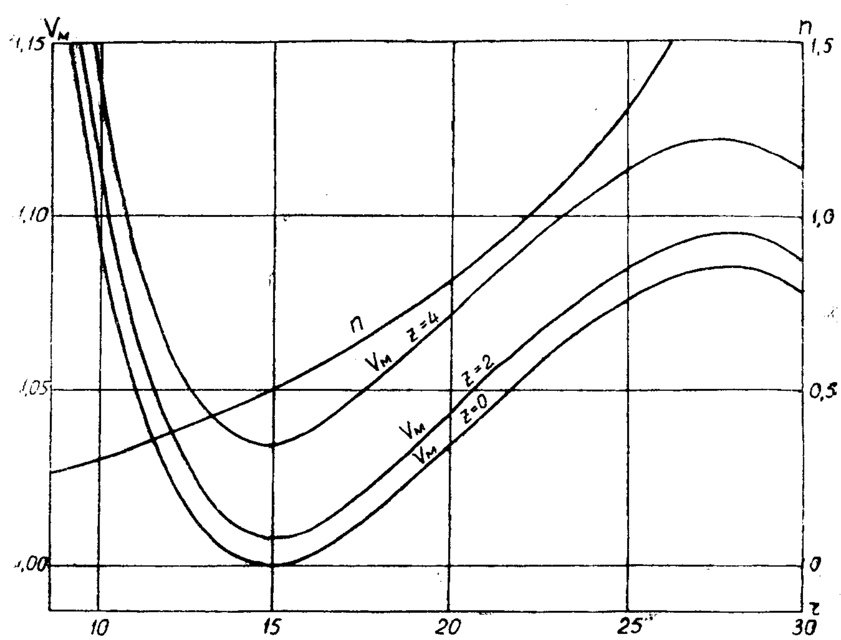

Рис. 3

По этим же данным вычисляется профиль полюсов, создающих искомое поле. Как известно, H_r и H_z можно выразить через скалярный потенциал магнитного поля V

$$H_r = -\frac{\partial V}{\partial r}, \qquad H_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{26}$$

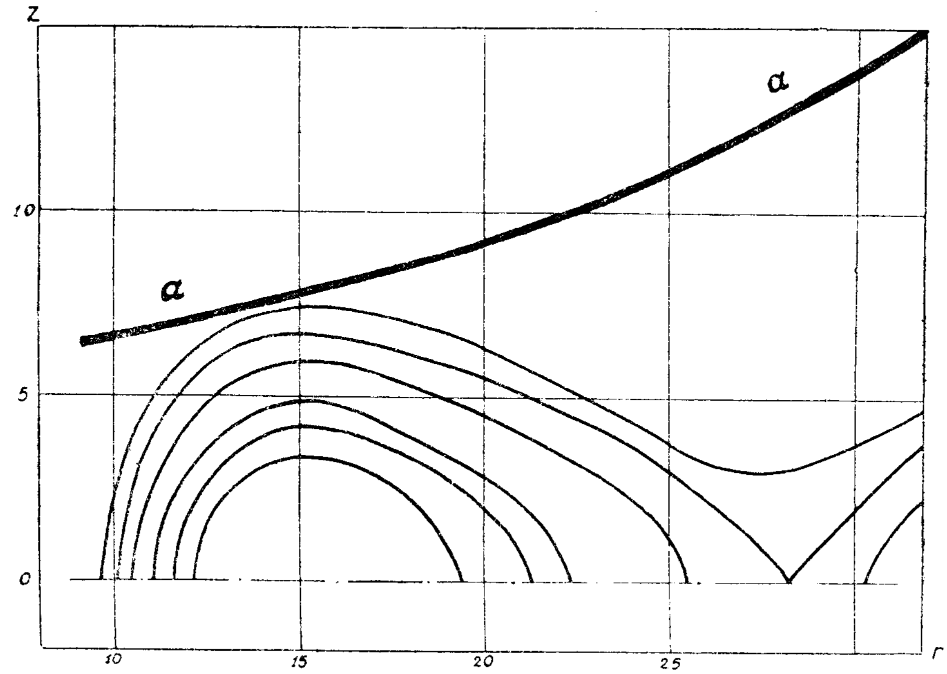

Рис. 4

Для эквипотенциальной поверхности, которой, в частности, можно считать и поверхность полюса, имеем

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}\partial r + \frac{\partial V}{\partial z}\partial z = 0. \tag{27}$$

Отсюда, если воспользоваться для H_r и H_z выражениями (6) и (7):

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\dfrac{\partial V_м}{\partial z}}{\dfrac{2V_м}{r} + \dfrac{\partial V_м}{\partial r}}. \tag{28}$$

По этому уравнению построены профили полюсов для рассматриваемого случая (кривые $a - a$ на рис. 2 и 4).

Такие профили будут у бесконечных по радиусу полюсов. Конечные размеры полюсов заставляют по краю полюсов делать выступы, восстанавливающие с той или иной точностью поле, рассчитанное для бесконечных по радиусу полюсов. Форму и размеры этих выступов легко получить на специальной модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. A. Rajichman and W. H. Cherry, Jour. Frankl. Inst., 243, 261—285 (1947).
2. Родимов Б. Н. О механизме захвата электронов в ускорение в бетатроне, I и II. Известия ТПИ, т. 87, 1957.