

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В БЕТАТРОНЕ

П. А. ЧЕРДАНЦЕВ

(Представлено научным семинаром физико-технического факультета)

Для описания движения одиночного электрона в цилиндрически симметричном поле бетатрона используется потенциальная функция

$$V_{mc} = \frac{e}{2mc^2} \left( A(r, z) + \frac{C}{r^2} \right)^2, \quad (1)$$

получаемая из уравнений движения электрона [1, 2]. Здесь  $m$ —масса покоя электрона,  $C$ —постоянная, определяющая начальные условия электрона. Из условия минимума  $V_{mc}$  в некоторой точке  $(R_c, Z)$  постоянная

$C = R_c^2 \left( \frac{\partial A}{\partial r} \right)_{R_c}$ . Радиус  $R_c$  является равновесным радиусом для электронов с данным  $C$ . Вектор-потенциал  $A(r, z)$  удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 A - \frac{A}{r^2} = 0, \quad (2)$$

причем  $A$  совпадает с составляющей  $A_\phi$ , а две другие составляющие в силу цилиндрической симметрии поля равны нулю. Связь между вектор-потенциалом  $\vec{A}$  и напряженностью магнитного поля  $\vec{H}$

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$$

позволяет написать

$$H_z = \frac{2A}{r},$$

где  $\bar{H}_z = \frac{2}{r^2} \int_0^r H_z r dr$  — среднее значение составляющей напряженности магнитного поля  $H_z$  в круге радиуса  $r$ .

Изучение фокусирующих свойств магнитного поля с помощью потенциальной функции (1) приводит к тому, что  $H_z$  должно удовлетворять следующим неравенствам:

$$0 < -\frac{r}{H_z} \frac{\partial H_z}{\partial r} < 1. \quad (3)$$

Величина  $-\frac{r}{H_z} \frac{\partial H_z}{\partial r}$  обычно обозначается через  $n$ . Одиночный электрон с данным  $C$  ( $C$ —электрон) в области фокусирующих сил будет совершать колебания вдоль  $r$  около положения равновесия  $R_c$  и вдоль оси  $z$  относительно плоскости симметрии  $z = 0$ .

Если же в области фокусирующих сил имеется большое число движущихся электронов, то коллективное взаимодействие их между собой существенным образом меняет характер движения каждого из электронов. Магнитное поле с данными характеристиками может удержать в области фокусирующих сил вполне определенный заряд. В работах [2, 3] делается предположение об образовании равновесного пучка в области фокусирующих сил. Плотность заряда определяется уравнением Пуассона

$$\nabla^2 V_e = -4\pi\rho,$$

где  $V_e$  — потенциал электрического заряда,  $\rho$  — плотность заряда. Причем потенциал  $V_e$  равен магнитному потенциалу  $V_{mc}$ , то есть

$$V_e = +V_{mc}. \quad (4)$$

Таким образом, потенциал  $V_{mc}$  позволяет найти плотность  $\rho$ . Так просто вычисляется плотность заряда, если в области фокусирующих сил имеются электроны только с одним  $C$ .

Однако этот случай является нереальным. Каким бы способом ни вводили электроны, обязательно вводится определенный набор  $C$ .

Для вычисления плотности равновесного заряда  $\rho$  с любым набором  $C$  можно вместо  $V_{mc}$  ввести так называемый эффективный магнитный потенциал  $V_{эфф}$ . Вместо условия (4) теперь появится условие

$$V_e = +V_{эфф},$$

а плотность заряда будет определяться аналогичным предыдущему способом:

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 V_{эфф}. \quad (5)$$

Для нахождения  $\rho$  и исследования устойчивости пучка необходимо вычислить  $V_{эфф}$ .

В каждой точке равновесного пучка фокусирующая сила со стороны магнитного поля  $\bar{F}_m$  равна дефокусирующей силе со стороны электрического заряда пучка  $\bar{F}_e$ . Фокусирующая сила определяется постоянной  $C$ , которой обладает электрон.

Если имеется набор электронов с разными  $C$ , то каждому  $C$  соответствует своя функция  $V_{mc}(r, z)$ . При отсутствии взаимодействия электроны совершали бы колебания около положений равновесия  $R_c$ , определяемых минимумами функций  $V_{mc}$ . Если же взять реальный случай, то электростатическое взаимодействие электронов сместит положения равновесия  $R_c$  в некоторые точки с координатами  $r_c$ . Причем смещение  $x_c = r_c - R_c$ , очевидно, будет тем больше, чем дальше находилось  $R_c$  от центра пучка. Если зафиксировать положение центра пучка, то  $x_c$  будет определяться значением  $R_c$ , или, что то же, значением  $C$ .

Выберем за основную центральную орбиту с радиусом  $R_0$  орбиту для электронов с  $C = 0$ . Введем систему координат с центром в точке  $(R_0, z = 0)$ , с осями  $x_0, z$ . Тогда смещение  $x_c = r_c - R_c$  будет соответствовать координате  $x_0 = r - R_0$ , и мы можем выразить связь между  $x_c$  и  $x_0$  следующим образом:

$$x_c = f(x_0, z).$$

Здесь  $f(x_0, z)$  — пока неизвестная функция.

Сила  $F_e$  является функцией  $x_0$  и  $z$ , а  $F_{mc}$  — функцией  $x_c$  и  $z$ , но  $F_{mc}$  следует брать в тех точках, где  $F_e = -F_{mc}$ , т. е. в точках  $x_c = f(x_0, z)$ . Этот факт мы можем записать следующим образом для составляющих сил вдоль  $x_0$  и  $z$ :

$$F_{ex_0} = (-F_{mcx})_{x_c = f(x_0, z)},$$

$$F_{ez} = (-F_{mcz})_{x_c = f(x_0, z)}.$$

Каждая из этих сил определяется соответствующим потенциалом:  $F_e$  — электрическим  $V_e$ , а  $(F_{mc})_{x_c = f(x_0, z)}$  — эффективным  $V_{эфф}$ . Можно написать, что

$$\frac{\partial V_e}{\partial x_0} = \left( + \frac{\partial V_{mc}}{\partial x_c} \right)_{x_c = f(x_0, z)} = + \frac{\partial V_{эфф}}{\partial x_0},$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial z} = \left( + \frac{\partial V_{mc}}{\partial z} \right)_{x_c = f(x_0, z)} = + \frac{\partial V_{эфф}}{\partial z}.$$

Правые равенства дают уравнения для  $V_{эфф}$ .

$$\frac{\partial V_{эфф}}{\partial x_0} = \left( \frac{\partial V_{mc}}{\partial x_c} \right)_{x_c = f(x_0, z)},$$

$$\frac{\partial V_{эфф}}{\partial z} = \left( \frac{\partial V_{mc}}{\partial z} \right)_{x_c = f(x_0, z)}.$$

Вместо  $V_{mc}$  можно подставить его явное выражение через  $A$  и  $C$ , причем  $A(r, z)$  заранее зависит только от  $x_0$  и  $z$ . Постоянная  $C$  определяется радиусом  $R_c$ .  $R_c$  можно выразить через  $x_0$  следующим образом:

$$R_c = R_0 + x_0 - x_c = R_0 + x_0 - f(x_0, z).$$

Итак,  $C$  окажется функцией  $x_0$  и  $z$ , т. е. будет показывать распределение электронов данных  $C$  в пространстве.

Уравнения для  $V_{эфф}$  примут вид:

$$\frac{\partial V_{эфф}}{\partial x_0} = \frac{e}{mc^2} \left[ \left( A + \frac{C}{r} \right) \left( \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{C}{r^2} \right) \right]_{x_c = f(x_0, z)}, \quad (6a)$$

$$\frac{\partial V_{эфф}}{\partial z} = \frac{e}{mc^2} \left[ \left( A + \frac{C}{r} \right) \frac{\partial A}{\partial z} \right]_{x_c = f(x_0, z)}. \quad (6b)$$

Разделив одно уравнение на другое, получим

$$\frac{\partial V_{эфф}}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial V_{эфф}}{\partial z} \left( \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{C_{x_c = f(x_0, z)}}{r^2} \right) = 0. \quad (7)$$

Решение этого уравнения дает  $V_{эфф}$ .

$V_{эфф}$  зависит от внешнего поля, задаваемого вектором-потенциалом  $A(r, z)$ . Можно показать, что решение уравнения (2) записывается в виде

$$A = A_0 \left\{ 1 + (1 - n_0) \frac{x_0^2}{2R_0^2} + \frac{n_0}{2R_0^2} z^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{n_0^2 + 2n_0 - 3 - n'_0 R_0}{3!} \frac{x_0^3}{R_0^3} - (n_0^2 + n_0 - n'_0 R_0) \frac{z^2 x_0}{R_0^3} \right\}. \quad (8)$$

где  $A_0$ ,  $n_0$  и  $n'_0$  — значения  $A$ ,  $n$  и  $\frac{\partial n}{\partial r}$  на радиусе  $R_0$  при  $z=0$ .

$$\text{Найдем } C_{x_c = f(x_0, z)} = \left[ R_c^2 \left( \frac{\partial A}{\partial r} \right)_{R_c} \right]_{x_c = f(x_0, z)}.$$

Выразим  $R_c$  через  $\frac{x_0 - x_c}{R_0}$ , а вместо  $x_c$  возьмем разложение функции  $f(x_0, z)$  в ряд по степеням  $x_0, z$

$$f(x_0, z) = \varphi x_0 + \psi \frac{x_0^2}{R_0} + \eta \frac{z^2}{R_0^2},$$

где  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $\eta$  — безразмерные постоянные. После несложных преобразований  $C$  примет вид:

$$C = A_0 R_0 \left\{ (1 - n_0) (1 - \varphi) \delta_0 - \left[ (1 - n_0) \psi - \frac{n_0^2 + 2n_0 - 1 - n'_0 R_0}{2} (1 - \varphi)^2 \right] \delta_0^2 - \left[ (1 - n_0) \eta + \frac{n_0^2 + n_0 - n'_0 R_0}{2} \right] \frac{z^2}{R_0^2} \right\}.$$

Здесь  $\delta_0 = \frac{x_0}{R_0}$ .

Подстановка  $C$  в уравнение (7) приводит к следующему:

$$\frac{\partial V_{эфф}}{\partial x_0} \left[ n_0 - (n_0^2 + 2n_0 - n'_0 R_0) \delta_0 \right] \frac{z}{R_0} - \frac{\partial V_{эфф}}{\partial z} \left\{ (1 - n_0) \varphi \delta_0 + a \delta_0^2 + (1 - n_0) \eta \frac{z^2}{R_0^2} \right\} = 0, \quad (10)$$

$$\text{где } a = \frac{n_0^2 + 2n_0 - 3 - n'_0 R_0}{2} + \frac{n_0^2 + 6n_0 - 7 - n'_0 R_0}{2} (1 - \varphi)^2 + (1 - n_0) (\psi + 2(1 - \varphi)).$$

Это уравнение в частных производных первого порядка сводится к решению уравнения

$$\frac{d\delta_0}{n_0 - (n_0^2 + n_0 - n'_0 R_0) \delta_0} + \frac{\frac{z}{R_0^2} dz}{(1 - n_0) \varphi \delta_0 + (1 - n_0) \eta \frac{z^2}{R_0^2} + a \delta_0^2} = 0.$$

Введя  $y = \frac{z^2}{2R_0^2}$ , получим после упрощений

$$\frac{dy}{d\delta_0} + \frac{(1 - n_0) \eta}{n_0 - (n_0^2 + n_0 - n'_0 R_0) \delta_0} y = - \frac{(1 - n_0) \varphi \delta_0 + a \delta_0^2}{n_0^2 - (n_0^2 + n_0 - n'_0 R_0) \delta_0}. \quad (11)$$

Решение последнего уравнения можно записать в виде:

$$y = e^{-F(\delta_0)} \left( C_1 - \int \frac{(1-n_0)\varphi\delta_0 + a\delta_0^2}{n_0^2 - (n_0^2 + n_0 - n'_0 R_0)\delta_0} e^{F(\delta_0)} d\delta_0 \right), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{где } F(\delta_0) &= - \int \frac{(1-n_0)\eta}{n_0^2 - (n_0^2 + n_0 - n'_0 R_0)\delta_0} d\delta_0 = \\ &= \ln [n_0 - (n_0^2 + n_0 - n'_0 R_0)\delta_0] - \frac{(1-n_0)\eta}{n_0^2 + n_0 - n'_0 R_0}, \end{aligned}$$

$C_1$  — постоянная интегрирования.

Окончательно интеграл уравнения (10) получится в виде

$$\begin{aligned} u(x_0, z) &= \frac{n_0 z^2}{R_0^2} + (1-n_0)\varphi\delta_0^2 + \frac{(1-n_0)\eta}{R_0^2} z^2 \delta_0 + \\ &+ [a + (1-n_0)\varphi(1+n_0^2 - n'_0 R_0)] \frac{\delta_0^3}{3} = \text{const}. \end{aligned} \quad (13)$$

Решение уравнения (10) является произвольной функцией  $u$ , т. е.

$$V_{\varphi\psi} = \Phi(u(x_0, z)).$$

$V_{\varphi\psi}$  должно иметь минимум при  $z=0, \delta_0=0$ , т. е. при  $u(0,0)=0$ . Исходя из этого, разложим  $\Phi(u)$  в ряд по  $u$  и ограничимся линейным членом разложения

$$\begin{aligned} V_{\varphi\psi} &= \Phi_0 + \Phi_0' \left\{ \frac{n_0 z^2}{R_0^2} + (1-n_0)\varphi\delta_0^2 + \right. \\ &\left. + \frac{(1-n_0)\eta}{R_0^2} z^2 \delta_0 + \alpha \frac{\delta_0^3}{3} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Помимо постоянных  $\varphi, \eta, \psi$  (или  $\alpha$ ) добавились постоянные  $\Phi_0, \Phi_0'$ .  $\Phi_0'$  характеризует разлагаемую функцию. Следует отметить, что удобнее в дальнейшем определять постоянную  $\alpha$ , а не  $\psi$ .

Постоянную  $\Phi_0$  можно взять равной  $V_0$ . Остается определить 4 постоянных  $\varphi, \eta, \alpha$  и  $\Phi_0'$ , входящих в потенциал. Для определения некоторых из них воспользуемся условием (6б), в которое необходимо подставить  $S(x_0, z)$ . Подстановка дает следующие значения постоянных:

$$\Phi_0' = V_0, \quad \eta = n_0(1-\varphi) - \frac{n_0^2 + n_0 - n'_0 R_0}{(1-n_0)}. \quad (15)$$

Постоянные  $\varphi$  и  $\alpha$  найдем, задав размеры пучка. Так как пучок является равновесным, то поверхность его является эквипотенциальной поверхностью, то есть на границе

$$\begin{aligned} V_{\varphi\psi} &= V_0 \left\{ 1 + (1-n_0)\varphi\delta_0^2 + \frac{n_0 z^2}{R_0^2} + \right. \\ &\left. + (1-n_0)\eta \frac{z^2 \delta_0}{R_0^2} + \alpha \frac{\delta_0^3}{3} \right\} = \text{const} = G. \end{aligned}$$

К постоянным  $\varphi$  и  $\alpha$  добавилась еще одна,  $G$ . Зададим три точки на границе пучка координатами  $(r, 0), (r_2, 0), (R_0, z_1)$ .

При подстановке этих координат получим для уравнения граничной поверхности следующее выражение:

$$(1 - n_0) \varphi \delta_0^2 + \alpha \frac{\delta_0^3}{3} + \frac{n_0}{R_0^2} z^2 + \frac{(1 - n_0)}{R_0^2} \eta z^2 \delta_0 + \frac{n_0}{R_0^2} z_1^2. \quad (16)$$

Кроме того, получаем

$$\varphi = \frac{n_0 z_1^2}{(1 - n_0) R_0^2} \frac{\delta_1^2 + \delta_1 \delta_2 + \delta_2^2}{\delta_1^2 \delta_2^2}, \quad (17)$$

$$z = -3 \frac{n_0 z_1^2}{R_0^2} \frac{\delta_1 + \delta_2}{\delta_1^2 \delta_2^2}. \quad (18)$$

Исследуем теперь устойчивость равновесного электронного пучка. Электрон будет находиться в состоянии устойчивого равновесия, если при выведении его из положения равновесия он снова возвратится к нему и будет совершать колебания около положения равновесия. В точке равновесия на электрон действуют две силы  $\bar{F}_e$  и  $\bar{F}_{mc}$ , удовлетворяющие условию  $\bar{F}_e = -\bar{F}_{mc}$ . Эти силы имеют различный вид и равны только в одной точке.

Для того, чтобы устойчивое равновесие было во всей области фокусирующих сил или в части этой области, необходимо, чтобы кривизна кривой  $V_{mc}$  в точке равновесия была больше кривизны кривой  $V_{эфф}$  в той же точке, т. е.  $K_{mc} > K_e$ , где  $K$  — кривизна.

Последнее неравенство можно переписать в виде

$$\frac{\left[ \frac{\partial^2 V_{mc}}{\partial x_c^2} \right]_{x_c = f(x_0, z)}}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial V_{mc}}{\partial x_c} \right)_{x_c = f(x_0, z)}^2 \right]^{\frac{3}{2}}} > \frac{\frac{\partial^2 V_{эфф}}{\partial x_0^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial V_{эфф}}{\partial x_0} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Но так как  $\left( \frac{\partial V_{mc}}{\partial x_c} \right)_{x_c = f(x_0, z)} = \frac{\partial V_{эфф}}{\partial x_0}$ , то

$$\left[ \frac{\partial^2 V_{mc}}{\partial x_c^2} \right]_{x_c = f(x_0, z)} > \frac{\partial^2 V_{эфф}}{\partial x_0^2}.$$

Это и есть условие устойчивого равновесия. Если произвести все операции в последнем выражении, то придем к следующему условию:

$$(1 - n_0)(1 - \varphi) + |n_0^2 + 2n_0 - 3 - n_0' R_0 + (3 - n_0)(1 - n_0)(1 - \varphi) - \alpha| \delta_0 > 0. \quad (19)$$

Условие выполняется для некоторых  $\delta_0$ , расположенных внутри пучка, то есть  $\delta_2 < \delta_0 < \delta_1$ . За крайнее значение  $\delta_0$  можно взять  $\delta_1$ . Таким образом, условие равновесия связывает следующие величины  $n_0$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  и  $z_1$ . В частности, если  $\delta_1 = -\delta_2$ , то при заданном  $n_0$  получаем из условия равновесия допустимые размеры пучка (табл. 1).

Таблица I

$n_0 = 0,5$			$n_0 = 0,75$		
$\frac{z_1}{x_1}$	$\delta_1 = \frac{x_1}{R_0}$	$\frac{z_1}{R_0}$	$\frac{z_1}{x_1}$	$\delta_1 = \frac{x_1}{R_0}$	$\frac{z_{10}}{R_0}$
0,5	0,46	0,23	0,37	0,3	0,05
0,6	0,33	0,2	0,44	0,2	0,09
0,7	0,23	0,16	0,45	0,15	0,10

Исследование  $V_{эфф}$  и условия устойчивости позволяют сделать целый ряд выводов:

а) в равновесном пучке с одним  $C$  каждый электрон является как бы „свободным“. На него не действуют силы (они уравновешаны). Отсюда вытекает возможность любых движений из-за малых внешних возмущений (например, рассеяние на остаточном газе), не нарушающих равновесный пучок в целом;

б) если равновесный пучок составлен из электронов различных  $C$ , то в этом случае электроны с данным  $C$  совершают колебания около  $r_c$ . Возможности произвольных движений ограничены. В этом смысле набор  $C$  в пучке является более выгодным;

в) существование равновесного пучка дает возможность захвата определенной доли электронов с данным распределением по  $C$  из числа вводимых. Состав равновесного пучка по  $C$  будет отличаться от состава пучка, исходящего из пушки;

г) зная  $V_{эфф}$ , можно рассчитать равновесный заряд, который может удержать поле с данными характеристиками;

д) условие устойчивости позволяет определить размеры области, в которой может существовать равновесный заряд (при заданном  $R_0$ ). С увеличением  $n_0$  размеры пучка уменьшаются. Для  $n_0 = 0,75$  они оказались такими, какие выбираются у обычных бетатронов, исходя из экономических и инженерных соображений.

В статье рассматривается нерелятивистский случай, и результаты можно считать справедливыми в начале процесса ускорения электронов в бетатроне.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Rajchman J. A. and Cherry W. H., Journ. Frankl. Inst., 243, 261—285, 1947.
2. Родимов Б. Н. Закономерности магнитного поля бетатрона. Известия ТПИ, т. 87, 1957.
3. Родимов Б. Н. О механизме захвата электронов в ускорение в бетатроне. Известия ТПИ, т. 87, 1957.