ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 87 1957 г.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ РАВНОВЕСНОГО ЗАРЯДА В БЕТАТРОНЕ

П. А. ЧЕРДАНЦЕВ

(Представлено научным семинаром физико-технического факультета)

Будем считать магнитное поле бетатрона цилиндрически симметричным. Тогда его можно описать вектором-потенциалом с одной составляющей $A_\Theta = A(r, z)$. Для составления уравнений движения возьмем релятивистскую функцию Лагранжа в виде

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{e}{c} \bar{A}\, v .$$

Уравнения движения примут вид:

$$\frac{d}{dt}(m \dot{r}) = m r \dot{\Theta}^2 - \frac{e}{c} \dot{\Theta} \frac{\partial r A}{\partial r} . \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}(m \dot{z}) = -\frac{e}{c} \dot{\Theta} \frac{\partial r A}{\partial z} , \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m r^2 \dot{\Theta} - \frac{e}{c} A r \right) = 0. \tag{3}$$

Здесь

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} , \quad v^2 = r^2 \dot{\Theta}^2 + \dot{r}^2 + \dot{z}^2 .$$

Из уравнения (3) после интегрирования получаем

$$m r^2 \dot{\Theta} = \frac{e}{c} (Ar + C), \tag{4}$$

где C — постоянная интегрирования. Правые части уравнений (1) и (2) можно выразить через $(Ar + C)$, воспользовавшись соотношением (4). Тогда система уравнений запишется следующим образом:

$$\frac{d}{dt}(m \dot{r}) = -e \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{e}{2 m_0 c^2} \left(\frac{Ar + C}{r} \right)^2 = -e \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\partial V_{мс}}{\partial r} , \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{z}) = e\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{e}{2m_0c^2}\left(A+\frac{C}{r}\right)^2 =$$

$$= -e\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{\partial V_{мс}}{\partial z}. \tag{6}$$

Здесь $V_{мс} = \frac{e}{2m_0c^2}\left(A+\frac{C}{r}\right)^2$ является нерелятивистской потенциальной функцией [1].

Из уравнений (5) и (6) видно, что теперь сила определяется не потенциалом $V_{мс}$, а некоторым, другим релятивистским потенциалом $V_{рел}$, подчиняющимся уравнениям

$$\frac{\partial V_{рел}}{\partial r} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{\partial V_{мс}}{\partial r}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial V_{рел}}{\partial z} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{\partial V_{мс}}{\partial z}. \tag{8}$$

Свяжем теперь скорость v с функцией $V_{мс}$. Заметим, что при релятивистских скоростях v почти равняется составляющей $v_\Theta = r\dot{\Theta}$.

Из уравнения (4) имеем

$$v_\Theta = \frac{e}{c}\left(A+\frac{C}{r}\right)\frac{\sqrt{1-\frac{v_\Theta^2}{c^2}}}{m_0} \tag{9}$$

или, выражая $\frac{v_\Theta}{c}$ через $\left(A+\frac{C}{r}\right)$ или через $V_{мс}$, получаем для $\sqrt{1-\frac{v_\Theta^2}{c^2}}$ следующее выражение:

$$\sqrt{1-\frac{v_\Theta^2}{c^2}} = \frac{1}{\left(1+\frac{2eV_{мс}}{m_0c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{10}$$

Подставляя вместо $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ почти равный ему корень $\sqrt{1-\frac{v_\Theta^2}{c^2}}$, получим

$$\frac{\partial V_{рел}}{\partial r} = \left(1+\frac{2eV_{мс}}{m_0c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial V_{мс}}{\partial r},$$

$$\frac{\partial V_{рел}}{\partial z} = \left(1+\frac{2eV_{мс}}{m_0c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial V_{мс}}{\partial z}.$$

Проводя интегрирование уравнений, приходим к следующему виду релятивистского магнитного потенциала:

$$V_{рел} = \frac{m_0c^2}{e}\left(1+\frac{2eV_{мс}}{m_0c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

или

$$V_{рел} = \frac{m_0c^2}{e}\left[1+\frac{e^2}{m_0^2c^4}\left(A+\frac{C}{r}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

Воспользовавшись потенциалом $V_{рел}$, можно вычислить плотность равновесного заряда в области фокусирующих сил бетатрона, если пучок составлен из электронов одного C. Из уравнения Пуассона получаем

$$\rho_{рел} = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2 V_{рел}. \tag{13}$$

После выполнения операции ∇^2 имеем

$$\rho_{рел} = \frac{\rho_{нр}}{\left(1+\frac{2eV_{мс}}{m_0c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} +$$

$$+\frac{e}{4\pi m_0 c^2}\left(1+\frac{2eV_{мс}}{m_0c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left\{\left(\frac{\partial V_{мс}}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial V_{мс}}{\partial z}\right)^2\right\}, \tag{14}$$

где $\rho_{нр}$ — плотность, вычисляемая по $V_{мс}$.

Если квадраты производных заменить равной им величиной, определенной из уравнения для $V_{мс}$ [2], то получим другую форму:

$$\rho_{рел} = \left\{\rho_{нр} - \frac{eV^2_{мс}}{\pi m_0 c^2 r^2}\right\}\left(1+\frac{2eV_{мс}}{m_0c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}. \tag{15}$$

В частном случае $v_\Theta \approx c$ (ультрарелятивистский случай) $\frac{eV_{мс}}{m_0c^2} \gg 1$, $\rho_{нр}$ по порядку величины совпадает с $\frac{V_{мс}}{r^2}$ и, следовательно, мало по сравнению с $\frac{eV^2_{мс}}{\pi m_0 c^2 r^2}$, поэтому

$$\rho_{рел} \approx -\left(\frac{m_0c^2}{2e}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{V^{\frac{1}{2}}_{мс}}{2\pi r^2}. \tag{16}$$

Если равновесный пучок составлен из электронов различных C, то в этом случае для вычисления $\rho_{рел}$ необходимо найти релятивистский эффективный потенциал $V^{(p)}_{эфф}$. Метод нахождения $V^{(p)}_{эфф}$ тот же, что и в статье [1].

Составим уравнения для $V^{(p)}_{эфф}$:

$$\frac{\partial V^{(p)}_{эфф}}{\partial r} = \left[\frac{\partial V_{рел}}{\partial r}\right]_{x_c = f(x_0,\, z)}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial V^{(p)}_{эфф}}{\partial z} = \left[\frac{\partial V_{рел}}{\partial z}\right]_{x_c = f(x_0,\, z)}. \tag{18}$$

Деление одного уравнения на другое и сокращение одинаковых множителей приводит к уравнению (7) статьи [1], т. е. к уравнению

$$\frac{\partial V^{(p)}_{эфф}}{\partial r}\cdot\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial V^{(p)}_{эфф}}{\partial z}\left(\frac{\partial A}{\partial r} - \frac{C_{x_c = f(x_0,\, z)}}{r^2}\right) = 0. \tag{19}$$

Решение уравнения получается в виде

$$V^{(p)}_{эфф} = \Phi_p\,(u(x_0, z)),$$

где $u(x_0, z)$ имеет тот же вид, что и функция (13) статьи [1].

Представим $V^{(p)}_{эфф}$ в виде ряда по степеням $u(x_0, z)$

$$V^{(p)}_{эфф} = \Phi_{p0} + \Phi'_{p0}\, u$$

и определим величину Φ_{p_0} подстановкой $V^{(p)}_{эфф}$ в (18). В результате получаем

$$\Phi'_{p0} = \frac{V_0}{\left(1 + \frac{2eV_0}{m_0 c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Все остальные коэффициенты имеют прежний вид. Φ_0 можно взять равным Φ'_{p0}. Итак, окончательно имеем:

$$V^{(p)}_{эфф} = \frac{V_0}{\left(1 + \frac{2eV_0}{m_0 c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \left\{ 1 + \frac{n_0 z^2}{R^2_0} + \right.$$

$$\left. + (1 - n_0)\varphi\, \delta_0^2 + \alpha\, \frac{\delta_0^3}{3} + \frac{(1-n_0)}{R^3_0}\, \eta\, z^2 \delta_0 \right\}. \tag{20}$$

$V^{(p)}_{эфф}$ можно выразить через нерелятивистское выражение $V_{эфф}$.

$$V^{(p)}_{эфф} = \frac{V_{эфф}}{\left(1 + \frac{2eV_0}{m_0 c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{21}$$

Теперь плотность заряда равновесного пучка может быть найдена по формуле

$$\rho_{рел} = -\frac{1}{4\pi}\, \nabla^2 V^{(p)}_{эфф} = \frac{\rho_{нр}}{\left(1 + \frac{2eV_0}{m_0 c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Таким образом, релятивистская плотность $\rho_{рел}$ в $\left(1 + \frac{2eV^0}{m_0 c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ раз меньше плотности $\rho_{нр}$, вычисляемой по нерелятивистской формуле (исходя из $V_{эфф}$).

Вопрос об устойчивости релятивистского пучка решается таким же путем, как в статье [1]. Условие равновесия имеет такой же вид, как условие устойчивости (19) статьи [1].

Вычисления были проведены с использованием разложения вектора-потенциала до величин третьего порядка малости, что является вполне достаточным. При необходимости разложение можно продолжить, и это приведет к более громоздким вычислениям, почти не меняя основных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черданцев П. А. Об устойчивости равновесного электронного пучка в бетатроне. Известия ТПИ, т. 87, 1957.
2. Родимов Б. Н. Закономерности магнитного поля бетатрона. Известия ТПИ, т. 87, 1957.