ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА
Том 87 1957 г.

УЧЕТ СОБСТВЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ РАВНОВЕСНОГО ПУЧКА В БЕТАТРОНЕ

П. А. ЧЕРДАНЦЕВ

(Представлено научным семинаром физико-технического факультета)

Магнитное поле бетатрона без учета движущегося пучка электронов описывается уравнениями

$$\begin{cases} rot\, \overline{H}=0, & (1\ а) \\ div\, \overline{H}=0. & (1\ б) \end{cases}$$

При этом предполагается, что изменение поля со временем является настолько медленным, что можно пользоваться так называемым адиабатическим приближением и считать $\frac{\partial \overline{H}}{\partial t}=0.$

При наличии электронного пучка, особенно для больших токов и при больших скоростях электронов, необходимо учитывать магнитное поле этого пучка. Уравнения поля в этом случае можно записать в виде:

$$\begin{cases} rot\, \overline{H}=\frac{4\pi}{c}\,\overline{j}, & (2\ а) \\ div\, \overline{E}=4\pi\rho, & (2\ б) \\ rot\, \overline{E}=0, & (2\ в) \\ div\, \overline{H}=0. & (2\ г) \end{cases}$$

Вторая пара уравнений удовлетворяется автоматически. Исходя из первой пары, получим уравнение для потенциальной функции V_p [1] с учетом собственного магнитного поля равновесного электронного пучка.

Для цилиндрически симметричного поля бетатрона плотность равновесного тока $\overline{j}$ имеет одну составляющую j_θ, неравную нулю, причем

$$j_\theta=\rho\, v_\theta.$$

Подставим вместо ρ и v_Θ их выражения через V_p [1], а именно,

$$\rho = \frac{1}{4\pi} div\,E = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2 V_p,$$

$$\frac{v_\Theta}{c} = \frac{\sqrt{\left(\frac{eV_p}{m_0c^2}\right)^2 - 1}}{\frac{eV_p}{m_0c^2}}.$$

Тогда

$$\frac{j_\Theta}{c} = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2 V_p \frac{\sqrt{\left(\frac{eV_p}{m_0c^2}\right)^2 - 1}}{\frac{eV_p}{m_0c^2}}.$$

Введя вектор-потенциал A в уравнение (2а), получим

$$\nabla^2 A - \frac{A}{r^2} = \nabla^2 V_p \frac{\sqrt{\left(\frac{eV_p}{m_0c^2}\right)^2 - 1}}{\frac{eV_p}{m_0c^2}}.$$

Переходя в левой части уравнения от A к V_p по формуле

$$A = \frac{m_0c^2}{e}\sqrt{\left(\frac{eV_p}{m_0c^2}\right)^2 - 1},$$

получим после введения безразмерной величины

$$U = \frac{eV_p}{m_0c^2} = \frac{mc^2}{m_0c^2} = \frac{E}{E_0} \tag{3}$$

следующее уравнение:

$$\frac{\nabla^2 U}{U} - \frac{1}{U^2-1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] - \frac{U^2-1}{r^2} = 0, \tag{4}$$

где $E = mc^2$, $E_0 = m_0c^2$.

Уравнение (4) дает возможность найти потенциальную функцию $V_p = \frac{m_0c^2}{e}U$ с учетом магнитного взаимодействия электронов в пучке. Это взаимодействие увеличивает фокусирующие силы, изменяя плотность заряда в пучке. Функция V_p характеризует распределение электронов в пространстве и позволяет найти плотность заряда по формуле

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2 V_p = -\frac{m_0c^2}{4\pi e}\nabla^2 U. \tag{5}$$

Оценим влияние магнитного взаимодействия на потенциальную функцию магнитного поля. Для этого представим V_p в виде суммы

$$V_p = V'_p + V''_p,$$

где V_p' — потенциальная функция свободного от заряда поля,

V_p'' — потенциальная функция магнитного поля пучка.

V_p' возьмем с точностью до квадратов отклонений от равновесного радиуса R_o, т. е.

$$V'_p = V_o\left(1 + \frac{m_o c^2 V_{ом}}{eV^2_o}(1-n_o)\frac{x^2}{R^2_o} + \frac{m_o c^2}{eV^2_o} n_o V_{ом}\frac{z^2}{R_o^2}\right),$$

где $V_{ом}$ — значение нерелятивистской потенциальной функции при $r=R_o$, $z=0$ [2], а $V_o = \frac{m_o c^2}{e}\sqrt{1+\frac{2eV_{ом}}{m_o c^2}}$.

V_p'' запишем в виде ряда с неопределенными коэффициентами, т. е.

$$V_p'' = V_o\left(k\frac{x^2}{R^2_o} + k'\frac{z^2}{R^2_o}\right).$$

В последнем выражении отсутствует нулевой член. Это можно оправдать дем, что в центре пучка напряженность магнитного поля пучка электронов равна нулю. Таким образом,

$$V_p = V_o\left[1 + \left(\frac{m_o c^2 V_{ом}}{eV_o^2}(1-n_o)+k\right)\frac{x^2}{R_o^2} + \left(\frac{m_o c^2 V_{ом}}{eV^2_o}n_o + k'\right)\frac{z^2}{R^2_o}\right]. \quad (6)$$

Подставим V_p в уравнение (4). Тогда соотношение между коэффициентами k и k' получим в виде

$$k + k' = \frac{1}{2}\left(\frac{eV_o}{m_o c^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\,\frac{m_o c^2 V_{ом}}{eV_o^2}.$$

Если сечение пучка является достаточно симметричным, что получается при $n_o \approx 0{,}5$ и при большом R_o, то $k \approx k'$. В этом случае

$$2k = \frac{1}{2}\left(\frac{eV^2_o}{m_o c^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\,\frac{m_o c^2 V_{ом}}{eV_o^2}.$$

Теперь V_p примет вид:

$$V_p = V_o\left\{1 + \left[\frac{m_o c^2 V_{ом}}{2eV_o^2}(1-2n_o) + \frac{1}{4}\left(\frac{eV_o}{m_o c^2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]\frac{x^2}{R^2_o} + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{m_o c^2 V_{ом}}{eV_o^2}n_o + \frac{1}{4}\left(\frac{eV_o}{m_o c^2}\right)^2 - \frac{1}{4}\,\frac{m_o c^2 V_{ом}}{2eV_o^2}\right]\frac{z^2}{R_o^2}\right\}. \quad (7)$$

Таким образом, V_p с учетом собственного магнитного поля пучка дает фокусирующую силу, которая больше силы без собственного поля в f_r и f_z раз для радиального и z — направления соответственно, где

$$f_r = 1 + \frac{keV_o^2}{m_o c^2 V_{ом}(1-n_o)}, \qquad f_z = 1 + \frac{keV_o^2}{m_o c^2 V_{ом} n_o}.$$

Оценим плотность заряда, исходя из уравнения (4) для U.

Так как $\rho = -\frac{1}{4\pi}\Delta^2 V_p$, а $V_p = \frac{m_o c^2}{e}U$, то

$$\rho = -\frac{m_o c^2}{4\pi e}\nabla^2 U.$$

Но из уравнения (4)

$$\nabla^2 U = -\frac{U}{U^2-1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{U^2-1}{r^2}\,U.$$

В центре пучка $\dfrac{\partial U}{\partial r}=\dfrac{\partial U}{\partial z}=0$, поэтому

$$\nabla^2 U_0 = \frac{U_0^2-1}{R_0^2}\,U_0.$$

Здесь U_0 значение U в точке $r=R_0$, $z=0$.

Подстановка $\nabla^2 U_0$ в уравнение для ρ дает плотность заряда в центре равновесного пучка. Имеем

$$\rho_0 = -\frac{m_0c^2}{4\pi e R_0^2}\,(U_0^2-1)\,U_0^2. \tag{8}$$

Или, учитывая (3), получим

$$\rho_0 = -\frac{m_0c^2}{4\pi e R_0^2}\left[\left(\frac{E}{E_0}\right)^2-1\right]\cdot\frac{E}{E_0}. \tag{9}$$

При ультрарелятивистских скоростях $E \gg E_0$, и мы получаем из (9)

$$\rho_{\text{орел}} = -\frac{m_0c^2}{4\pi e R_0^2}\cdot\left(\frac{E}{E_0}\right)^3. \tag{10}$$

Для нерелятивистских скоростей $E=E_0+E_{\text{кл}}=E_0+\dfrac{m_0v^2}{2}$ и

$$\rho_{\text{окл}} = -\frac{V_{\text{ом}}}{2\pi e R_0^2}\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{v^2}{c^2}\right). \tag{11}$$

Сравним вычисленные выше плотности заряда с учетом собственного магнитного поля с соответствующими плотностями, найденными без учета его. Уравнение (1а) для свободного от заряда поля дает возможность получить уравнение, аналогичное уравнению (4), имеющее вид:

$$U\nabla^2 U-\frac{1}{U^2-1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]-\frac{U^2-1}{r^2}=0. \tag{12}$$

Из этого уравнения получаем

$$\rho_0^{(I)} = -\frac{m_0c^2}{4\pi e R_0^2}\,\frac{U_0^2-1}{U_0} = -\frac{m_0c^2}{4\pi e R_0^2}\,\frac{\left(\frac{E}{E_0}\right)^2-1}{\frac{E}{E_0}}. \tag{13}$$

При больших скоростях

$$\rho_{\text{орел}}^{(I)} = -\frac{m_0c^2}{4\pi e R_0^2}\cdot\frac{E}{E_0}. \tag{14}$$

При малых скоростях

$$\rho_{\text{окл}}^{(I)} = -\frac{V_{\text{ом}}}{2\pi e R_0^2}\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{v^2}{c^2}\right). \tag{15}$$

Найдем разности ρ_o и $\overset{(l)}{\rho_o}$ для обоих случаев. Получаем

$$\Delta\rho_{орел} = \rho_{орел} - \rho_{орел}^{(l)} = -\frac{m_o c^2}{4\pi e R_o^2} \cdot \frac{E}{E_o}\left[\left(\frac{E}{E_o}\right)^2 - 1\right],$$

$$\Delta\rho_{окл} = \rho_{окл} - \rho_{окл}^{(l)} = -\frac{V_{ом}}{4\pi e R_o^2} \cdot \frac{v^2}{c^2}.$$

Последние разности плотностей показывают, что при релятивистских скоростях нельзя вычислять плотность равновесного заряда по формуле, не учитывающей магнитного поля пучка. В классическом же случае при $\frac{v}{c} \ll 1$ разность между $\rho_{окл}$ и $\rho_{окл}^{(l)}$ очень мала, и использование формул, не учитывающих заряда, является допустимым.

Итак, собственное магнитное поле пучка играет существенную роль при больших скоростях электронов. Плотность заряда сильно зависит от энергии электронов (как E^3). Эта зависимость может объяснить поведение максимума интенсивности излучения бетатрона при разных значениях энергии инжекции E_i. Действительно, для данного бетатрона объем, занимаемый пучком при разных E_i, можно считать постоянным. Тогда интенсивность излучения пропорциональна ρ_o, если под E понимать энергию электрона при инжекции. При малых энергиях инжекции интенсивность пучка должна быть пропорциональна E_i, а при больших—пропорциональна E_i^3.

Для более точного изучения плотности и полного заряда в магнитном поле бетатрона необходимо найти точнее решение уравнения (4), что не представляет простой задачи и является предметом дальнейшего исследования автора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черданцев П. А. Релятивистская потенциальная функция. Известия ТПИ, т. 87, 1957.

2. Черданцев П. А. Об устойчивости равновесного электронного пучка в бетатроне Известия ТПИ, т. 87, 1957.