

## К РАСЧЕТУ МАХОВИКОВ ДЛЯ МНОГОЦИЛИНДРОВЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ

(К вопросу о крутильных колебаниях валов)

НЕЧАЕВ В. К.

*Профессор, доктор технич. наук*

### I

Необходимая величина махового момента  $GD^2$  маховика для стационарного двигателя определяется, как правило, по заданной техническими условиями степени неравномерности вращения вала  $\delta_s$ . В отдельных случаях учитываются также и специфические требования в отношении выполнения условий устойчивости параллельной работы ряда двигателей на общую электросеть переменного тока.

В автотракторных двигателях степень неравномерности  $\delta_s$ , как известно, не играет решающей роли. Здесь величина  $GD^2$  маховика в основном обуславливается необходимостью накопления достаточного запаса кинетической энергии в двигателе к моменту включения сцепления, стремлением обеспечить устойчивую работу двигателя на малом газе при малых оборотах и т. д.

Но от величины  $GD^2$  маховика в значительной мере зависят частоты собственных свободных крутильных колебаний вала двигателя, а, следовательно, и все критические числа оборотов, соответствующие резкому и сильному развитию резонансных колебаний в валу. Поэтому расчет маховика, на основе указанных выше соображений, нельзя считать законченным впредь до подсчета частот собственных колебаний вала двигателя и определения по ним всего спектра критических чисел оборотов.

Некоторые из этих критических чисел оборотов могут совпасть с рабочими числами оборотов двигателя, либо оказаться недопустимо близко к последним. Особо опасно совпадение или близкое соседство рабочих скоростей двигателя с критическими скоростями низких главных порядков. В таких случаях возникает задача о разработке мероприятий по борьбе с сильными вибрациями вала двигателя.

Устранение сильных резонансных крутильных колебаний вала путем соответствующего смещения рабочих скоростей двигателя в сторону от опасных критических скоростей сравнительно редко приемлемо в стационарных двигателях и, обычно, совершенно не имеет реального смысла в автотракторных двигателях, работающих в очень широком диапазоне оборотов.

Во время проектирования силовой установки наиболее простым и эффективным методом борьбы с сильными крутильными колебаниями вала является сдвиг критических оборотов двигателя. Этот сдвиг осуществляется путем соответствующего изменения частот собственных колебаний вала за счет выбора новой величины  $GD^2$  маховика и изменения жесткости участка вала между последним цилиндром двигателя и маховиком.

Необходимые новые значения махового момента  $GD^2$ , или момента инерции массы маховика  $\Theta_1$ <sup>1)</sup> и жесткости вала между маховиком и двигателем определяются либо расчетом, напр., по методу В. П. Терских<sup>2)</sup> либо, чаще, путем проб. Но в обоих этих случаях решение поставленной задачи связано с большой затратой времени ввиду необходимости исследования целого ряда возможных вариантов.

Графический метод определения частот собственных крутильных колебаний вала двигателя, описанный автором в одной из предыдущих его статей,<sup>3)</sup> указывает пути быстрого и простого решения вопросов о сдвиге критических чисел оборотов. Этот метод дает возможность получить аналитические выражения для тех величин момента инерции  $\Theta_1$  маховика и жесткости вала между двигателем и маховиком, которые обеспечат достаточное удаление опасных критических скоростей от заданных рабочих скоростей.

Такая задача решается особенно просто в установках с одной большой маховой массой (рис. 1). Подобную схему мы имеем, как правило, всегда в автотракторных двигателях и в установках стационарных двигателей, работающих на тихоходный генератор маховичного типа, жестко связанный с двигателем.

В названной выше статье автора было показано, что частоты собственных свободных колебаний системы двигатель—маховик (рис. 1) определяются абсциссами точек пересечения кривой  $D_m = f(A)$  с прямой  $L = F(A)$  (рис. 2). Уравнение этой прямой

$$L = \frac{A}{\beta_1} - \frac{1}{\alpha_1}, \quad (1)$$

где  $A$  — основной параметр крутильных колебаний много цилиндрического двигателя

$$A = \frac{\Theta \omega^2}{c}$$

Здесь:

$\omega$  — угловая скорость колебаний (угловая частота), связанная с минутной частотой колебаний  $N$  соотношением

$$\omega = \frac{\pi N}{30} \text{сек}^{-1};$$

$\Theta$  — момент инерции приведенных маховых масс каждого цилиндра двигателя;

$c$  — жесткость участка коленчатого вала между осями каждых двух соседних цилиндров, измеряемая, наприм., в  $\text{кгсм/радиан}$ ,<sup>4)</sup>

$$\alpha_1 = \frac{\Theta_1}{\Theta},$$

1) Величины  $GD^2$  и  $\Theta_1$  связаны между собою общеизвестным соотношением:

$$GD^2 = 4g \cdot \Theta_1,$$

где  $g$  — земное ускорение.

2) Терских В. П. — Крутильные колебания силовых установок, кн. 1, 1940.

3) Нечаев В. К. — Графический метод определения частот собственных колебаний. Двигательное строительство, 1934, № 4, а также Известия Томского индустриального института, т. 54, вып. 6.

4) Здесь, как и везде в дальнейшем, предполагается, что приведенные длины участков коленчатого вала между осями каждых двух соседних цилиндров, а, следовательно, и жесткости этих участков  $c$ , одинаковы между собою. Это условие выполняется во всех ста-

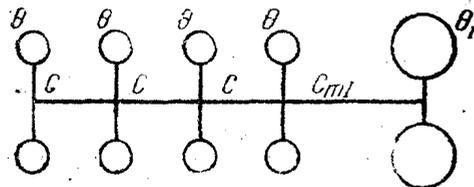


Рис. 1

$\Theta_1$ —момент инерции массы маховика,

$$\beta_1 = \frac{c_{m1}}{c},$$

$c_{m1}$ — жесткость участка вала между последним цилиндром двигателя и маховиком.

Коэффициент  $D_m$ , характеризующий соотношение амплитуд свободных колебаний приведенных масс отдельных цилиндров двигателя, является алгебраической функцией от  $A$ , целиком определяемой числом цилиндров в двигателе (при одинаковых  $\Theta$  и  $c$  для всех цилиндров). Коэффициент  $D_m$  совершенно не зависит от конкретных размеров машины. Так, для четырехцилиндровых двигателей

$$D_4 = \frac{1 - 6A + 5A^2 - A^3}{4 - 10A + 6A^2 - A^3}, \quad (2)$$

а для шестицилиндровых двигателей

$$D_6 = \frac{1 - 15A + 35A^2 - 17A^3 + 8A^4 - A^5}{6 - 35A + 56A^2 - 25A^3 + 9A^4 - A^5}. \quad (3)$$

Графически зависимость  $D_m = f(A)$  в координатах  $D_m$  и  $A$  представляется разрывной кривой, состоящей из ряда ветвей<sup>1)</sup>.

Прямая  $L$ , определяемая уравнением (1), отсекает на оси ординат (рис. 2) отрезок  $-\frac{1}{\alpha_1}$ , численно равный отношению моментов инерции  $\Theta$  и  $\Theta_1$ . Тангенс угла наклона этой прямой к оси абсцисс равен  $1/\beta_1$ , т. е. зависит только от отношения жесткостей  $c$  и  $c_{m1}$ .

При определении частот собственных колебаний системы по рис. 1 величины  $\Theta$ ,  $\Theta_1$ ,  $c$ ,  $c_{m1}$ , а, следовательно, и коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\beta_1$ , характеризующие положение прямой  $L$  на рис. 2, являются наперед известными.

Абсцисса  $A_1$  точки  $M_1$  пересечения прямой  $L$  с первой ветвью кривой  $D_m$  дает частоту одноузловых свободных колебаний системы

$$N_I = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{A_1 \cdot c}{\Theta}} \text{ колеб/мин}, \quad (4)$$

как правило, прежде всего интересующую конструктора при выявлении наличия или отсутствия опасных крутильных колебаний в рабочей скоростной зоне проектируемой установки.

Абсцисса  $A_2$  точки  $M_2$  пересечения прямой  $L$  со второй ветвью кривой  $D_m$  дает частоту двухузловых свободных колебаний вала:

$$N_{II} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{A_2 \cdot c}{\Theta}} \text{ колеб/мин}. \quad (5)$$

ционарных и многих легких двигателей. При неравных приведенных длинах вала между соседними цилиндрами можно без большой погрешности, по крайней мере при расчете одноузловых колебаний, понимать под  $c$  среднее значение, определяемое по формуле

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{m-1} \left( \frac{1}{c_{12}} + \frac{1}{c_{23}} + \dots + \frac{1}{c_{m-1, m}} \right).$$

Здесь  $m$ —число цилиндров двигателя, а, напр.,  $c_{23}$ —действительная жесткость участка коленчатого вала между осями второго и третьего цилиндров.

<sup>1)</sup> Таблицы значений  $D_4$  и  $D_6$ , вычисленных по формулам (2) и (3), приведены в работе автора „Теоретические торсиограммы для вала ДВС“, Известия ТИИ, т. 58, вып. 2. Значения относительных амплитуд и коэффициента  $D_8$  для восьмицилиндрового двигателя см. в приложении к настоящей статье.

Варьируя величинами  $\Theta_1$  и  $c_{m1}$ , мы будем менять этим положение прямой  $L$  на диаграмме (рис. 2), получая различные точки пересечения ее с кривой  $D_m$ , а, следовательно, и различные частоты собственных колебаний системы по рис. 1. Эти свойства диаграммы по рис. 2 позволяют решить и обратную задачу о нахождении новой прямой  $L'$ , пересекающей кривую  $D_m$  в заданных конструктором точках, т. е. обеспечивающей получение таких конкретных значений частот собственных колебаний, при которых

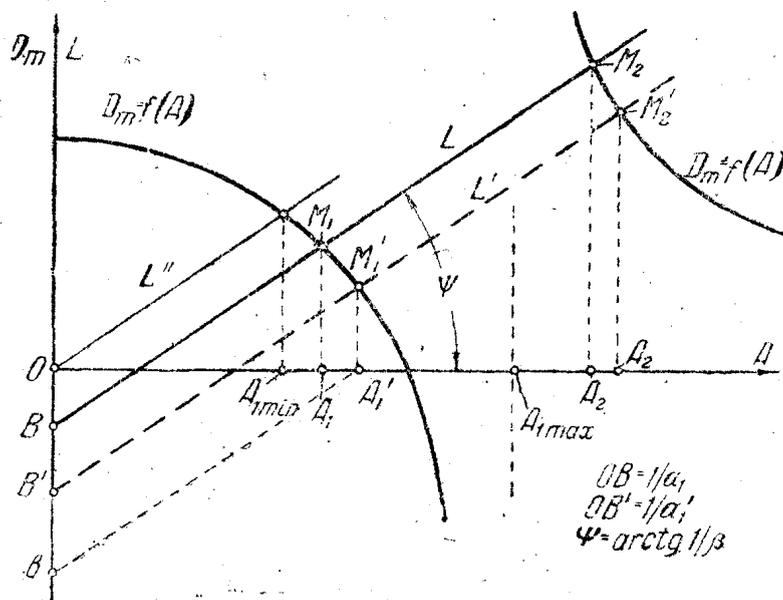


Рис. 2

будет осуществлено достаточное удаление наиболее опасных критических скоростей от рабочих скоростей вращения вала двигателя.

Положим, что для сдвига критических скоростей (прежде всего—главных порядков) необходимо иметь новую частоту собственных одноузловых колебаний  $N_1'$  вместо подсчитанной ранее  $N_1$ . Частоте  $N_1'$  соответствует значение параметра  $A$ :

$$A_1' = \frac{\Theta \omega_1'^2}{c}, \quad (6)$$

где

$$\omega_1' = \frac{\pi N_1'}{30}.$$

Величина  $A_1'$  дает абсциссу той точки  $M_1'$  на первой ветви кривой  $D_m$  (рис. 2), через которую должна пройти прямая  $L'$ . Ординату  $D_{m1}'$  точки  $M_1'$  можно подсчитать, например, по формулам (2) или (3) или взять непосредственно из таблиц.

Но уравнение прямой  $L'$  еще не определяется координатами одной только ее точки  $M_1'$ . Это указывает на то очевидное обстоятельство, что задача об изменении частоты собственных одноузловых колебаний рассматриваемой системы, с целью сдвига критических чисел оборотов, имеет множество решений в соответствии со множеством возможных сочетаний величин  $\Theta_1$  и  $c_{m1}$ .

Рассмотрим частные случаи.

1. Сдвиг критических чисел оборотов за счет изменения  $\Theta_1$  при неизменной жесткости  $c_{m1}$ .

В этом случае новая прямая  $L'$  пройдет через точку  $M_1'$ , располагаясь параллельно прямой  $L$ , построенной ранее при первоначально принятых характеристиках  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  системы.

Проведем на диаграмме (рис. 2) прямую  $A_1'b$ , параллельную прямым  $L$  и  $L'$ . Тогда из чертежа:

$$\overline{Ob} = A_1' \operatorname{tg} \Psi = \frac{A_1'}{\beta_1} = \frac{1}{\alpha_1'} + D'_{m_1},$$

где

$\overline{OB}_1 = \frac{1}{\alpha_1'}$  — отрезок отсекаемой прямой  $L'$  на оси ординат, а  $\beta_1$  — известный и подсчитанный ранее коэффициент, остающийся в данном варианте неизменным в соответствии с сохранением жесткости  $c_{m1}$ . Отсюда

$$\overline{OB}_1 = \frac{1}{\alpha_1'} = \frac{A_1'}{\beta_1} - D'_{m_1}.$$

Теперь новая величина момента инерции  $\Theta_1'$  маховика, при которой установка по рис. 1 будет иметь частоту собственных одноузловых колебаний, равную  $N_1'$ ,

$$\Theta_1' = \alpha_1' \cdot \Theta = \Theta \cdot \frac{\beta_1}{A_1' - \beta_1 D'_{m_1}}, \quad (7)$$

где, как и ранее,  $\Theta$  — момент инерции приведенных маховых масс каждого цилиндра.

Анализ диаграммы (рис. 2) указывает на сравнительную ограниченность возможностей, предоставляемых конструктору изменением момента инерции  $\Theta_1$  маховика, в деле изменения частот собственных одноузловых колебаний вала установки. Очевидно, что теоретически за счет изменения  $\Theta_1$  в пределах от 0 до  $\infty$  можно получить следующий интервал частот собственных одноузловых колебаний:

$$\begin{aligned} \text{от } N_{1min} &= \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{A_{1min} \cdot c}{\Theta}} \\ \text{до } N_{1max} &= \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{A_{1max} \cdot c}{\Theta}}. \end{aligned}$$

Здесь  $A_{1min}$  — абсцисса точки пересечения прямой  $L''$ , проведенной из начала координат (рис. 2) параллельно прямой  $L$ , с кривой  $D_m$ , соответственно случаю:

$$\frac{1}{\alpha_1'} = 0 \quad \text{или} \quad \Theta_1 = \infty,$$

а  $A_{1max}$  — абсцисса точки разрыва между первой и второй ветвью кривой  $D_m$ .

В результате подсчетов  $\Theta_1'$  по формуле (7) для различных значений  $N$  в пределах от  $N_{1min}$  до  $N_{1max}$  можно построить диаграмму, показанную на рис. 3. На этой же диаграмме целесообразно нанести и соответствующие величины степени неравномерности  $\delta_s$  абсолютно жесткого вала, подсчитываемые, например, по обычной формуле

$$\delta_s = \frac{3600 A_{изб}}{n^2 \cdot 4g (\Theta_1' + m\Theta)}, \quad (8)$$

где  $n$  — нормальное число оборотов двигателя в минуту, а  $A_{изб}$  — избыточная работа, определяемая по диаграмме тангенциальных усилий на валу двигателя.

Конечно, эта кривая  $\delta_s = \varphi(N_1)$  имеет только очень условное значение, так как за счет крутильных колебаний действительная степень неравномерности  $\delta$  рабочего конца вала может значительно отличаться от  $\delta_s$ <sup>1)</sup>. Но это различие особо существенно лишь при наличии сильных крутильных колебаний, возникающих в областях оборотов, близких к сильным критическим, т. е. как раз в тех случаях, устранение которых является целью расчетов, излагаемых в данной статье.

Диаграмма по рис. 3 позволяет без больших затруднений выбрать такую величину момента инерции  $\Theta_1$  маховика, которая обеспечит требуемый сдвиг критических оборотов при сохранении удовлетворительной  $\delta_s$ . Отмечая на кривой  $\delta_s$  максимальную величину  $\delta_s$ , еще допустимую по техническим условиям для данной установки, мы выделим этим область тех значений  $\Theta_1$ , а, следовательно, и частот собственных одноузловых колебаний  $N_1$ , которые следует считать неприемлемыми с точки зрения обеспечения достаточной равномерности вращения вала машины. В автотракторных

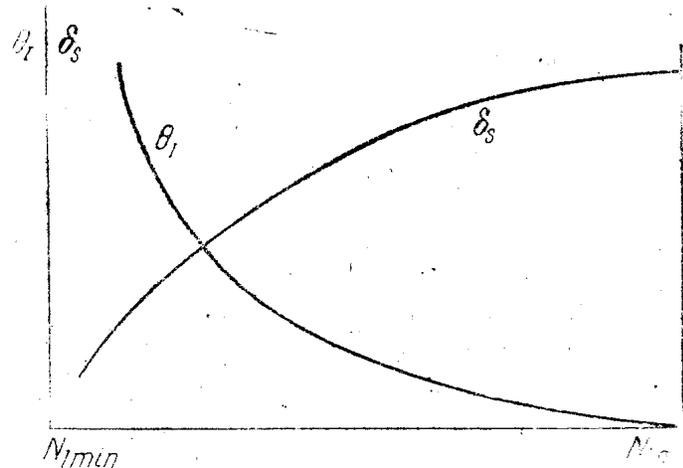


Рис. 3

установках границы возможных вариантов для выбора  $\Theta_1$  маховика по условиям необходимого сдвига критических оборотов, при сохранении достаточного минимума кинетической энергии, обычно суживаются еще более значительно за счет конструктивных и габаритных соображений.

В этих случаях целесообразно исследовать возможность изменения  $N_1$  путем изменения жесткости  $C_{m1}$  вала между двигателем и маховиком при сохранении выбранной ранее величины  $\Theta_1$  маховика.

2. Сдвиг критических чисел оборотов за счет изменения жесткости  $C_{m1}$  при  $\Theta_1 = \text{const}$ .

При изменении  $C_{m1}$  прямая  $L$  поворачивается около точки  $B$  (рис. 4) в соответствии с изменением отношения  $\frac{1}{\beta} = \frac{C}{C_{m1}}$ , представляющего со-

бою тангенс угла наклона этой прямой к оси абсцисс. Необходимая нам новая прямая  $L'$ , дающая частоту  $N_1'$ , должна пройти через точки  $B$  и  $M_1'$ .

Проводим вспомогательную прямую  $A_1'b$ , параллельную прямой  $L'$ . Тогда из чертежа:

$$\text{tg}\Psi' = \frac{1}{\beta_1'} = \frac{\overline{OB} + D'_{m1}}{A_1'} = \frac{1}{\alpha_1} + D'_{m1}.$$

Отсюда получаем выражение для подсчета нового искомого значения  $C'_{m1}$  жесткости вала между последним цилиндром двигателя и маховиком,

<sup>1)</sup> Зависимость действительной степени неравномерности  $\delta$  от частоты собственных колебаний  $N_1$ , при постоянном числе оборотов двигателя  $n$ , имеет значительно более сложный характер. Здесь уже необходимо вводить понятие о критической величине момента инерции маховика и решать задачу о выборе маховика иными методами. См. В. К. Нечаев—„Теоретические торсиограммы для вала двигателя внутреннего сгорания“, Известия Томского Индустриального Института им. С. М. Кирова, т. 58, вып. II.

при котором установка по рис. 1 имеет частоту собственных одноузловых колебаний  $N_1'$ :

$$c'_{m1} = \beta_1' \cdot c = c \cdot \frac{A_1'}{\frac{1}{\alpha_1} + D'_{m1}}, \quad (9)$$

где, как и ранее,  $D'_{m1}$  — ордината точки  $M_1'$ , имеющей абсциссу  $A_1'$ , подсчитанную по формуле (6).

Рис. 4 показывает, что за счет изменения  $c_{m1}$  можно получить, по крайней мере теоретически, широкий диапазон значений  $N_1'$  в пределах от

$$N_{1min} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{A_{1min} \cdot c}{\Theta}}$$

до

$$N_{1max} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{A_{1max} \cdot c}{\Theta}},$$

причем  $A_{1max}$  определяется как абсцисса точки  $M_1''$  пересечения кривой  $D_m$  с прямой  $L''$ , проведенной из точки  $B$  под минимальным возможным углом  $\Psi_{min} = \arctg 1/\beta_{max}$ . Величина  $\beta_{max}$  может быть выбрана исходя из

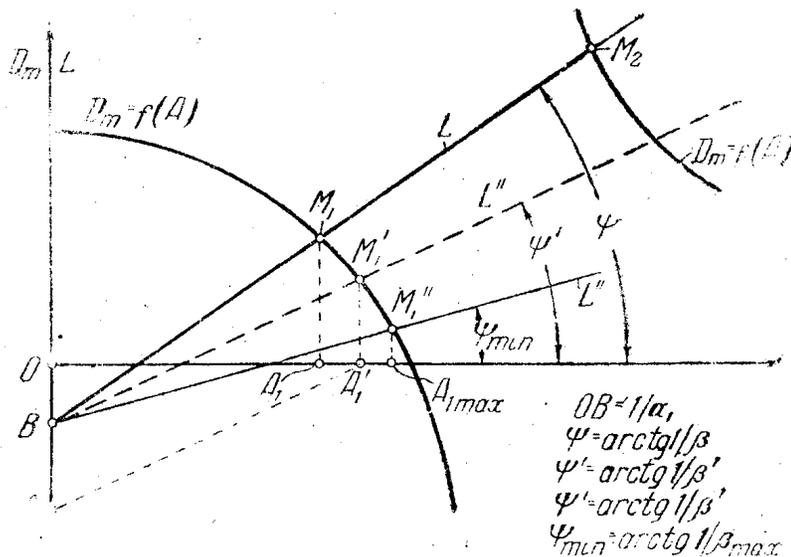


Рис. 4

минимальной конструктивно приемлемой длины вала между осью последнего цилиндра и маховиком при максимальном конструктивно удобном его диаметре. Величина же  $A_{1min}$ , соответствующая предельному теоретическому случаю  $c_{m1} = 0$ , очевидно, равна нулю.

3. Сдвиг критических чисел оборотов за счет одновременного изменения  $c_{m1}$  и  $\Theta_1$ .

В случае необходимости получения значительного сдвига критических чисел оборотов, например, в автотракторных двигателях, иногда наиболее целесообразно использовать одновременно имеющиеся возможности изменения момента инерции  $\Theta_1$  маховика и жесткости  $c_{m1}$  вала между двигателем и маховиком. Теперь на диаграмме (рис. 5) будет меняться как начальная точка, так и угол наклона прямой  $L$  к оси абсцисс.

Задаваясь, например, новым, конструктивно приемлемым значением  $\Theta_1'$ , обеспечивающим также достаточный минимум кинетической энергии двигателя или необходимую  $\delta_s$ , можно по формуле (9) найти и соответ-

ствующее значение  $C_{m1}'$ , при котором рассчитываемая установка будет иметь заданную частоту собственных одноузловых колебаний  $N_1'$ . Аналогично по формуле (7) решается и обратная задача об определении необходимой величины  $\Theta_1'$  при новом, принятом в соответствии с конструктивными соображениями, значении  $C_{m1}'$ .

Таким образом, формулы (7) и (9) позволяют быстро определить те новые значения  $\Theta_1$  и  $C_{m1}$ , которые, конечно, в пределах рассмотренных выше возможностей, обеспечат необходимую величину  $N_1'$ . Эта новая необходимая частота одноузловых колебаний  $N_1'$  выбирается с таким расчетом, чтобы ни одна из опасных критических скоростей не совпадала с рабочими скоростями двигателя и не располагалась близко к последним.

Однако обеспечение желательной  $N_1'$  за счет соответствующего выбора  $\Theta_1$  и  $C_{m1}$  еще не устраняет полностью всех опасностей возникновения крутильных резонансов в зоне рабочих оборотов двигателя. В отдельных

случаях могут оказаться опасными и резонансы, соответствующие двухузловым колебаниям вала с частотой  $N_{II}$ . Эта частота определяется абсциссой  $A_2$  точки пересечения прямой  $L$  со второй ветвью кривой  $D_m$  (формула 5).

Изложенная выше методика расчета указывает способы определения тех значений  $\Theta_1$  и  $C_{m1}$ , в установке по рис. 1, при которых рабочая скоростная зона двигателя будет свободна от опасных как одноузловых, так и двухузловых резонансных колебаний.

Положим, что для такой очистки области рабочих оборотов двигателя необходимо, чтобы рассматриваемая установка по рис. 1 имела частоты  $N_1'$  и  $N_{II}'$  соответственно одноузловых и двухузловых свободных колебаний. Подсчитываем значения параметра:

$$A_1' = \frac{\Theta}{c} \left( \frac{\pi N_1'}{30} \right)^2,$$

$$A_2' = \frac{\Theta}{c} \left( \frac{\pi N_{II}'}{30} \right)^2$$

и восстанавливаем из точек  $A_1'$  и  $A_2'$  ординаты до пересечения с соответствующими ветвями кривой  $D_m$  в точках  $M_1'$  и  $M_2'$  (рис. 5). Через эти точки должна пройти новая прямая  $L'$ . Из чертежа:

$$\operatorname{tg} \Psi' = \frac{1}{\beta_1'} = \frac{D'_{m_2} - D'_{m_1}}{A_2' - A_1'}$$

где  $D'_{m_1}$  и  $D'_{m_2}$  — ординаты точек  $M_1'$  и  $M_2'$ . Числовые значения этих ординат можно подсчитать по уравнениям (2), (3) или взять из таблиц.

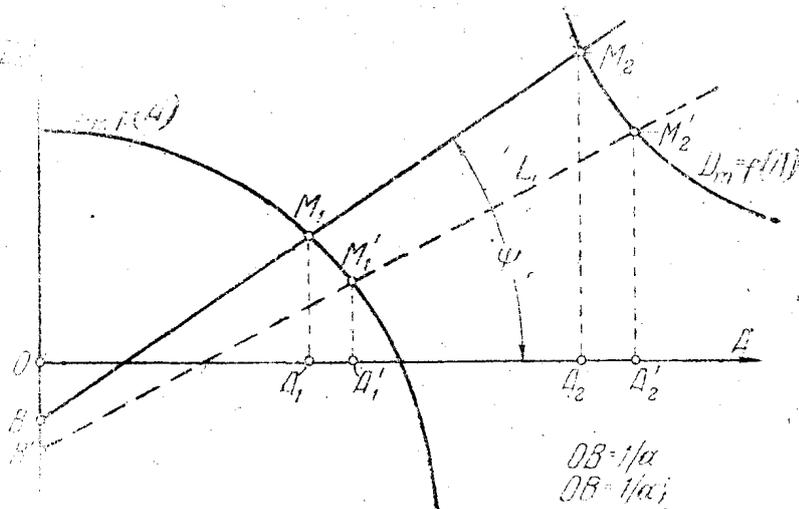


Рис. 5

Отсюда:

$$\beta_1' = \frac{A_2' - A_1'}{D'_{m_2} - D'_{m_1}}$$

$$c'_{m_1} = \beta_1' c = c \cdot \frac{A_2' - A_1'}{D'_{m_2} - D'_{m_1}}. \quad (10)$$

Кроме того, согласно рис. 5,

$$\frac{1}{\alpha_1'} + D'_{m_1} = A_1 \operatorname{tg} \Psi' = \frac{1}{\beta_1'} A_1' = A_1' \cdot \frac{(D'_{m_2} - D'_{m_1})}{(A_2' - A_1')},$$

или

$$\frac{1}{\alpha_1'} = \frac{A_1'(D'_{m_2} - D'_{m_1})}{(A_2' - A_1')} - D'_{m_1}.$$

Теперь

$$\Theta_1' = \alpha_1' \Theta = \frac{A_2' - A_1'}{A_1' D'_{m_2} - A_2' D'_{m_1}} \cdot \Theta. \quad (11)$$

Формулы (10) и (11) дают те конкретные значения  $\Theta_1$  и  $c_{m_1}$ , при которых установка по рис. 1 будет иметь заданные частоты собственных колебаний  $N_1'$  и  $N_{II}'$ .

## II

Выше мы рассмотрели методику расчета сдвига критических чисел оборотов в установке по рис. 1, имеющей один маховик. Но совершенно аналогично может быть решена задача о сдвиге и в установках с двумя маховиками (например, двигатель—маховик—динамо, рис. 6). Однако здесь зависимость  $L = F(A)$  оказывается более сложной и в координатах  $D_m - A$ , вместо прямой представляется разрывной кривой<sup>1)</sup>.

Для изменения частот собственных колебаний вала такой установки можно менять (поотдельности или одновременно) жесткость  $c_{m_1}$  вала между двигателем

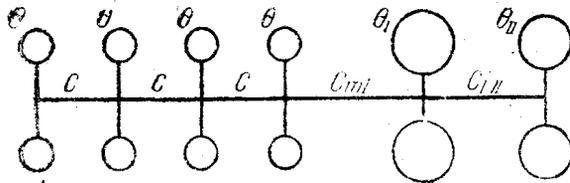


Рис. 6

и маховиком, жесткость  $c_{II}$  вала между маховиком и динамо и моменты инерции  $\Theta_1$  и  $\Theta_{II}$ , соответственно маховика и ротора динамо.

Так, для получения заданной частоты свободных одноузловых колебаний  $N_1'$  при принятых  $\Theta_1$ ,  $\Theta_{II}$  и  $c_{II}$  необходимо иметь следующую жесткость вала между последним цилиндром двигателя и маховиком<sup>2)</sup>:

$$c_{m_1}' = c \cdot \frac{A_1'}{D_{m_1}' - \frac{\beta_2 - \alpha_2 A_1'}{\alpha_1 \alpha_2 A_1' - (\alpha_1 + \alpha_2) \beta_2}}, \quad (12)$$

где, как и ранее,

$$\alpha_1 = \frac{\Theta_1}{\Theta}$$

<sup>1)</sup> См. работу автора, указанную в сноске на стр. 73.

<sup>2)</sup> В. К. Нечаев., «Сдвиг критических оборотов», Известия Томского Индустриального Института, т. 56.

и, кроме того:

$$\alpha_2 = \frac{\Theta_{II}}{\Theta}, \quad \beta_2 = \frac{c_{II}}{c}.$$

Входящая сюда величина  $D_{m_1}'$  является ординатой той точки  $M_1'$  на кривой  $D_m = f(A)$ , через которую должна пройти кривая  $L = F(A)$ . Абсцисса  $A_1'$  этой точки определяется уравнением (5).

Система по рис. 6 будет иметь частоту собственных одноузловых колебаний, равную  $N_1'$ , если при заданных  $\Theta_I, \Theta_{II}, c_{m1}$  сделать жесткость соединительного вала между маховиком и ротором динамо следующей величины:

$$c'_{I, II} = \alpha_2 c A_1' \cdot \frac{a_1(A_1' - \beta_1 D_{m_1}') - \beta_1}{(\alpha_1 + \alpha_2)(A_1' - \beta_1 D_{m_1}') - \beta_1}. \quad (13)$$

Установка по рис. 6 будет иметь частоту  $N_1'$  при заданных  $c_{m1}, c_{II}$  и  $\Theta_{II}$ , если поставить маховик с моментом инерции

$$\Theta_I' = \Theta \cdot \left( \frac{\alpha_2 \beta_2}{A_1' \alpha_2 - \beta_2} + \frac{\beta_1}{A_1' - \beta_1 D_{m_1}'} \right). \quad (14)$$

Наконец, заданную частоту одноузловых<sup>x</sup> собственных колебаний  $N_1'$  установки по рис. 6 можно получить и за счет выбора соответствующей величины момента инерции  $\Theta_{II}$  ротора динамо. Здесь, при принятых  $\Theta, c_{m1}, c_{I, II}$ , необходимо иметь

$$\Theta_{II}' = \beta_2 \Theta \cdot \frac{1 + \alpha_1 \left( D_{m_1}' - \frac{A_1'}{\beta_1} \right)}{A_1' + (\alpha_1 A_1' - \beta_2) \left( D_{m_1}' - \frac{A_1'}{\beta_1} \right)}. \quad (15)$$

Конечно, каждая из этих формул (12)—(15) практически может быть использована лишь до тех пор, пока определяемые ими значения момента инерции или жесткости имеют конструктивно легко и удобно реализуемые величины. В противном случае заданный сдвиг критических чисел оборотов необходимо осуществить за счет одновременного изменения по крайней мере двух характеристик системы, например,  $c_{m1}$  и  $c_{II}$ , или  $c_{m1}$  и  $\Theta_I$ , и т. д.

### III

Первая ветвь кривой  $D_m = f(A)$ , определяемой для четырех- и шестицилиндровых двигателей уравнениями (2) и (3), может быть представлена следующей приближенной формулой:

$$D_m = e - \frac{f}{g - A}, \quad (16)$$

где  $e, f$  и  $g$ —постоянные, зависящие лишь от числа цилиндров двигателя. Так для 4-цилиндровых двигателей, в интервале от  $A = 0$  до  $A = 0,30$ :

$$e = 0,7877; \quad f = 0,335; \quad g = 0,623.$$

Для 6-цилиндровых двигателей, в интервале от  $A = 0$  до  $A = 0,12$ :

$$e = 0,620; \quad f = 0,136; \quad g = 0,300.$$

При этих значениях коэффициентов  $e, f, g$  и в указанных интервалах формула (15) дает значения  $D$  с точностью до единицы в третьем знаке, после запятой.

Теперь абсцисса  $A_1$  точки  $M_1$  пересечения кривой  $D_m$  с прямой  $L$  (рис. 2) определится совместным решением уравнения (16) с уравнением (1) для  $L$ :

$$\frac{A}{\beta_1} - \frac{1}{\alpha_1} = e - \frac{f}{g - A}.$$

Отсюда, после элементарных преобразований,

$$A^2 - 2Ap + q = 0, \quad (17)$$

где

$$p = \frac{g + \frac{\beta_1}{\alpha_1} + \beta_1 e}{2};$$

$$q = g \cdot \frac{\beta_1}{\alpha_1} + e g \beta_1 - \beta_1 f.$$

Подставляя сюда приведенные выше значения постоянных  $e, f, g$ , получаем:

для 4-цилиндровых двигателей

$$p = \frac{\beta_1}{2\alpha_1} + 0,394\beta_1 + 0,311;$$

$$q = 0,623 \frac{\beta_1}{\alpha_1} + 0,156\beta \quad (18)$$

и для 6-цилиндровых двигателей:

$$p = \frac{\beta_1}{2\alpha} + 0,310\beta + 0,150;$$

$$q = 0,300 \frac{\beta_1}{\alpha_1} + 0,05\beta. \quad (19)$$

Меньший корень уравнения (17) дает искомую абсциссу точки  $M_1$  (рис. 2):

$$A_1 = p - \sqrt{p^2 - q}. \quad (20)$$

Отсюда, на основании формулы (4), имеем выражение для частоты собственных (свободных) одноузловых колебаний установки по рис. 1:

$$N_1 = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{c}{\theta}} \cdot \sqrt{p - \sqrt{p^2 - q}}. \quad (21)$$

Погрешность в подсчете  $N_1$  по этой формуле не превышает 0,25%. Таким образом, формулы (18)–(21) обеспечивают точность вычисления  $N_1$ , совершенно достаточную при всех расчетах, проводимых на счетной линейке. Пользование этими формулами не представляет каких-либо затруднений и не связано с проведением сложных вычислений.

Подсчитывая  $N_1$  по формулам (20)–(21), можно очень быстро проверить пригодность, например, принятой величины момента инерции  $\theta_1$  маховика с точки зрения отсутствия совпадения каких-либо критических скоростей, соответствующих одноузловым колебаниям, с рабочими скоростями вращения вала двигателя.

Второй, больший корень уравнения (17) дает абсциссу точки пересечения прямой  $L$  (рис. 2) со второй ветвью кривой  $D_m$ , определяющую частоту  $N_{II}$  собственных двухузловых колебаний вала установки по рис. 1. Однако точность такого подсчета  $N_{II}$  будет небольшой, так как вторая

ветвь кривой  $D_m$  плохо укладывается в формулу (17). Частоту  $N_z$  необходимо вычислять графическим путем, определяя абсциссу  $A_2$  точки  $M$  непосредственным построением прямой на диаграмме  $D_m = f(A)$ .

Таблица 1

**Относительные амплитуды колебаний 7-й и 8-й масс восьмицилиндрового двигателя**

$$\varphi_1 = +1,0000 \text{ рад.}$$

$$A = \frac{\theta \omega^2}{c}$$

A	$\varphi_7$	$\varphi_8$	A	$\varphi_7$	$\varphi_8$	A	$\varphi_7$	$\varphi_8$
0	+1,0000	+1,0000	0,16	-0,8837	-1,0131	0,32	-0,8685	-0,4166
0,01	+0,7969	+0,7324	0,17	-0,9236	-1,0216	0,33	-0,8338	-0,3505
0,02	+0,6073	+0,4887	0,18	-0,9567	-1,0211	0,34	-0,7996	-0,2836
0,03	+0,4308	+0,2679	0,19	-0,9832	-1,0125	0,35	-0,7572	-0,2161
0,04	+0,2738	+0,0686	0,20	-1,0035	-0,9963	0,36	-0,7156	-0,1484
0,05	+0,1148	-0,1102	0,21	-1,0178	-0,9732	0,37	-0,6722	-0,0806
0,06	-0,0256	-0,269	0,22	-1,0266	-0,9437	0,38	-0,6271	-0,0132
0,07	-0,1517	-0,4108	0,23	-1,0300	-0,9085	0,39	-0,5805	+0,0537
0,08	-0,2732	-0,5346	0,24	-1,0285	-0,8681	0,40	-0,5325	+0,1198
0,09	-0,3813	-0,6420	0,25	-1,0222	-0,8231	0,41	-0,4835	+0,1848
0,10	-0,4796	-0,7341	0,26	-1,0115	-0,7738	0,42	-0,4334	+0,2487
0,11	-0,5684	-0,8118	0,27	-0,9966	-0,7209	0,43	-0,3825	+0,3112
0,12	-0,6481	-0,8759	0,28	-0,9778	-0,6648	0,44	-0,3310	+0,3720
0,13	-0,7191	-0,9272	0,29	-0,9554	-0,6059	0,45	-0,2789	+0,4311
0,14	-0,7818	-0,9667	0,30	-0,9295	-0,5446			
0,15	-0,8365	-0,9951	0,31	-0,9005	-0,4814			

Примечание: Значения  $\varphi$  для первых шести масс двигателя—см. в работе автора—  
„Теоретические торсиограммы для вала ДВС“, Известия ТИИ, т. 58 (1937).

Таблица 2

Значения  $\sum_{i=1}^8 \varphi_i$  и  $D_8$  для восьмицилиндрового двигателя

$$\varphi_1 = +1,0000 \text{ рад.};$$

$$D_8 = \frac{\varphi_8}{\sum_{i=1}^8 \varphi_i}$$

A	$\sum_{i=1}^8 \varphi_i$	$D_8$	A	$\sum_{i=1}^8 \varphi_i$	$D_8$	A	$\sum_{i=1}^8 \varphi_i$	$D_8$
0	+8,0000	+0,1215	0,16	-0,2042	+4,9600	0,32	-1,8288	+0,2278
0,01	+7,1848	+0,1019	0,17	-0,4455	+2,2930	0,33	-1,8150	+0,1931
0,02	+6,4182	+0,0761	0,18	-0,6631	+1,5400	0,34	-1,7925	+0,1582
0,03	+5,6936	+0,0470	0,19	-0,8582	+1,1800	0,35	-1,7620	+0,1226
0,04	+5,0296	+0,0136	0,20	-1,0317	+0,9357	0,36	-1,7242	+0,0860
0,05	+4,3901	-0,0251	0,21	-1,1857	+0,8207	0,37	-1,6794	+0,0480
0,06	+3,7987	-0,0710	0,22	-1,3203	+0,7158	0,38	-1,6287	+0,0081
0,07	+3,2468	-0,1265	0,23	-1,4368	+0,6323	0,39	-1,5724	-0,0341
0,08	+2,7326	-0,1956	0,24	-1,5363	+0,5651	0,40	-1,5110	-0,0793
0,09	+2,2546	-0,2848	0,25	-1,6197	+0,5082	0,41	-1,4452	-0,1279
0,10	+1,8112	-0,4053	0,26	-1,6880	+0,4584	0,42	-1,3754	-0,1808
0,11	+1,4009	-0,5794	0,27	-1,7420	+0,4138	0,43	-1,3020	-0,2390
0,12	+1,0229	-0,8563	0,28	-1,7827	+0,3729	0,44	-1,2257	-0,3035
0,13	+0,6738	-1,3761	0,29	-1,8110	+0,3346	0,45	-1,1467	-0,3760
0,14	+0,3511	-2,7300	0,30	-1,8276	+0,2980			
0,15	+0,0619	-16,0860	0,31	-1,8332	+0,2626			

## ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
7	3 снизу	результате	результаты
9	2 сверху	$\alpha = hr_{10} t$	$\alpha = r_{10} t$
10	1 снизу	$\delta_s \cong b_i$	$\delta_s \cong \delta_i$
19	6 сверху	$+ \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q [_{2q}(\xi) +$	$+ \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q [J_{2q}(\xi) +$
19	7 сверху	$- J_{2q} + 3(\xi)]$	$- J_{2q} + 3(\xi)]$
21	4 снизу	$[J_0(\xi_1) \sin(r_h t +$	$[J_0(\xi_1) \sin r_h t +$
22	7 сверху	$\sin(r_h - 2\nu) t$	$\sin(r_h - 2\nu) t + \dots$
25	3 снизу	$\left[ 1 + \frac{\delta_s}{2} \cos(\nu t - \xi) \right]$	$\left[ 1 + \frac{\delta_s}{2} \cos(\nu t - \xi) \right]^2$
27	3 сверху	$C = \frac{\delta_s^2}{16} \left\{$	$C = \frac{\delta_s^2}{16} \left\{$
30	25 сверху	изменяющиеся	уменьшающиеся
31	2 сверху	(69)	(65)
31	13 снизу	$m_9$	$m_3$
34	12 сверху	$\sum_{p=1}^{\infty} M_p \sin(p\alpha - \varepsilon_p')$	$\sum_{p=1}^{\infty} M_p \sin(p\alpha + \varepsilon_p')$
38	3 снизу	слагающих	слагающей
42	20 сверху	$k k_c$	$k/k_c$
47	14 сверху	$\Psi = \sum_{q=1}^{\infty} \Phi_{q-1}$	$\Psi = \sum_{q=1}^{\infty} \Phi_{q-1}$
48	12 сверху	$M_h J_1\left(\frac{\delta}{2}\right)$	—
51	5 сверху	$\frac{\delta}{2} \sin r_h t$	$\frac{\delta}{2} \sin r_h t$
52	23 сверху	$\Phi_0$	$\Phi_{0res}$
54	5 сверху	принимать	признать
55	17 сверху	$\sum_{q=1}^{\infty} (-1)_d$	$\sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q$
57	2 снизу	$M_{кр}'$	$M_{кр}''$
58	3 снизу	$\bar{B}_h = \bar{B}_h' = \bar{B}_h''$	$\bar{B}_h = \bar{B}_h' + \bar{B}_h''$
64	4 сверху	$\bar{M}_h \sin(hr_{10} t - \bar{\varepsilon}_h)$	$\bar{M}_h \sin(hr_{10} t + \bar{\varepsilon}_h)$
79	4 снизу	+ 1,0229	+ 1,0223
87	2 снизу	$(\varphi_i \text{ отн} - \varphi_{i+1, \text{отн}}^2)$	$(\varphi_i \text{ отн} - \varphi_{i+1, \text{отн}})^2$
90	6 сверху	$M_h'$	$M_r'$
92	5 сверху	$+ c_1 \text{ II } \varphi_{\text{отн}} =$	$+ c_1 \text{ II } \varphi_{\text{отн}}^2 =$