ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 87 1957 г.

УЧЕТ РАДИАЦИОННОГО ТОРМОЖЕНИЯ В РАСЧЕТЕ СМЕЩЕНИЯ НА МИШЕНЬ УСКОРЕННЫХ В БЕТАТРОНЕ ЭЛЕКТРОНОВ

В. М. РАЗИН

(Представлено научным семинаром физико-технического факультета)

В больших бетатронах вследствие электромагнитного излучения электронов, двигающихся с громадным ускорением по орбите при больших энергиях, порядка 70 *Мэв* и выше, происходит сокращение радиуса орбиты электронов. В расчете смещения ускоренных электронов на мишень следует этот эффект учитывать. При решении этого вопроса пойдем путем, указанным Арцимовичем и Померанчуком [1].

Изменение радиуса орбиты вычисляется в [1] для случая, когда оно мало по сравнению с r_0. В качестве исходных в [1] используются следующие уравнения движения:

$$\frac{dp}{dt} = eE - \Delta W, \tag{1}$$

$$\frac{pc}{e} = Hr, \tag{2}$$

здесь p — импульс электрона,
r — напряженность электрического поля,
E — радиус траектории,
ΔW — сила лучистого торможения, численно равная энергии, теряемой на излучение на 1 *см* пути.

ΔW определяется выражением

$$\Delta W = \frac{2}{3}\rho_0^2\left[\vec{\beta}\ \vec{H}\right]^2\left(\frac{W}{m_0c}\right)^2, \tag{3}$$

где W — энергия электрона, включая его покоящуюся энергию,
m_0 — покоящаяся масса электрона,
c — скорость света,
$\rho_0 = \frac{e^2}{m_0c^2}$ — классический радиус электрона,
H — напряженность магнитного поля,
e — заряд электрона.

В электронном ускорителе

$$H = H_m(r)\,\psi(t) = H_m(r)\sin\omega t = H_m(r)\sin\varphi, \qquad (4)$$

где $H_m(r)$ — максимальное значение напряженности магнитного поля в данной точке.

Решение уравнений движения (1) и (2) в [1] дается **в** виде:

$$\frac{x}{r_o} = -3{,}8.10^{-15}\,\frac{H_m^2(r_o)W_m}{1-n}\,\frac{1}{\psi(t)}\int\limits_o^t \psi^4(t)\,dt. \qquad (5)$$

Здесь $x = r - r_o$,

W_m — максимальное значение энергии электрона в электроновольтах,

$H \sim r^{-n}$ — вблизи стабильной орбиты.

Учитывая (4) и что $\omega = 2\pi f$, перейдем к новой переменной $\varphi = \omega t$

$$\frac{x}{r_o} = -6.10^{-16}\,\frac{H_m^2(r_o)W_m}{f(1-n)}\,\frac{1}{\sin\varphi}\int\limits_o^\varphi \sin^4\varphi\,d\varphi, \qquad (6)$$

где

$$\frac{1}{\sin\varphi}\int\limits_o^\varphi \sin^4\varphi\,d\varphi = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{3}{8}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi + \frac{1}{32}\sin 4\varphi\right). \qquad (7)$$

Это изменение радиуса орбиты следует учитывать при расчете смещения, подставляя в расчетные формулы в качестве требуемого смещения не расстояние от равновесной расчетной орбиты до мишени, а расстояние от действительного положения орбиты в момент сброса до мишени.

В бетатронах на большие энергии сокращение радиуса орбиты вследствие радиационных потерь на излучение становится настолько большим, что возникает необходимость создавать в конце ускорения дополнительное ускоряющее вихревое электрическое поле за счет увеличения магнитного потока в круге орбиты. Такая компенсация радиационных потерь предотвращает сокращение радиуса орбиты до попадания ускоренных электронов на внутреннюю стенку камеры. Задача компенсации радиационных потерь в некоторой степени аналогична задаче смещения электронов на мишень. Действительно, в первом случае ставится задача предотвратить сокращение радиуса орбиты за счет дополнительного вихревого электрического поля, во втором—увеличить радиус орбиты до столкновения электронов с мишенью, причем в частном случае это увеличение радиуса также получается в результате воздействия дополнительного вихревого электрического поля.

Способ решения этих задач может быть применен один и тот же, а именно: дополнительное увеличение магнитного поля в круге орбиты. Это наталкивает на мысль о возможности совмещения процессов компенсации потерь на радиационное торможение и расширения орбиты в целях сброса ускоренных электронов на мишень.

Для осуществления этого совмещения нами предлагается следующий способ. В конце ускорения, когда сокращение орбиты становится заметным, следует ввести сравнительно с обычными импульсами смещения более длительный по времени импульс ускоряющего магнитного потока полусинусоидальной формы так, чтобы вместо сокращения радиуса равновесной орбиты началось постепенное расширение орбиты. Это расширение должно быть рассчитано таким образом, чтобы к желаемому моменту времени ускоренные электроны достигали мишени.

Перейдем к математическому анализу предлагаемого способа. Напишем следующие уравнения движения:

$$\frac{dp}{dt} = e(E + E_k) - \Delta W, \tag{8}$$

$$\frac{pc}{e} = Hr. \tag{9}$$

Наши уравнения отличаются от уравнений (1) и (2) только добавлением E_k — напряженности компенсирующего вихревого электрического поля, поэтому представляется возможным воспользоваться в основном упомянутым выше ходом анализа [1].

Исключая p из (8) и (9), получаем уравнение траектории

$$\frac{e}{c} \frac{d}{dt}(Hr) = e(E + E_k) - \Delta W. \tag{10}$$

При $\Delta W = 0$ и $E_k = 0$ радиус орбиты не зависит от времени и равен r_0. Обозначая компенсирующий магнитный поток через Φ, будем считать, что

$$\Phi = \pi r_1^2 B, \tag{11}$$

где B — среднее значение индукции в круге радиуса $r_1 < r_0$.

Установим характер изменения индукции компенсирующего магнитного потока следующим образом:

$$B = B_m \sin(\omega_0 t - \alpha). \tag{12}$$

Здесь круговая частота ω_0 определяется длительностью импульса компенсирующего магнитного потока, а фаза α — моментом начала этого импульса.

Величина E_k определяется выражением

$$E_k = \frac{1}{2\pi r c} \frac{d\Phi}{dt}. \tag{13}$$

Учитывая (11), мы можем написать:

$$E_k = \frac{r_1^2}{2rc} \frac{dB}{dt}. \tag{14}$$

Суммарная напряженность электрического поля в функции радиуса будет определяться уравнением

$$E(r) = E + E_k = \frac{1}{rc} \frac{d}{dt} \int_0^r Hr\,dr + \frac{r_1^2}{2rc} \frac{dB}{dt}. \tag{15}$$

На основании (4) выражение для E можно представить в виде:

$$E = \frac{1}{rc} \psi'(t) \int_0^r H_m(r) r\,dr. \tag{16}$$

При малых изменениях r все величины, входящие в уравнение (10), можно разложить в ряд по степеням $x = r - r_0$ и ограничиться первыми членами разложения. Отметим, прежде всего, что в выражениях для E член, содержащий x в первой степени, исчезает, так как $\frac{d}{dr}E(r_o)=0$.

Для доказательства этого продифференцируем (16):

$$\frac{d}{dr}E(r)=\frac{1}{c}\psi'(t)\left[H_m(r)-\frac{1}{r^2}\int_o^r H_m(r)dr\right]_{r=r_o}. \qquad (17)$$

Второй член в скобках, очевидно, равен $\frac{1}{2}\overline{H_m(r_o)}$. Черта обозначает среднее значение напряженности в круге радиуса r_o. Согласно бетатронному условию $H(r_o)=\frac{\overline{H}}{2}$ выражение для $\frac{d}{dr}E(r)$ обращается в нуль при $r=r_o$.

Памятуя это и разлагая по степеням x обе части равенства (10), имеем

$$\frac{e}{c}\frac{d}{dt}\left[H(r_o)r_o+xH(r_o)+r_ox\left(\frac{d}{dr}H(r)\right)_{r=r_o}\right]=eE(r_o)+$$

$$+\frac{er_1^2}{2r_oc}\left(1-\frac{x}{r_o}\right)\frac{dB}{dt}-\Delta W. \qquad (18)$$

Здесь E_k представлено в виде:

$$E_k=\frac{r_1^2}{2c}\frac{dB}{dt}\frac{1}{r}\cong\frac{r_1^2}{2r_oc}\frac{dB}{dt}\left(1-\frac{x}{r_o}\right). \qquad (19)$$

Так как

$$\frac{e}{c}\frac{d}{dt}\left[H(r_o)r_o\right]=\frac{e}{2\pi r_oc}\frac{d}{dt}\left[2\pi r_o^2H(r_o)\right]=\frac{e}{2\pi r_oc}\frac{d\Phi_1}{dt}=eE(r_o), \qquad (20)$$

то

$$\frac{d}{dt}\left[xH(r_o)+r_ox\left(\frac{d}{dr}H(r)\right)_{r=r_o}\right]=\frac{r_1^2}{2r_o}\left(1-\frac{x}{r_o}\right)\frac{dB}{dt}-\frac{c}{e}\Delta W. \qquad (21)$$

Интегрируя, имеем

$$xH(r_o)(1-n)=\frac{r_1^2}{2r_o}B-\frac{c}{e}\int_o^t\Delta W\,dt. \qquad (22)$$

При интегрировании опускаем член $\frac{x}{r_o}\ll 1$ и учитываем, что вблизи равновесной орбиты

$$H\sim r^{-n};\qquad \frac{dH}{dr}\sim -nr^{n-1},$$

т. е.

$$H(r_o)+r_o\left[\frac{d}{dr}H(r)\right]_{r=r_o}=H(r_o)(1-n).$$

Интеграл, стоящий в правой части уравнения (22), вычислен в [1].

Переходя к переменной $\varphi=\omega t$ и подставляя численные значения постоянных, запишем интеграл в следующем виде:

$$\frac{c}{e}\int_{o}^{t}\Delta W\,dt=6.10^{-16}\,\frac{H_m^{3}(r_o)r_o W_m}{f}\int_{o}^{\varphi}\psi^{4}(\varphi)\,d\varphi. \tag{23}$$

Энергия W_m здесь выражена в электроновольтах.

Теперь выражение (22) с учетом (4) и (12) можно после несложных алгебраических преобразований представить в виде:

$$\frac{x}{r_o}=\frac{r_1^{2}}{2r_o^{2}}\,\frac{B_m\sin(\omega_o t-\alpha)}{H_m(r_o)(1-n)\sin\varphi}-$$

$$-6.10^{-16}\,\frac{H_m^{2}(r_o)\,W_m}{f(1-n)}\,\frac{1}{\sin\varphi}\int_{o}^{\varphi}\sin^{4}\varphi\,d\varphi. \tag{24}$$

Вводя обозначения

$$K_1=\frac{r_1^{2}B_m}{2r_o^{2}H_m(r_o)(1-n)}\,, \tag{25}$$

$$k_1(t)=\frac{\sin(\omega_o t-\alpha)}{\sin\omega t}\,, \tag{26}$$

$$K_2=6.10^{-16}\,\frac{H_m^{2}(r_o)W_m}{f(1-n)}\,, \tag{27}$$

$$k_2(t)=\frac{1}{\sin\omega t}\int_{o}^{\omega t}\sin^{4}\omega t\,d(\omega t), \tag{28}$$

получаем:

$$\frac{x}{r_o}=K_1k_1(t)-K_2k_2(t)\;. \tag{29}$$

Уравнение (29) характеризует изменение радиуса орбиты при наличии компенсации радиационных потерь предложенным выше способом и учитывает одновременно влияние лучистого торможения на процесс изменения радиуса равновесной орбиты. Заметим, что функция $f(t)=K_2k_2(t)$ в точности совпадает с выражением (6), отличаясь от последнего только знаком.

Характер изменения радиуса орбиты бетатрона в зависимости от фазы ускоряющего поля при совмещении компенсации радиационных потерь и смещения на мишень представлен для некоторых частных случаев на рис. 1.

Штриховыми линиями на рис. 1 обозначено в относительных единицах положение стенок вакуумной камеры, а пунктиром—относительное положение мишени. Как видно из графических построений рис. 1, можно, подбирая соответствующим образом B_m, ω_o и α, получить столкновение ускоренных электронов с мишенью в желаемой фазе ускоряющего поля и одновременно предотвратить попадание электронов на стенку камеры вследствие сокращения орбиты электронов из-за наличия лучистого торможения.

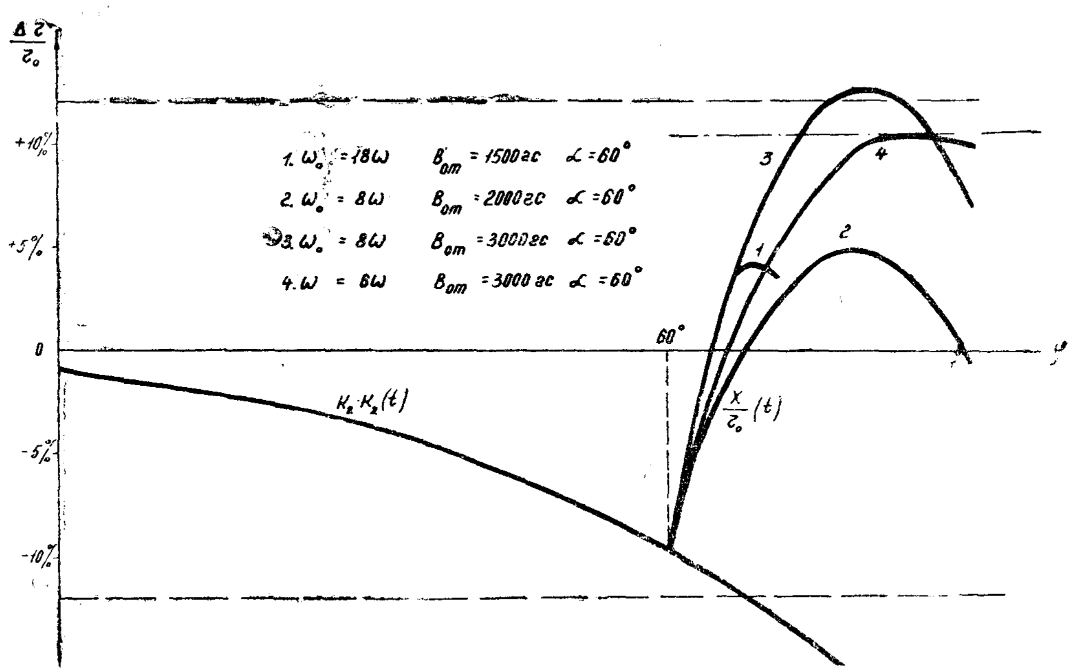

Рис. 1

Работа выполнена под руководством профессора доктора Воробьева А. А.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арцимович Л. и Померанчук И. Излучение быстрых электронов в магнитном поле, ЖЭТФ, 16, 379, 1946.