

УЧЕТ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОННОЙ ОПТИКИ

Б. Н. РОДИМОВ

(Представлено научным семинаром физико-технического факультета)

Вывод уравнения плотности

Будем называть фокусирующую систему однородной системой с осью фокусирования z , если действие магнитного или электростатического поля, образующего систему, может быть заменено действием электрического поля бесконечного цилиндрического пучка положительных зарядов, распределенных с определенной плотностью около оси фокусирования. Плотность пучка $\rho_{\text{экв}}$ (число зарядов в 1 см^3) является функцией всех координат, кроме z . Система будет неоднородной, если $\rho_{\text{экв}}$ является также функцией и координаты z .

В однородной фокусирующей системе можно мыслить равновесный электронный пучок, движущийся вдоль оси z , в котором для каждого электрона силы отталкивания между электронами уравниваются фокусирующими силами системы. Плотность такого пучка будет обозначаться через $\rho_{\text{рав}}$. По определению для однородной системы $\rho_{\text{экв}} = \rho_{\text{рав}}$ в любой точке системы.

Уравнения пучка электронов, движущихся в фокусирующей системе, для стационарного случая могут быть записаны в виде:

$$\frac{d\rho}{dt} = (\vec{v} \nabla) \rho = -\rho (\nabla \vec{v}),$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{e}{m} \vec{E}, \quad (1)$$

$$\nabla \vec{E} = \nabla \vec{E}_{\text{соб}} + \Delta \vec{E}_{\text{фок}} = -4\pi e(\rho_{\text{соб}} - \rho_{\text{экв}}),$$

где $\vec{E}_{\text{соб}}$ — напряженность собственного поля электронов и

$\vec{E}_{\text{фок}}$ — напряженность фокусирующего поля (эквивалентная напряженность, если фокусирующим полем является магнитное поле).

Вводя обозначение $L := (\vec{v} \nabla)$, можем получить выражение

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\nabla \vec{v} \cdot L\rho - \rho \cdot L(\nabla \vec{v}), \quad (2)$$

которое, если воспользоваться предыдущими соотношениями, даст:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \rho}{dt^2} - \frac{2}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \frac{4\pi e^2}{m} \rho (\rho - \rho_{экв}) + \\ & + 2\rho \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \right. \\ & \left. - \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В некоторых частных случаях последний член уравнения (3) можно определить. Получающееся в таком случае уравнение

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} - \frac{2}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \frac{4\pi e^2}{m} \rho (\rho - \rho_{экв}) + f(t) = 0 \quad (4)$$

и будем называть уравнением плотности пучка электронов.

Определив функцию $f(t)$, из уравнения плотности находим $\rho(t)$. Знание $\rho(t)$ позволяет определить конфигурацию электронного пучка в пространстве. Ниже будет показано на элементарных примерах применение метода уравнения плотности пучка.

Случай продольного взаимодействия электронов в пучке

Рассматриваем пучок электронов, движущихся вдоль оси z . Считаем, что электроны взаимодействуют между собой только в направлении движения, т. е. сил, действующих в поперечном направлении, нет. Тогда исходные уравнения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \frac{dv_z}{dt} &= v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{e}{m} E_z, \\ \frac{\partial E_z}{\partial z} &= -4\pi e (\rho - \rho_{экв}). \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда получаем

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} - \frac{2}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \frac{4\pi e^2}{m} \rho (\rho - \rho_{экв}) = 0. \quad (6)$$

Функция $f(t)$ для данного случая равна нулю. В качестве примера на данный случай можно рассмотреть задачу о пучке электронов между двумя плоскими электродами бесконечной протяженности. Для этого случая

$$E_{экв} = \text{const}; \quad \rho_{экв} = 0; \quad \frac{\partial E_{собр}}{\partial x} = -4\pi e \rho. \quad (7)$$

Уравнение плотности будет иметь вид:

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} - \frac{2}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \frac{4\pi e^2}{m} \rho^2 = 0. \quad (8)$$

Решение его

$$\rho = \frac{2\pi e^2}{m} \frac{1}{t^2 + C_1 t + C_2}. \quad (9)$$

Так как $i = e\rho v = \text{const}$, то при $t = 0$ плотность ρ должна равняться бесконечности и $v = 0$. Таким образом, $C_2 = 0$. Из условия $\left(\frac{d\rho}{dt} \right)_0 = 0$ получим $C_1 = 0$.

Окончательно

$$\rho = \frac{1}{\frac{2\pi e^2}{m} \cdot t^2}. \quad (10)$$

Далее из условия постоянства плотности тока получаем

$$v = \frac{2\pi e}{m} i t^2,$$

что дает

$$l = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi e}{m} \cdot i t^3. \quad (11)$$

С другой стороны,

$$\frac{dE}{dt} = v \frac{\partial E}{\partial x} = -4\pi e \rho v = -4\pi i; \quad E = -4\pi i t = -\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

откуда

$$\varphi = \frac{2\pi^2}{m} i^2 \cdot e \cdot t^4, \quad (12)$$

где φ — потенциал на расстоянии l от катода. Исключая t из выражений (11) и (12), находим известную зависимость между плотностью тока и потенциалом анода

$$i = \sqrt{\frac{2e}{m}} \cdot \frac{\varphi^{3/2}}{9\pi l^2}. \quad (13)$$

Случай поперечного взаимодействия электронов в пучке

Рассмотрим пучок с цилиндрической симметрией и будем считать, что электроны взаимодействуют только в поперечном по отношению к движению пучка направлении, т. е. в направлении оси z нет ускоряющих или тормозящих сил.

Если ввести обозначения $r v_r = X$ и $r E_r = Y$ и новую независимую переменную $x = \frac{r^2}{2}$, то исходные уравнения будут иметь вид:

$$\frac{d\rho}{dt} = v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = -\rho \frac{\partial X}{\partial x}, \quad (14)$$

$$\frac{dv_r}{dt} = v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = X \frac{\partial v_r}{\partial x}, \quad (15)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) = -4\pi e (\rho - \rho_{pas}) = -\frac{\partial Y}{\partial x}. \quad (16)$$

Дифференцируя первое уравнение и используя соотношение

$$\frac{dX}{dt} - v_r^2 = X \frac{\partial X}{\partial x} - v_r^2 = -\frac{e}{m} Y, \quad (17)$$

получим уравнение плотности для цилиндрического пучка:

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} - \frac{2}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \frac{4\pi e^2}{m} \rho (\rho - \rho_{pas}) + \frac{2\rho}{r} \cdot v_r \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} = 0. \quad (18)$$

Так как последний член содержит величину v_r , которую можно знать зная уже $\rho(t)$, мы берем для первого приближения значение этого члена для случая невзаимодействующих электронов. В этом случае он равен нулю. Найдя из получившегося уравнения $\rho(t)$ и используя соотношение

$$\rho r^2 = \rho_0 r_0^2, \quad (19)$$

мы можем найти радиус пучка в любой момент времени и соответствующие значения v_r и $\frac{\partial v_r}{\partial r}$. Подставляя в качестве последнего члена в уравнение (18) выражение, получающееся из первого приближения, мы можем

решить уравнение (18) во втором приближении. Подобным же образом получается третье приближение и т. д.

В качестве примера рассмотрим расхождение прямого свободного электронного пучка. Ограничимся пока первым приближением. Уравнение плотности сводится к уравнению

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} - \frac{2}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \frac{4\pi e^2}{m} \rho^2 = 0. \quad (21)$$

Заменяя в этом уравнении ρ на $\frac{1}{u}$, получим для u уравнение

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{4\pi e^2}{m}. \quad (22)$$

Решение его

$$u = \frac{2\pi e^2}{m} t^2 + C_1 t + C_2.$$

Или возвращаясь к ρ ,

$$\rho = \frac{1}{\frac{2\pi e^2}{m} t^2 + C_1 t + C_2}. \quad (23)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий при $t=0$, когда, например,

$$\rho(0) = \rho_0, \quad \left(\frac{d\rho}{dt} \right)_0 = 0. \quad (24)$$

В этом случае

$$\rho = \frac{\rho_0}{\frac{2\pi e^2}{m} \rho_0 t^2 + 1}. \quad (25)$$

Зная ρ , можно найти траектории крайних электронов пучка. Если считать плотность пучка в сечении постоянной, получаем для радиуса пучка в любом сечении

$$\rho r^2 = \rho_0 r_0^2,$$

отсюда

$$\frac{r^2}{r_0^2} = 1 + \frac{2\pi e^2}{m} \rho_0 t^2. \quad (26)$$

При малых значениях члена по сравнению с единицей получим

$$\frac{r}{r_0} = 1 + \frac{\pi e^2}{m} \rho_0 t^2. \quad (27)$$

Заменяя плотность пучка через плотность тока по формуле $\rho_0 = \frac{i_0}{ev_0}$

и время через $t = \frac{z}{v_0}$, будем иметь

$$\frac{r}{r_0} = 1 + 2,41 \cdot 10^4 \frac{i_0 z^2}{V_0^{3/2}}, \quad (28)$$

где z выражено в см, i_0 —в $\frac{a}{\text{см}^2}$ и V_0 —в вольтах. Такая же формула получается и обычным способом при условии, что плотность пучка по сечению постоянна и скорость в z направлении не меняется [1, 3].

Учет одновременного продольного и поперечного взаимодействий электронов

Для учета продольного и поперечного взаимодействий электронов в пучке можно представить плотность пучка в виде среднего геометрического между плотностью с учетом только поперечного взаимодействия и плотностью с учетом только продольного взаимодействия, т. е.

$$\rho = \sqrt{\rho_+ \cdot \rho_-}. \quad (29)$$

В приближении, при котором „поперечная“ плотность удовлетворяет тому же уравнению, что и „продольная“, учет существования поперечного и продольного взаимодействий сводится только к оценке скорости частиц в направлении оси z . При учете только поперечного взаимодействия эта

скорость постоянна и равна $v_{z0} = \frac{z}{t}$. При учете только продольного взаимодействия эта скорость находится из уравнения

$$\frac{d^2 v_z}{dt^2} = \frac{4 \pi e^2}{m} (\rho - \rho_{\text{экс}}) v_z, \quad (30)$$

которое решается разложением в ряд, если известна зависимость от времени $(\rho - \rho_{\text{экс}})$. Учитывать одновременное существование продольного и поперечного взаимодействий можно подсчетом расстояния, на котором плотность пучка имеет данное значение. При учете только поперечного взаимодействия это расстояние равно $z_+ = v_{z0} \cdot t$. При учете только продольного взаимодействия это расстояние равно $z_- = \int_0^t v_z dt$. При учете обоих взаимодействий можно взять

$$z = \sqrt{z_+ \cdot z_-}. \quad (31)$$

Для продольного взаимодействия свободного пучка электронов без внешнего поля из уравнения (30) получим в первом приближении

$$v_z = v_{z0} \left(1 + \frac{2 \pi e^2}{m} \rho_0 t^2 \right). \quad (32)$$

Плотность для прямого пучка при учете продольного взаимодействия будет выражаться прежней формулой (20). Только время t через расстояние z должно заменяться из формулы

$$z \approx v_{z0} \cdot t \left(1 + \frac{\pi e^2 \rho_0 t^2}{3 m v_{z0}} \right). \quad (33)$$

Ясно, что при малых ρ_0 или t или при больших скоростях v_{z0} не имеет смысла учитывать продольное взаимодействие.

Электронный пучок в фокусирующем поле

В качестве примера возьмем электростатическую линзу, описываемую потенциальной функцией вида [2]

$$\varphi(z, r) = p \left(z^2 - \frac{r^2}{2} \right). \quad (34)$$

Для начала пренебрегаем зависимостью φ от z , т. е. силами в направлении оси z . Эквивалентная плотность вычисляется из выражения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -4 \pi e \rho_{\text{экс}}^+. \quad (35)$$

Получаем

$$\rho_{\text{экс}}^+ = \frac{p}{2 \pi e}. \quad (36)$$

Решение уравнения плотности дает:

$$\rho_+ = \frac{\rho_{\text{экс}}^+}{1 - \left(1 - \frac{\rho_{\text{экс}}^+}{\rho_0}\right) \cos \sqrt{\frac{4\pi e^2}{m} \rho_{\text{экс}}^+ t}} \quad (37)$$

при начальных условиях $\rho(0) = \rho_0$ и $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_0 = 0$.

Если рассматривать только продольное взаимодействие, получим:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi e \rho_{\text{экс}}^- \quad (38)$$

и

$$\rho_{\text{экс}}^- = -\frac{P}{2\pi e} = -\left|\rho_{\text{экс}}^+\right|. \quad (39)$$

Решение уравнения плотности будет иметь вид:

$$\rho_- = \frac{2\left|\rho_{\text{экс}}^+\right|}{e^{\sqrt{b_1 \cdot t + b_2}} + e^{-\sqrt{b_1 \cdot t}} - 2}, \quad (40)$$

где $b_1 = \frac{4\pi e^2}{m} \left|\rho_{\text{экс}}^+\right|$.

Постоянная b_2 имеет значение $\ln\left(1 + \frac{\left|\rho_{\text{экс}}^+\right|}{\rho_0}\right)$. Начальные условия прежние, т. е. $\rho(0) = \rho_0$ и $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_0 = 0$.

„Полная“ плотность будет выражаться довольно сложно:

$$\rho = \frac{\sqrt{2}\left|\rho_{\text{экс}}^+\right|}{\left[e^{\sqrt{b_1 \cdot t + b_2}} + e^{-\sqrt{b_1 \cdot t}} - 2\right]^{1/2} \left[1 - \left(1 - \frac{\left|\rho_{\text{экс}}^+\right|}{\rho_0}\right) \cos \sqrt{b_1 \cdot t}\right]^{1/2}} \quad (41)$$

Для $\frac{r}{r_0}$ получается уравнение

$$\begin{aligned} \frac{r^4}{r_0^4} &= \frac{\rho_0^3}{2\left|\rho_{\text{экс}}^+\right|^2} \left[e^{\sqrt{b_1 \cdot \frac{z}{v_0}} + b_2} + e^{-\sqrt{b_1 \cdot \frac{z}{v_0}}} - 2 \right] \times \\ &\times \left[1 - \left(1 - \frac{\left|\rho_{\text{экс}}^+\right|}{\rho_0}\right) \cos \sqrt{b_1 \cdot \frac{z}{v_0}} \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

Здесь положено $t = \frac{z}{v_0}$.

Прохождение электронного пучка через рассеивающую электронную линзу

Представим себе электронную линзу, образованную облаком электронов с плотностью вдоль оси z , выражаемой формулой

$$\rho_{\text{линза}} = n \cdot \rho_0 e^{-\frac{(z-z_0)^2}{a^2}}, \quad (43)$$

где ρ_0 — начальная плотность пучка, n — число, показывающее во сколько раз наибольшая плотность электронного облака, образующего линзу, больше начальной плотности электронного пучка. Уравнение плотности для этого случая сведется к

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{4\pi e^2}{m} \rho_{\text{линза}} \cdot u = \frac{4\pi e^2}{m}, \quad (44)$$

где $\rho = \frac{1}{u}$. Уравнение решается методом последовательных приближений. Во втором приближении получаем для u (при условии, что $\left(\frac{du}{dt}\right)_0 = 0$) выражение

$$u = u_0 + \frac{at^2}{2} + au_0 \int_0^t \varphi dt. \quad (45)$$

Для самой плотности будем иметь

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \frac{a\rho_0 t^2}{2} + a \int_0^t \varphi dt}. \quad (46)$$

Здесь

$$a = \frac{4\pi e^2}{m}, \quad \varphi = n\rho_0 \int_0^t e^{-\frac{v_0^2}{a^2}(t-t_0)^2} dt.$$

Далее обычным путем находим выражение для радиусов пучка. Описанный метод может оказаться полезным при расчете электронных пучков на большие токи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брюхе Э. и Рекнагель, *Электронные приборы*, Госэнергоиздат, Москва, 1949
2. Вайнриб Е. А., Милютин В. И. *Электронная оптика*, Госэнергоиздат, Москва 1951.
3. Габович М. Д. УФН, т. LVI, вып. 2, 1955.