ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
Том 87 ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА 1957 г.

О ВЛИЯНИИ ИЗЛУЧЕНИЯ НА РАДИАЛЬНО-ФАЗОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЭЛЕКТРОННЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЯХ НА БОЛЬШИЕ ЭНЕРГИИ

А. Н. ДИДЕНКО

(Представлено проф. д-р. физ.-мат. наук А. А. Воробьевым)

1. Вопрос о движении электрона с учетом квантового характера излучения имеет большое теоретическое и практическое значение и поэтому широко обсуждается в литературе. С теоретической точки зрения он интересен в качестве примера квантово-механического возбуждения макроскопических колебаний; с практической — этот вопрос важен потому, что позволяет конструировать ускорительные установки с учетом новых эффектов, которые должны проявиться уже при энергиях, доступных современной технике, и оценить верхний предел энергий, достижимых на обычных циклических ускорителях.

Влияние квантового характера излучения на траекторию движения электрона впервые было предсказано и исследовано в работах А. А. Соколова и И. М. Тернова [1, 2]. Ими было показано, что при движении электрона в аксиально-симметричном постоянном магнитном поле флуктуации радиуса, связанные с квантовым характером излучения, приводят к возбуждению быстро возрастающих со временем радиальных и азимутальных бетатронных колебаний. При движении электрона в синхротроне эти же квантовые флуктуации излучения должны влиять и на так называемые радиально-фазовые колебания. В работах М. Сандса [3], А. А. Соколова, И. М. Тернова и Г. М. Страховского [4], А. Н. Матвеева [5], А. А. Коломенского [6] получены формулы, определяющие величину среднего квадратичного отклонения фазы для обычных ускорителей и ускорителей с жесткой фокусировкой, и произведены конкретные расчеты. Оказалось, что колебания фазы, индуцированные излучением, довольно значительны. Существование этих колебаний приводит к тому, что равновесная фаза φ_s не может быть выбрана меньшей некоторого минимального значения, если мы хотим избежать дополнительных потерь электронов, обусловленных колебаниями фазы. Так, проводя в [5] вычисления среднего квадратичного отклонения фазы для машины с вполне определенными параметрами ($E = 1$ *Бев*, $R = 3{,}5$ *м*) и полагая, что эта величина достигает своего максимального значения в конце цикла ускорения, автор показал, что для ускорителей со слабой фокусировкой минимальное значение фазы не должно быть меньше $0{,}2\pi$.

В настоящей работе исследуется характер индуцированных излучением радиально-фазовых колебаний в ускорителях со слабой фокусировкой на протяжении всего цикла ускорения в зависимости от различных режимов работы и обсуждается вопрос о максимальных энергиях, достижимых на таких машинах.

2. Уравнение радиально-фазовых колебаний с учетом излучения хорошо известно и может быть получено различными методами [3, 4, 5, 6]. Проще всего получить его из уравнения баланса энергии:

$$\frac{d}{dt}(E-E_s)=\frac{\omega_s}{2\pi}\left\{eV_o(\cos\varphi-\cos\varphi_s)-(I-I_s)\right\}, \tag{1}$$

где E—энергия частицы, V_o—амплитуда высокочастотного напряжения на щели, φ—фаза прохождения электроном ускоряющей щели, $I=\frac{4\pi}{3}\frac{e^2}{R}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^4$—энергия, излучаемая электроном за один оборот. Индексом s обозначены значения этих же величин для равновесной частицы. В общем случае V_o и φ_s являются функциями времени. Обозначая через L длину всех прямолинейных участков в синхротроне, а через $\psi=\varphi-\varphi_s$—отклонение фазы от равновесного значения и считая, что ускорение производится на k-й гармонике высокочастотного поля, получаем равенство:

$$\frac{\Delta E}{E}=(1-n)\frac{\lambda^2}{k}\frac{\dot\psi}{\omega_o}, \tag{2}$$

где

$$\lambda=1+\frac{L}{2\pi R_s}; \qquad \omega_o=\omega\lambda=\frac{c}{R}.$$

Подставляя (2) в (1), получаем уравнение для фазовых колебаний:

$$\ddot\psi+\gamma\dot\psi+\Omega^2\psi=0, \tag{3}$$

где

$$\gamma=\left(\frac{\dot E}{E}+\frac{(3-4n)}{(1-n)}\frac{W}{E}\right); \qquad \Omega^2=\frac{k\omega_o}{\lambda}\frac{\operatorname{tg}\varphi_s}{(1-n)}\frac{(\dot E+W)}{E},$$

$\dot E$—энергия, приобретаемая электроном в единицу времени; W—мощность излучения.

Решение этого уравнения

$$\psi=\psi_o e^{-\frac{1}{2}\int_o^t \gamma dt'}\cos(\Omega t+\varphi_o) \tag{4}$$

характеризует изменение фазы со временем, вызванное неквантовым характером излучения. Квантовый характер излучения может быть учтен или добавлением в правую часть соответствующих флуктуационных членов и решением получившегося неоднородного уравнения [7] или суммированием по всем частотам величин, характеризующих изменение фазы, вызванное отдельным актом излучения, умноженных на вероятности излучения с последующим интегрированием получившегося выражения по времени. В обоих случаях для среднего квадратичного отклонения получаем выражение:

$$\overline{\psi^2}(t)=\frac{55}{48\sqrt{3}}\frac{k}{\lambda^3}\frac{e^2\frac{h}{2\pi}c}{(1-n)R^4m}\int_o^t e^{-\int_{t'}^t\gamma dt''}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^6\frac{\operatorname{ctg}\varphi_s(t')}{(\dot E+W)}dt'=$$

$$=\frac{55}{48\sqrt{3}}\frac{k}{\lambda^3}\frac{e^2\frac{h}{2\pi}c}{(1-n)R^4m}\frac{mc^2}{E(t)}e^{-\int_o^t\frac{(3-4n)}{(1-n)}\frac{W}{E}dt'}\int_o^t e^{\int_o^{t'}\frac{(3-4n)}{(1-n)}\frac{W}{E}dt''}\times$$

$$\times\left(\frac{E}{mc^2}\right)^7\frac{\operatorname{ctg}\varphi_s(t')}{(\dot E+W)}dt'. \tag{5}$$

Если в (5) пренебречь $\dot{E}$ по сравнению с W и поставить конкретное значение для W, то получим формулу для $\overline{\psi^2}(t)$, совпадающую с формулой, полученной в [5].

Формула (5) позволяет исследовать, каким образом меняется среднее квадратичное отклонение фазы со временем.

Рассмотрим важный для практики случай, когда энергия частицы увеличивается по линейному закону, т. е. $E = E_0 \frac{t}{T} = E_0\xi$, где E_0 — энергия частиц в конце ускорения, T — время ускорения частицы.

Тогда:

$$\overline{\psi^2}(\xi) = \frac{55}{48\sqrt{3}} \frac{k}{\lambda^3} \frac{e^2 \frac{h}{2\pi} cT}{(1-n)R^4 m} \frac{mc^2}{E(\xi)} e^{\frac{\alpha\xi^4}{4}} \int_0^t e^{-\frac{\alpha\xi'^4}{4}} \frac{\mathrm{ctg}\varphi_s(\xi')}{(E+W)} d\xi', \tag{6}$$

где

$$\alpha = \frac{2}{3} \frac{(3-4n)}{(1-n)} \frac{r_0 cT}{\lambda R^2} \left(\frac{E_0}{mc^2}\right)^3; \qquad r_0 = \frac{e^2}{mc^2}.$$

3. Если $\dot{E} \ll W$ и $\mathrm{ctg}\,\varphi_s = \mathrm{const}$, то

$$\overline{\psi^2}(\xi) = \frac{55\sqrt{3}}{64} \frac{k}{\lambda} \frac{\frac{h}{2\pi}c}{e^2} \frac{\mathrm{ctg}\,\varphi_s}{(3-4n)} \frac{mc^2}{E(\xi)} \left(1 - e^{-\frac{\alpha\xi^4}{4}}\right). \tag{7}$$

Растягивая пределы интегрирования до бесконечности, из (7) получаем формулу Сандса. Исследуем характер этой функции. Дифференцируя по ξ и приравнивая получившееся выражение нулю, получаем уравнение:

$$1 + \alpha\xi^4 - e^{\frac{\alpha\xi^4}{4}} = 0, \tag{8}$$

из которого находим экстремальное значение для ξ. Не трудно убедиться, что это будет максимум функции. Решая уравнение (8), получаем:

$$\xi = \sqrt[4]{\frac{28}{3\alpha}}. \tag{9}$$

Для машины с параметрами, приведенными в статье Сандса [3] ($E = 1{,}5$ *Бэв*; $R = 375$ *см*; $n = 0{,}6$; $\lambda = 1{,}25$), получаем: $\alpha = 242{,}88$; $\xi_{max} = 0{,}447$; $E_{max} = 670$ *Мэв*. Отсюда следует, что если бы величина равновесной фазы оставалась постоянной в течение всего цикла ускорения, то среднее квадратичное отклонение было бы наибольшим не в конце ускорения, а при $\xi = 0{,}447$.

Поэтому минимальное значение равновесной фазы надо было бы определить не по величине среднего квадратичного отклонения в конце ускорения, как это делалось авторами вышеперечисленных статей [3, 5], а по его значению $\xi = 0{,}447$. Правда, значение среднего квадратичного отклонения в максимуме мало отличается от его значения в конце ускорения для машины с указанными в [3] параметрами

$$\overline{\psi^2}_{max} = 2{,}05\,\overline{\psi^2}_{конеч}; \quad \sqrt{\overline{\psi^2}_{max}} = 1{,}43\sqrt{\overline{\psi^2}_{конеч}},$$

но так как к этому времени не успеют еще затухнуть фазовые колебания, не связанные с квантовым характером излучения, то обеспечить отсутствие потерь можно было бы только тогда, когда минимальное значение фазы в 2—3 раза превосходит $0{,}2\pi$. Отметим, что на существование максимума функции $\overline{\psi^2}(\xi)$ было впервые указано А. А. Коломенским [7].

4. Если не делать предположений относительно малости $\dot{E}$ и постоянства равновесной фазы, то для ускорителей с увеличивающейся по линейному закону энергией

$$\psi^2(\xi) = be^{\frac{\alpha\nu}{4}} \int_{\nu}^{\varkappa} e^{-\frac{\alpha\varkappa'}{4}} \frac{\varkappa'\gamma_1(\varkappa')}{\sqrt{1-\mu^2\varkappa'^2}}\, d\varkappa' -$$

$$- b\nu e^{\frac{\alpha\nu}{4}} \int_{\nu}^{\varkappa} e^{-\frac{\alpha\varkappa'}{4}} \frac{\gamma_1(\varkappa')}{\sqrt{1-\mu^2\varkappa'^2}}\, d\varkappa', \tag{10}$$

где

$$b = \frac{55}{192\sqrt{3}} \cdot \frac{k}{\lambda^3} \cdot \frac{e^2 \frac{h}{2\pi} cT}{(1-n)R^4 m} \left(\frac{E_o}{mc^2}\right)^7 \frac{mc^2}{E(\xi)} e^{-\frac{\alpha\xi^4}{4}};$$

$$\alpha = \frac{2}{3}\left(\frac{3-4n)}{(1-n)} \frac{r_o cT}{\lambda R^2}\left(\frac{E_o}{mc^2}\right)^3; \qquad \delta = \frac{2}{3}\frac{e^2 c}{\lambda R^2}\left(\frac{E_o}{mc^2}\right)^4;$$

$$\nu = \frac{\dot{E}}{\delta}; \qquad \mu = \frac{2\pi\lambda\delta}{\omega_o e v_o(\xi)} = \frac{2\pi\lambda\delta}{\omega_o e v_o(o)(1+\beta\xi)} = \frac{\mu_o}{(1+\beta\xi)};$$

$$\gamma_1 = \frac{2\pi\lambda}{\omega_o e v_o(\xi)}; \qquad \varkappa = \eta + \nu; \qquad \eta = \xi^4.$$

В общем случае интегралы, входящие в (10), не вычисляются. Однако, воспользовавшись тем, что величина $\mu^2\varkappa^{12}$ значительно меньше единицы, и считая функцию $V_O(\xi)$ известной в каждый момент времени и ограничиваясь в разложении $\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2\varkappa^{12}}}$ двумя первыми членами (т. е. считаем, что $\operatorname{ctg}\varphi_s = \cos\varphi_s + \frac{1}{2}\cos^3\varphi_s$, что верно для $90^\circ \geqslant \varphi_s \geqslant 60^\circ$ и дает ошибку порядка 10% с занижением при $\varphi_s = 45^\circ$), получаем:

$$\psi^2(\xi) = \frac{a}{\xi(1+\beta\xi)}\left\{\eta\left(1+A\frac{\mu^2}{2}\right) - \frac{4}{\alpha}\left(1-e^{-\frac{\alpha\eta}{4}}\right)\left(1+B\frac{\mu^2}{2}\right)\right\}, \tag{11}$$

где

$$a = \frac{55\sqrt{3}}{96} \cdot \frac{k}{\lambda} \cdot \frac{2\pi}{(3-4n)} \cdot \frac{hc}{e V_o(o) R}\left(\frac{E_o}{mc^2}\right)^3;$$

$$A = (\nu+\eta)^2 - \frac{16\nu}{\alpha} + \frac{96}{\alpha^2} - \frac{12\eta}{\alpha};$$

$$B = \nu^2 - \frac{16\nu}{\alpha} + \frac{96}{\alpha^2}.$$

Подставляя конкретные значения входящих в формулу (11) величин ($\alpha = 242{,}88$; $\mu_O^2 = 144{,}72$; $\nu = 0{,}00625$; $a = 4{,}444$; $\beta = 20$; $k = 4$) и проводя численный расчет, получаем значения для среднего квадратичного и корня квадратного из среднего квадратичного отклонений $\overline{\psi^2}(\xi)$ и $\sqrt{\overline{\psi^2}(\xi)}$ (рис. 1 и 2).

Из рис. 2 видно, что $\sqrt{\overline{\psi^2}}(\xi)$, начиная со времени $\xi = 0{,}2$, растет по линейному закону, достигая значения $\sqrt{\overline{\psi^2}}(\xi) = 0{,}493$ в конце ускорения.

Для практики важна не сама величина $\overline{\psi^2}(\xi)$, а ее амплитудное значение $\overline{\psi_0^2}$, определяющее условия, при которых электроны не выпадают из режима ускорения. Учтя, что $\overline{\psi_0^2} = 2\,\overline{\psi^2}(\xi)$, а $\varphi_{smin} = \dfrac{\sqrt{\overline{\psi^2}}}{\sqrt{2}}$, получим выра-

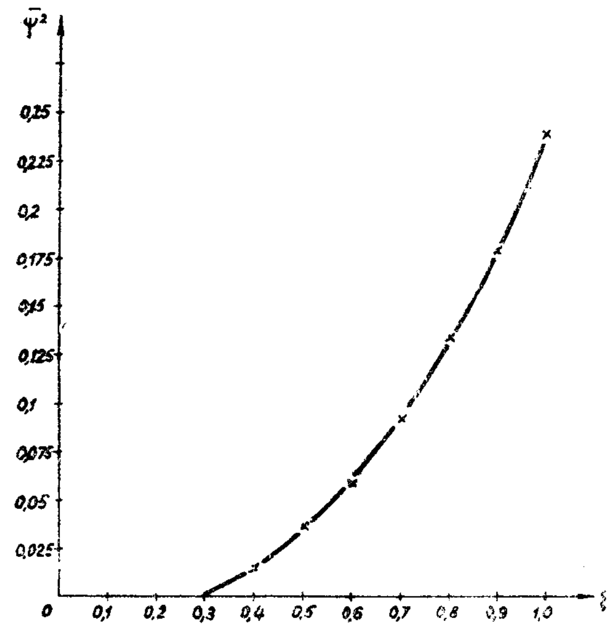

Рис. 1

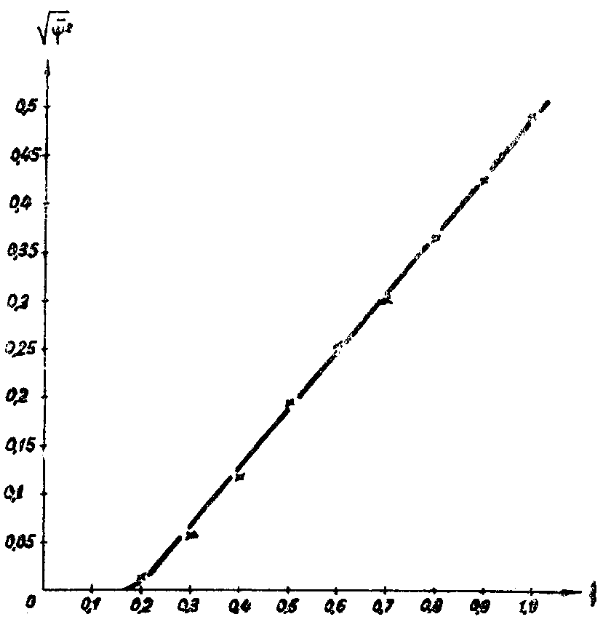

Рис. 2

жение для минимального значения фазы: $\varphi_{smin} = 19{,}9^\circ$. Если выбрать кратность $k = 6$, то при тех же условиях $\varphi_{smin} = 24^\circ$.

С колебаниями фазы, описываемыми [5] равенством, связаны колебания среднего радиуса, характеризуемые средним квадратичным отклонением. Из формул (2) и (4) следует, что

$$\overline{\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2} = \frac{2}{3}\,\frac{\lambda}{k}\,\frac{r_0}{R}\,\frac{\operatorname{tg}\varphi_s(\xi)}{(1-n)}\left(\frac{E_0}{mc^2}\right)^3 \xi^3\left(1+\frac{\nu}{\xi^4}\right)\overline{\varphi^2}(\xi). \qquad (12)$$

Проводя непосредственный расчет, получаем, что в конце ускорения $\sqrt{\overline{(\Delta r)^2}} \simeq 0{,}7$ *см*. Отсюда видно, что колебания среднего радиуса малы и не накладывают значительных ограничений на параметры машины.

5. Из рассмотренного выше видно, что вид функции $\overline{\psi^2}(\xi)$ существенно зависит от того, является ли постоянной или меняется во времени равновесная фаза φ_s. Это видно из простых соображений: $\overline{\psi^2}(\xi) \simeq \frac{1}{E(\xi)}.\operatorname{ctg}\varphi_s.e^{-\frac{\alpha\xi^4}{4}}$. Эта функция имеет максимум, если $\varphi_s = \mathrm{const}$ и не имеет его, если с ростом $\xi \operatorname{ctg}\varphi_s$ растет быстрее, чем ξ (т. е. $\operatorname{ctg}\varphi_s \sim \xi^n$; $n > 1$). Поскольку на практике обычно φ_s не является постоянной величиной, то все вычисления, проведенные при постоянном $\operatorname{ctg}\varphi_s$, вряд ли имеют большое значение. Кроме того, даже если бы такой случай и можно было бы осуществить, то он оказался бы крайне нежелательным, так как в этом случае необходимо производить расчет для времени $\xi = 0{,}477$ и учитывать, что обычные фазовые колебания к этому времени еще не успеют затухнуть и поэтому их необходимо учитывать наряду с фазовыми колебаниями, индуцированными квантовым характером излучения.

Заметим еще, что если произвести вычисления для машины с такими же параметрами, но в которой частицы достигают максимальных энергий за время, которое примерно на порядок меньше вышеприведенного ($T=0{,}03$), то вычисления приводят к следующему: квантовые флуктуации начинают оказывать влияние при более высоких энергиях ($\xi = 0{,}4$) и затем $\sqrt{\overline{\psi^2}(\xi)}$ растет тоже по линейному закону, достигая в конце ускорения значения, очень мало отличающегося от приведенного выше.

Наконец, можно определить, при каких энергиях на выходе из ускорителя E_0 фазовые колебания, обусловленные квантовым характером излучения, будут настолько велики, что необходимо для избежания потерь частиц выбирать равновесную фазу вблизи значения $\frac{\pi}{2}$ (т. е., когда частица ничего не получает от высокочастотной системы и синхротрон должен был бы перестать ускорять частицы). Вычисления приводят к следующему выражению для энергии:

$$E_0 = mc^2\sqrt{\frac{24\pi}{55\sqrt{3}}\,\frac{e^2}{\frac{h}{2\pi}c}\,(3-4n)\,\frac{\lambda}{k}\,\frac{V_0(1)}{Hr_0}}\,, \qquad (13)$$

где $V_0(1)$—амплитуда высокочастотного напряжения в конце ускорения; H—напряженность магнитного поля; $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$—радиус электрона. Для разумных значений величин, входящих в (13), получаем $E_0 \simeq 10$ Б*эв*, т. е. получение энергий выше 10 Б*эв* в обычных ускорителях со слабой фокусировкой невозможно из-за быстрого роста фазовых колебаний, вызванных квантовым характером излучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов А. А., Тернов И. М. ДАН СССР, 92, 537 (1953); ЖЭТФ, 25, 698, 1953.
2. Соколов А. А., Тернов И. М. ДАН СССР, 97, 823 (1954); ЖЭТФ, 28, 432, 1955.
3. M. Sands, Phys. Pev., 97, 470, 1955.
4. Соколов А. А., Тернов И. М., Страховский Г. М. ЖЭТФ, 31, 439, 1956.
5. Матвеев А. Н., ДАН СССР, 108, № 3, 1956.
6. Коломенский А. А. ЖЭТФ, 30, 207, 1956.
7. Коломенский А. А. Доклад на Женевской конференции, 1956.