ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 89 1957 г.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОЛЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ И ВЛАЖНОСТИ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕРМО- И ВЛАГОПРОВОДНОСТИ

С. П. КУЗНЕЦОВ

Существующие стационарные методы определения коэффициентов термовлагопроводности требуют сложной аппаратуры и большой длительности опыта. Методы нестационарного массообмена для определения коэффициента влагопроводности k из кривых распределения влажности внутри материала в процессе сушки пригодны при изотермических условиях, когда температура тела неизменна и температурный градиент отсутствует. Предлагаемый нами метод определения коэффициентов термовлагопроводности k и δ лишен этих существенных недостатков и основан на измерении поля влажности при нестационарном поле температур. Теория метода основана на решении дифференциальных уравнений тепло-и влагообмена влажных тел сферической формы в среде с постоянной температурой. Задача ставится так.

Имеем тело шарообразной формы при температуре t_0 и влажности u_0. В начальный момент времени поверхность тела мгновенно принимает температуру, равную t_c, (в частном случае $t_c = 0$), которая и поддерживается постоянной на протяжении всего процесса охлаждения. Тело на поверхности имеет влагоизоляцию, хорошо проводящую тепло (металлическую оболочку), в результате чего средняя влажность тела остается неизменной и равной начальной влажности. Требуется определить поле влажности и поле температуры для любого момента времени, при условии, что перемещение влаги под влиянием температурного градиента происходит в виде жидкости. Математически задача формулируется системой дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial [rt(r,\tau)]}{\partial(\tau)} = a . \frac{\partial^2 [rt(r,\tau)]}{\partial r^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial [ru(r,\tau)]}{\partial \tau} = k \frac{\partial^2 [ru(r,\tau)]}{\partial r^2} + k\delta \frac{\partial^2 [rt(r,\tau)]}{\partial r^2}$$

с краевыми условиями:

$$t(r,o) = t_0$$

$$u(r,o) = u_0$$

$$\frac{\partial t(or)}{\partial r} = \frac{\partial u(o\tau)}{\partial r} = 0$$

$$t(R\tau) = 0$$

$$\frac{3}{R^3}\int_0^R r^2 u(r,\tau)dr = u_o,$$

где R—радиус шара,

t, u — соответственно температура и влажность в любой точке шара,

k — коэффициент влагопроводности,

δ — коэффициент термовлагопроводности.

Применяя преобразование Лапласа к уравнению первому системы (1)

$$L[t(r,\tau) = \int_0^\infty t(r,\tau)e^{-s\tau}d\tau = T(r,s),$$

после хорошо известных операций получим функцию распределения температуры для шара

$$\Theta(r,\tau) = \frac{t(r,\tau)-t_c}{t_o-t_c} = \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1} \frac{R\, sh\mu_n \frac{r}{R}}{r\mu_n} e^{-\mu_n^2 F_o}, \tag{2}$$

где $\Theta(r,\tau)$—относительная температура,

$F_o = \frac{a\tau}{R^2}$ —термический критерий Фурье,

$\mu_n = i\sqrt{\frac{s}{a}}\,R = n\pi$, $(n = 1, 2, 3\ldots)$—множество корней уравнения

$$sh\sqrt{\frac{s}{a}}\,R = 0.$$

При использовании равенства (2) при малых критериях Фурье ($F < 0{,}1$) приходится брать несколько первых членов разложения, при значительных критериях Фурье ($F_o > 0{,}1$) ряд сходится очень быстро и для расчета можно использовать только первый член разложения. Ошибка приближенного решения может быть легко определена.

Применяя преобразование Лапласа к уравнению второму системы (1)

$$L\,[u(r,\tau)] = \int_0^\infty u(r,\tau)\,e^{-s\tau}d\tau = F(r,s)$$

$$L\,[ru(r,\tau)] = U(r,s) = rF(r,s)$$

$$L\,[rt(r,\tau)] = V(r,s) = rT(r,s),$$

будем иметь

$$k\,U''(r,s) + k\delta V''(r,s) = sU(r,s) - ru_o.$$

Зная, что

$$V(r,s) = \frac{(t_c - t_o)\,R\,sh\sqrt{\frac{s}{a}}\,r}{S\,sh\sqrt{\frac{s}{a}}\,R} + \frac{t_o r}{s},$$

можно написать

$$k\,U''(r,s)-s\left[U(r,s)-\frac{ru_o}{s}\right]+\frac{(t_c-t_o)\,R\,sh\sqrt{\frac{s}{a}}\,r.k\delta}{a\,sh\sqrt{\frac{s}{a}}\,R}=0\,.$$

Используя еще раз преобразование Лапласа, но уже относительно r

$$L_r\,[U(r,s)]=\int\limits_o^\infty e^{-Sr}\,U(r,s)\,dr=\Theta(S,s),$$

после некоторых преобразований получим

$$\Theta\,(S,s)=U(o,s)\frac{S}{S^2-\frac{s}{k}}+\frac{U'(o,s)}{S^2-\frac{s}{k}}-\frac{u_o}{kS^2\left(S^2-\frac{s}{k}\right)}+\frac{D}{\left(S^2-\frac{s}{a}\right)\left(S^2-\frac{s}{k}\right)},\quad(3)$$

где

$$D=\frac{\delta(t_o-t_c)\,R\sqrt{\frac{s}{a}}}{a\,sh\sqrt{\frac{s}{a}}\,R}\,.$$

Применяя к равенству (3) обратное преобразование Лапласа, найдем изображение функции распределения влажности в шаре:

$$F(r,s)=\frac{A}{r}\,ch\sqrt{\frac{s}{k}}\,r+\frac{B}{r}\,sh\sqrt{\frac{s}{k}}\,r+\frac{u_o}{s}+$$

$$\frac{\delta(t_o-t_c)\,R\left[sh\sqrt{\frac{s}{a}}\,r-\sqrt{\frac{k}{a}}.sh\sqrt{\frac{s}{k}}.r\right]}{rs\left(1-\frac{a}{k}\right).sh\sqrt{\frac{s}{a}}\,R}\,.$$

Для определения коэффициентов A и B используем краевые условия, которые для изображения будут иметь вид:

$$F'(o,s)=0$$

и

$$\frac{3}{R^3}\int\limits_o^\infty r^2F(r,s)\,dr=\frac{u_o}{s}\,.$$

Определив коэффициенты A и B, напишем изображение функции распределения влажности

$$F(r,s)-\frac{u_o}{s}=$$

$$=\frac{\delta\,(t_o-t_c)\,R}{r(k-a)}\left[\frac{k\,sh\sqrt{\frac{s}{a}}\,r\left(\sqrt{\frac{s}{k}}\,R\,ch\sqrt{\frac{s}{k}}\,R-sh\sqrt{\frac{s}{k}}\,R\right)}{s.sh\sqrt{\frac{s}{a}}\,R\left(\sqrt{\frac{s}{k}}\,R\,ch\sqrt{\frac{s}{k}}\,R-sh\sqrt{\frac{s}{k}}\,R\right)}-\right.$$

$$
-\frac{a\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\,R\,ch\sqrt{\frac{s}{a}}\,R-sh\sqrt{\frac{s}{a}}\,R\right)\cdot sh\sqrt{\frac{s}{k}}\,r}{s\cdot sh\sqrt{\frac{s}{a}}\,R\left(\sqrt{\frac{s}{k}}\,R\,ch\sqrt{\frac{s}{k}}\,R-sh\sqrt{\frac{s}{k}}\,R\right)}\Bigg] . \qquad (4)
$$

Для определения оригинала $U(r,\tau)$ по изображению (4) воспользуемся теоремой разложения.

Обозначим через

$$
\Phi(s)=k\,sh\sqrt{\frac{s}{a}}\,r\left(\sqrt{\frac{s}{k}}\,R\,ch\sqrt{\frac{s}{k}}\,R-sh\sqrt{\frac{s}{k}}\,R\right)-
$$

$$
-a\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\,R\,ch\sqrt{\frac{s}{a}}\,R-sh\sqrt{\frac{s}{a}}\,R\right)sh\sqrt{\frac{s}{k}}\,r
$$

и

$$
\psi(s)=s\,sh\sqrt{\frac{s}{a}}\,R\left(\sqrt{\frac{s}{k}}\,R\,ch\sqrt{\frac{s}{k}}\,R-sh\sqrt{\frac{s}{k}}\,R\right).
$$

Корнями полинома $\psi(s)$ будут:

1. $s=0$
2. Корни уравнения $\sin i\sqrt{\frac{s}{a}}\,R=0$, т. е. $s_n=-\frac{\mu_n^2 a}{R^2}$,

где

$$
\mu_n=i\sqrt{\frac{s}{a}}\,R=n\pi, \qquad n=1,\ 2,\ 3,\dots
$$

3. Корни уравнения

$$
\sqrt{\frac{s}{k}}\,R\,ch\sqrt{\frac{s}{k}}\,R-sh\sqrt{\frac{s}{k}}\,R=0,
$$

т. е. $s_m=-\frac{\mu_m^2\cdot k}{R^2}$, где $\mu_m=i\sqrt{\frac{s}{k}}\,R.$

Постоянные μ_m определяются из характеристического уравнения

$$
\operatorname{tg}\mu_m=\mu_m .
$$

Это уравнение имеет бесчисленное множество действительных корней, о чем легко заключить по бесчисленному множеству точек пересечения тангенсоиды $y=\operatorname{tg}\mu$ с прямой $y=\mu$.

Первые четыре корня этого уравнения будут:

$$
\mu_1=0{,}0000;\quad \mu_2=4{,}4934;\quad \mu_3=7{,}7252 \quad \text{и} \quad \mu_4=10{,}9041.
$$

Переходя от операционного решения (4) к оригиналу, получим

$$
u(r,\tau)-u_0=
$$

$$
=\frac{\delta(t_0-t_c)R}{r(k-a)}\left[\lim_{s\to 0}\frac{\Phi(s)}{\psi'(s)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi(s_n)}{\psi'(s_n)}e^{s_n\cdot\tau}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi(s_m)}{\psi'(s_m)}e^{s_m}\right], \qquad (5)
$$

где

$$\psi'(s) = sh\sqrt{\frac{s}{a}}R\left(\sqrt{\frac{s}{k}}\,R\,ch\sqrt{\frac{s}{k}}R - sh\sqrt{\frac{s}{k}}R\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{a}}\,R\,ch\sqrt{\frac{s}{a}}R\left(\sqrt{\frac{s}{k}}\,R\,ch\sqrt{\frac{s}{k}}R - sh\sqrt{\frac{s}{k}}R\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{k}}R\cdot\sqrt{\frac{s}{k}}R.sh\sqrt{\frac{s}{k}}R.sh\sqrt{\frac{s}{a}}R\,.$$

После некоторых преобразований найдем, что

$$\lim_{s\to 0}\frac{\Phi(s)}{\psi'(s)} = 0\,.$$

Заменяя в равенстве (5) каждое слагаемое соответствующей величиной, получим функцию распределения влажности в шаре при заданных краевых условиях

$$\vartheta(r,\tau) = \frac{u(r,\tau)-u_o}{u_o} =$$

$$= \frac{\delta(t_o-t_c)R}{r\,u_o\left(1-\frac{a}{k}\right)}\Bigg[2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sin\sqrt{\frac{a}{k}}\mu_n - \sqrt{\frac{a}{k}}\mu_n\cos\sqrt{\frac{a}{k}}\mu_n\right)\sin\mu_n\frac{r}{R} +}{(-1)^n\mu_n\left(\sin\sqrt{\frac{a}{k}}\mu_n - \sqrt{\frac{a}{k}}\mu_n\cos\sqrt{\frac{a}{k}}\mu_n\right)}$$

$$\frac{+\mu_n(-1)^n\frac{a}{k}\sin\sqrt{\frac{a}{k}}\mu_n\frac{r}{R}}{(-1)^n\mu_n\left(\sin\sqrt{\frac{a}{k}}\mu_n - \sqrt{\frac{a}{k}}\mu_n\cos\sqrt{\frac{a}{k}}\mu_n\right)}.e^{-\mu_n^2F_o} -$$

$$-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(\sin\sqrt{\frac{k}{a}}\mu_m - \sqrt{\frac{k}{a}}\mu_m\cos\sqrt{\frac{k}{a}}\mu_m\right)\frac{a}{k}\sin\mu_m\frac{r}{R}}{\mu_m^2\sin\mu_m.\sin\sqrt{\frac{k}{a}}\mu_m}.e^{-\mu_m^2.\frac{k}{a}.F_o}\Bigg], \tag{6}$$

где $\mu_n = n\pi$, $n = 1, 2, 3\ldots$

μ_m — корни характеристического уравнения $\mathrm{tg}\,\mu = \mu$.

Относительная температура $\Theta\,(r,\tau)$ является функцией относительной координаты $\frac{X}{R}$ и термического критерия Фурье.

В стадии регулярного режима $(F_o > F_o')$ соотношение между Θ и F_o можно написать в виде

$$\Theta = A_1\Phi\left(\mu_1\frac{X}{R}\right)e^{-\mu_1^2F_o}\,,$$

где $A_1 = \frac{2}{\pi}$ — начальная тепловая амплитуда ,

$\Phi\left(\mu_1 \frac{X}{R}\right)$ — функция, описывающая распределение температуры по характерной координате,

$\mu_1 = \pi$ — первый корень характеристического уравнения,

$F_O = \frac{a\tau}{R^2}$ — термический критерий Фурье.

Поле влажности описывается критериями F_O, $\frac{X}{R}$, k_1 и P_n,

$$\text{т. е.}\quad \vartheta(r,\tau) = f\left(F_O, \frac{X}{R}, k_1, P_n\right),$$

где

$\vartheta(r,\tau)$ — относительная влажность тела,

k_1 — критерий, равный $\frac{k}{a}$,

P_n — критерий Поснова, равный $\frac{\delta(t_O - t_c)}{u_O}$, характеризующий неравномерность поля влажности, вызванную наличием термовлагопроводности.

Полученные решения (2), (6) системы дифференциальных уравнений тепло- и влагообмена (1) дают возможность определить термовлагокоэффициенты непосредственно из одного опыта.

Кварцевый песок, предварительно увлажненный до требуемой влажности, насыпается в шарообразную форму, $R = 10$ см, сделанную из алюминия. В колбу вводится пять термопар: $\frac{r}{R} = 1$ (поверхность колбы), $\frac{r}{R} = 0{,}8$, $\frac{r}{R} = 0{,}6$, $\frac{r}{R} = 0{,}4$, $\frac{r}{R} = 0$ (центр колбы).

Вначале колба с песком нагревается в воздушном термостате при постоянной температуре (от 40 до 60°C) до равномерного распределения температуры и влажности песка. По окончании нагревания она быстро вынимается из термостата и помещается в водяной термостат с постоянной температурой для охлаждения.

С целью получения кривых распределения влажности песка в разные моменты время охлаждения берется различным. По истечении заданного промежутка времени охлаждения, посредством отборной трубки, производится анализ песка на влажность, вдоль радиуса колбы. Влажность песка определяется обычным весовым методом—сушка в термостате до постоянного веса при 105°C.

Полученные экспериментальные данные обрабатываются в виде графиков распределения температуры и влажности.

На рис. 1 представлена кривая распределения влажности, соответствующая радиальному распределению через 25 минут охлаждения, в среде с температурой $t_c = 9{,}8$°C предварительно нагретого песка до 60°C.

Начальная влажность, равная 10,9%, отмечена в виде прямой, параллельной оси абсцисс. В начальный момент времени влажность песка внутри колбы одинакова, потом на поверхности она будет 13,3%, а в центре—10,1%, т. е. под влиянием температурного градиента влага переместилась от центра к поверхности.

Относительный перепад влажности на поверхности

$$\vartheta_n = \frac{u(R,\tau) - u_0}{u_0} = \frac{13,3-10,9}{10,9} = 0,22 .$$

В опыте, приведенном на рис. 1, коэффициент температуропроводности песка, определенный по методу профессора Г. М. Кондратьева, был равен $2,3 . 10^{-3}$ *м²/час.*

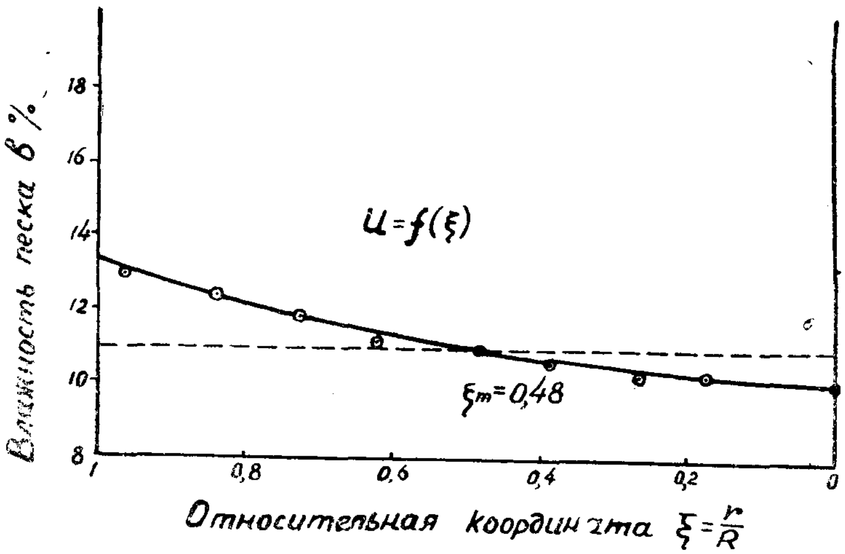

Рис. 1

Если в решении (6), отображающем нестационарное поле влажности для тела в форме шара, критерию Фурье придавать значения $F_0 \geqslant 0,09$ и принять во внимание, что $k_1 = \frac{k}{a}$ изменяется в интервале от 0 до 1, то можно получить зависимость

$$\varphi(k_1, \xi_m) = o \tag{7}$$

между критерием k_1 и относительной координатой ξ_m.

По найденному из опыта значению ξ_m (рис. 1) из графика зависимости (7) можно найти соответствующее значение критерия k_1, после чего по известным величинам k_1 и a из соотношения

$$k_1 = \frac{k}{a}$$

можно легко определить значения коэффициента влагопроводности k.

Разбираемый нами метод позволяет определить критерий Поснова P_n, а, следовательно, и коэффициент термовлагопроводности δ.

Решение (6) при $\frac{r}{R} = 1$ дает относительную влажность на поверхности шара, из которой при значениях k_1, лежащих в интервале от 0 до 1, можно получить зависимость

$$f\left(\frac{\vartheta_n}{P_n}, F_0\right) = o \tag{8}$$

между $\frac{\vartheta_n}{P_n}$ и критерием F_0, при $F_0 > 0,09$.

По указанному значению критерия Фурье F_o из графика зависимости (8) можно найти величину $\frac{\vartheta_n}{P_n}$. Зная относительный перепад влажности на поверхности

$$\vartheta_n = \frac{u(R,\tau) - u_o}{u_o}$$

и значение $\frac{\vartheta_n}{P_n}$, можно найти критерий Поснова P_n, а затем из соотношения $P_n = \frac{\delta(t_o - t_c)}{u_o}$ определить и коэффициент термовлагопроводности.