

гревается заметнее и в большей степени в результате соударения поршня, штанги и буksы механизма. Температурное поле поверхности задней и передней частей молотка одномерное, а в зоне выхлопных окон двумерное:

$$t=t(x,y,\tau),$$

где x, y — координаты точек; τ — время работы механизма. При одномерном поле $dt/dy=0$. Таким образом, экспериментально установлено, что в пневмоударном механизме существует отвод тепла от рабочего тела в атмосферу.

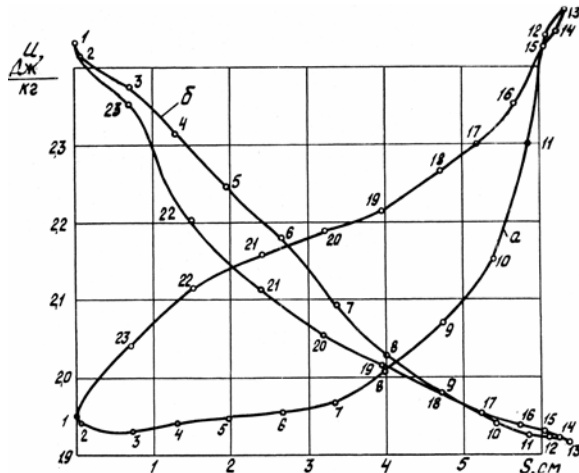


Рис. 8. Расчетное изменение удельной внутренней энергии воздуха: а) задняя; б) передняя камера

Характер изменения удельной энергии воздуха в камерах виден из рассчитанных по эксперимен-

тальным данным зависимостей (рис. 8). Нижняя ветвь диаграммы характеризует изменение энергии рабочего тела в период уменьшения объема рабочей камеры, а верхняя — при увеличении объема камеры. Из представленных зависимостей следует, что удельная энергия воздуха уменьшается при увеличении объемов камер.

Заключение

В пневмоударном механизме происходит механическое, тепловое и массоэнергетическое взаимодействие рабочего тела в камерах с внешней средой. Выявлены закономерности изменения параметров рабочих процессов. Установлено, что в камерах протекают процессы с разными показателями политропы. Определены значения показателей термодинамического процесса и относительного энергообмена, что позволяет более обоснованно проводить расчет пневмоударных механизмов.

Доказана возможность создания пневмоударного механизма с низким абсолютным и удельным расходом сжатого воздуха. Показано, что низкий удельный расход воздуха достигнут благодаря применению двух автономных распределительных органов с командными каналами. Особенности цикла работы созданного механизма являются: отсечка рабочих камер от сети к моменту открытия выхлопного окна, использование внутренней энергии воздуха, максимальное давление газа в задней камере выше сетевого, асимметрия фаз распределения энергоносителя по камерам, довольно низкое предвыхлопное давление рабочего тела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.с. 575416 СССР. МКП E21C 3/24. Устройство ударного действия / В.И. Бабуров, А.Н. Глазов, А.Н. Шайтаров, Е.А. Шаповалов. — Опул. в Б.И., 1977, № 10.
2. Мамонтов М.А. Основы термодинамики тела переменной массы. — Тула: Тульское книжное изд-во, 1970. — 97 с.
3. Горбунов В.Ф., Глазов А.Н., Бабуров В.И. О нагреве пневматических молотков // Гигиена и санитария. — 1976. — № 8. — С. 109.

УДК 539.3

ФОРМУЛИРОВКА УРАВНЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ВИДЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ КОШИ-РИМАНА

А.А. Светашков, А.В. Махов

Томский политехнический университет
E-mail: alex@aurigma.com, astrodep@niipmm.tsu.ru

Использованы соотношения между собственными векторами системы уравнений плоской задачи теории упругости в перемещениях. Получена новая формулировка краевой задачи теории упругости в случае заданных на границе напряжений в виде задачи Дирихле для уравнений равновесия в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка — системы Коши-Римана.

Введение

Классическая постановка плоской задачи теории упругости, как известно [1, 2], включает в себя уравнения равновесия в перемещениях или в напряжениях (Лямэ и Бельтрами-Мичелла), представ-

ляющих собой системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, плюс соответствующие граничные условия. Между тем хорошо известна другая формулировка системы уравнений равновесия, которая в отличие от систем

дифференциальных уравнений Лямэ и Бельтрами-Мичелла, имеет первый порядок. В отсутствие объёмных сил данная система записывается как:

$$\begin{aligned}\frac{1+\lambda}{2}d_1\theta &= \lambda d_2\omega, \\ \frac{1+\lambda}{2}d_2\theta &= -\lambda d_1\omega.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь x, y – декартовы координаты; $d_\alpha, \alpha=1,2$ – сокращённая запись операций дифференцирования

$$d_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x}, d_2 \equiv \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\theta = d_1u + d_2v, \omega = \frac{1}{2}(d_1v - d_2u),$$

$u=u(x,y), v=v(x,y)$ – компоненты вектора перемещений, $\lambda=1-2\nu$, где ν – коэффициент Пуассона. Очевидно, что для функций $z_\alpha(x,y), \alpha=1,2$:

$$z_1 = \frac{1+\lambda}{2}\theta, z_2 = \lambda\omega$$

система (1) есть система уравнений Коши-Римана относительно двух гармонически-сопряжённых функций [3].

Однако формулировка уравнений равновесия плоской задачи теории упругости в виде системы (1) практически не используется в упругих расчётах, поскольку не известны граничные условия для функций $\theta(x,y), \omega(x,y)$, входящих в (1), а также не известны выражения компонент тензора напряжений и вектора перемещений через указанные функции.

Математический аппарат определения собственных значений и собственных векторов матрицы системы дифференциальных уравнений равновесия плоской задачи теории упругости в перемещениях, предложенный в [4], позволяет восполнить данный пробел.

1. Следствия из соотношений для собственных векторов плоской задачи теории упругости

Согласно [4], собственные векторы $\bar{\varphi}(\varphi_1, \varphi_2)$ и $\bar{\psi}(\psi_1, \psi_2)$ плоской задачи удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}d_1\varphi_1 + d_2\varphi_2 &= C_1, \\ d_1\psi_2 - d_2\psi_1 &= C_2.\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь C_α – некоторые константы. С учётом связи компонент $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ и компонент вектора $\bar{y}(y_1, y_2)$, удовлетворяющего уравнению Лапласа,

$$y_\alpha = \lambda\varphi_\alpha + (1+\lambda)\psi_\alpha, \alpha=1,2,$$

и разложения вектора перемещений по собственным векторам

$$u = \varphi_1 + \psi_1, v = \varphi_2 + \psi_2$$

получаем, что

$$\begin{aligned}\psi_1 &= y_1 - \lambda u, \psi_2 = y_2 - \lambda v, \\ \varphi_1 &= (1+\lambda)u - y_1, \varphi_2 = (1+\lambda)v - y_2.\end{aligned}\quad (3)$$

Тогда систему (2) можно переписать:

$$\begin{aligned}d_1y_1 + d_2y_2 &= (1+\lambda)\theta - C_1, \\ d_1y_2 - d_2y_1 &= \lambda(d_1v - d_2u) + C_2 = 2\lambda\omega + C_2.\end{aligned}\quad (4)$$

Из соотношений для собственных векторов плоской задачи теории упругости в форме (2–4) вытекают некоторые важные для дальнейших рассуждений следствия.

Следствие 1. Напряжения равны первым производным от компонент собственного вектора $\bar{\psi}(\psi_1, \psi_2)$.

Для доказательства запишем соотношения закона Гука в виде зависимостей напряжений от первых производных перемещений. Предварительно, для удобства выкладок, умножим компоненты тензора напряжений и компоненты внешних нагрузок на множитель λ/G , где G – модуль сдвига, т.е. будем использовать $\sigma'_x = \sigma_x\lambda/G, \sigma'_y = \sigma_y\lambda/G, \tau'_{xy} = \tau_{xy}\lambda/G$. В дальнейшем штрихи отбросим, тогда

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \theta + \lambda(d_1u - d_2v), \\ \sigma_y &= \theta - \lambda(d_1u + d_2v), \\ \tau_{xy} &= \lambda(d_1v + d_2u).\end{aligned}\quad (5)$$

С учётом (4) получим:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= d_1y_1 + d_2y_2 - 2\lambda d_2v + C_1, \\ \sigma_y &= d_1y_1 + d_2y_2 - 2\lambda d_1u + C_1, \\ \tau_{xy} &= 2\lambda d_2u + d_1y_2 - d_2y_1 - C_2 = \\ &= 2\lambda d_1v + d_2y_1 - d_1y_2 + C_2.\end{aligned}\quad (6)$$

В силу гармоничности u_α , выполняются соотношения

$$\begin{aligned}d_1y_1 &= d_2y_2 + N_1, \\ d_2y_1 &= -d_1y_2 + N_2,\end{aligned}$$

где N_1, N_2 – константы интегрирования.

Подставляя последние соотношения в (6), получим с учётом (3) искомое утверждение

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2d_2(y_2 - \lambda v) + C_1 = 2d_2\psi_2 + C_1, \\ \sigma_y &= 2d_1(y_1 - \lambda u) + C_1 = 2d_1\psi_1 + C_1, \\ \tau_{xy} &= -2d_2(y_1 - \lambda u) - C_2 = -2d_1(y_2 - \lambda v) + C_2 = \\ &= -2d_2\psi_1 - C_2 = -2d_1\psi_2 + C_2.\end{aligned}\quad (7)$$

Заметим, что подстановка (7) в уравнения равновесия в напряжениях обращает последние в тождества.

Следствие 2. Компоненты вектора $\bar{\psi}$ на границе равны контурным интегралам от внешних нагрузок.

Рассмотрим граничные условия в напряжениях, которые, как известно, имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_x l + \tau_{xy} m &= X_n, \\ \sigma_y m + \tau_{xy} l &= Y_n.\end{aligned}$$

Здесь X_n, Y_n – заданные граничные нагрузки, l, m – косинусы углов, которые образует внешняя нормаль к граничному контуру с осями x, y :

$$\begin{aligned} l &= \cos(n, x) = \frac{dy}{ds}, \\ m &= \cos(n, y) = -\frac{dx}{ds}. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставим в уравнения граничных условий соотношения (7), тогда:

$$\begin{aligned} 2(ld_2 - md_1)\psi_2 + C_1l + C_2m &= X_n, \\ 2(md_1 - ld_2)\psi_1 + C_1m - C_2l &= Y_n. \end{aligned}$$

Оператор, стоящий в круглых скобках, есть производная по дуге s

$$\frac{d}{ds} \equiv ld_2 - md_1,$$

поэтому

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\psi_2}{ds} &= X_n - (C_1l + C_2m), \\ -2 \frac{d\psi_1}{ds} &= Y_n - C_1m + C_2l. \end{aligned}$$

Отсюда, интегрируя по дуге s , находим:

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \frac{1}{2} \int_N^M (X_n - C_1l - C_2m) ds + A, \\ \psi_1 &= \frac{1}{2} \int_N^M (-Y_n + C_1m - C_2l) ds + B. \end{aligned}$$

Здесь N, M – произвольные точки на контуре, A, B – константы.

Подставляя в (7), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial}{\partial y} \int_N^M (X_n - C_1l - C_2m) ds + C_1, \\ \sigma_y &= \frac{\partial}{\partial y} \int_N^M (-Y_n + C_1m - C_2l) ds + C_1, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial}{\partial y} \int_N^M (-Y_n + C_1m - C_2l) ds - C_2 = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \int_N^M (X_n - C_1l - C_2m) ds + C_2. \end{aligned}$$

Два аналитических выражения для касательного напряжения тождественны при любых C_1, C_2 . Для доказательства достаточно использовать равенство

$$\int \operatorname{div} \bar{F}_n ds \equiv \int \left(\frac{\partial X_n}{\partial x} + \frac{\partial Y_n}{\partial y} \right) ds = 0,$$

где $\bar{F}_n = \bar{F}_n(X_n, Y_n)$ – вектор поверхностной нагрузки.

С учётом соотношений (8) граничные значения напряжений преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial}{\partial y} \int_N^M X_n ds, \\ \sigma_y &= -\frac{\partial}{\partial x} \int_N^M Y_n ds, \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} \int_N^M Y_n ds = -\frac{\partial}{\partial x} \int_N^M X_n ds. \end{aligned} \quad (9)$$

Легко убедиться, что подстановка (9) в уравнения равновесия в напряжениях

$$\begin{aligned} d_1\sigma_x + d_2\tau_{xy} &= 0, \\ d_2\sigma_y + d_1\tau_{xy} &= 0. \end{aligned}$$

обращает последние в тождества.

Таким образом, граничные значения напряжений зависят только от внешних нагрузок.

2. Выражения собственных векторов через перемещения

Найдём решение системы (4), переписав её с учётом (3) в виде:

$$\begin{aligned} d_1\psi_1 + d_2\psi_2 &= \theta - C_1, \\ d_1\psi_2 - d_2\psi_1 &= C_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Используем

$$d_1y_1 = d_2y_2 = \frac{1+\lambda}{2}\theta - \frac{C_1}{2}. \quad (11)$$

Тогда решение (10) в форме Лява [1] будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{1+\lambda} d_1(xy_1) - (x+y) \frac{C_1+C_2}{2}, \\ \psi_2 &= \frac{1}{1+\lambda} d_2(xy_1) + (x+y) \frac{C_2-C_1}{2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Учитывая (3) получаем:

$$\begin{aligned} \lambda u &= y_1 - \frac{1}{1+\lambda} d_1(xy_1) + (x+y) \frac{C_1+C_2}{2}, \\ \lambda v &= y_2 - \frac{1}{1+\lambda} d_2(xy_1) - (x+y) \frac{C_2-C_1}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, перемещения u, v выражаются через гармонические функции y_a посредством (13).

3. Граничные условия для системы уравнений равновесия

Первое граничное условие для функции следует из закона Гука в форме (6). Имеем:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2C_1 + 2(d_1y_1 + d_2y_2) - 2\lambda(d_1u + d_2v). \quad (14)$$

Учитывая (4), получаем:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2C_1 + 2(1+\lambda)\theta - 2C_1 - 2\lambda\theta = 2\theta. \quad (15)$$

Следовательно,

$$\theta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y).$$

Или, принимая во внимание (9)

$$\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \int_N^M X_n ds - \frac{\partial}{\partial x} \int_N^M Y_n ds \right). \quad (16)$$

Для определения второго граничного условия воспользуемся (4)

$$d_1y_2 - d_2y_1 = 2\lambda\omega + C_2.$$

В силу гармоничности y_a выполняется

$$d_2 y_1 = -d_1 y_2 - N_2.$$

Тогда получим

$$-d_1 y_2 = d_2 y_1 + N_2 = -\lambda \omega + \frac{N_2 - C_2}{2}. \quad (17)$$

Далее выразим τ_{xy} через ω , используя соотношение

$$\tau_{xy} = -2d_1 \psi_2 + C_2.$$

С учётом (12) находим

$$d_1 \psi_2 = \frac{1}{1+\lambda} d_1 d_2 (xy_1) + \frac{C_2 - C_1}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= -\frac{2}{1+\lambda} d_1 d_2 (xy_1) - (C_2 - C_1) + C_2 = \\ &= -\frac{2}{1+\lambda} d_1 d_2 (xy_1) + C_1. \end{aligned}$$

Выразим последнее соотношение через ω посредством (17). Имеем

$$d_1 d_2 (xy_1) = d_1 (x d_2 y_1),$$

$$d_2 y_1 = -\lambda \omega - N_2 + \frac{N_2 - C_2}{2} = -\lambda \omega - \frac{N_2 + C_2}{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} d_1 d_2 (xy_1) &= d_1 \left[-x \left(\lambda \omega + \frac{N_2 + C_2}{2} \right) \right] = \\ &= -\lambda d_1 (x\omega) - \frac{C_2 + N_2}{2}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем для τ_{xy}

$$\tau_{xy} = \frac{2\lambda}{1+\lambda} d_1 (x\omega) + C_1 + \frac{N_2 + C_2}{1+\lambda}. \quad (18)$$

Рассмотрим

$$d_1 (x\omega) = \omega + x d_1 \omega = \omega - \frac{1+\lambda}{2\lambda} x d_2 \theta. \quad (19)$$

Здесь учтено одно из уравнений системы (1). Сопоставляя (18 и 19), находим:

$$d_1 (x\omega) = \frac{1+\lambda}{2\lambda} \tau_{xy} - \frac{1+\lambda}{2\lambda} C_1 - \frac{N_2 + C_2}{2\lambda} = \omega - \frac{1+\lambda}{2\lambda} x d_2 \theta.$$

Отсюда

$$\omega = \frac{1+\lambda}{2\lambda} (\tau_{xy} + x d_2 \theta) + \frac{1+\lambda}{2\lambda} C_1 + \frac{N_2 + C_2}{2\lambda}.$$

Используя (9), получаем выражение для $\omega = \omega(x, y)$ на границе:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1+\lambda}{2\lambda} \left[x \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_N^M X_n ds - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_N^M Y_n ds \right) + \frac{\partial}{\partial y} \int_N^M Y_n ds \right] + \\ &+ \frac{1+\lambda}{2\lambda} C_1 + \frac{N_2 + C_2}{2\lambda}. \end{aligned} \quad (20)$$

Заметим, что (20) можно переписать в другой форме, если использовать соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int X_n ds + \frac{\partial}{\partial y} \int Y_n ds = 0.$$

Таким образом, функции θ, ω , удовлетворяющие в области системе уравнений (1), на границе полностью определяются через заданные нагрузки согласно (16, 20). Таким образом, для системы (1) краевая задача относительно θ, ω есть задача Дирихле.

4. Определение компонент напряжённно-деформированного состояния

По найденным из решения краевой задачи, определяемой (1, 16 и 20), функциям θ, ω необходимо рассчитать компоненты напряжений и перемещений. Сначала найдём выражения функций y_a через θ, ω . Для этого используем (11 и 17). Имеем:

$$d_1 y_1 = \frac{1+\lambda}{2} \theta, \quad d_2 y_1 = -\lambda \omega.$$

Следовательно,

$$y_1 = \frac{1+\lambda}{2} \int \theta dx - \lambda \int \omega dy. \quad (21)$$

Аналогичным образом получаем:

$$y_2 = \frac{1+\lambda}{2} \int \theta dy + \lambda \int \omega dx. \quad (22)$$

Интегралы в (21, 22) не зависят от пути интегрирования в силу условий Коши-Римана в виде системы (1).

Для определения перемещений используем (11, 12 и 17). Тогда получим:

$$\begin{aligned} \lambda u &= \frac{\lambda}{1+\lambda} y_1 - \frac{1}{2} x \theta + \frac{C_1 + C_2}{2} (x + y), \\ \lambda v &= y_2 + \frac{\lambda}{1+\lambda} x \omega - \frac{C_2 - C_1}{2} (x + y). \end{aligned} \quad (23)$$

Для перемещений в форме (23) выполняются уравнения равновесия Лямэ.

Напряжения определим из закона Гука в форме (6), учитывая (11, 17 и 18):

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2\lambda}{1+\lambda} x d_2 \omega + C_2 = -x d_1 \theta + C_2, \\ \sigma_y &= 2\theta + x d_1 \theta - \lambda C_1 - C_2, \\ \tau_{xy} &= \frac{2\lambda}{1+\lambda} d_1 (x\omega) + C_1 + \frac{N_1 + C_2}{1+\lambda}. \end{aligned} \quad (24)$$

Найденные напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия в напряжениях, в чём можно убедиться дифференцированием выражений (24) с учётом связи первых производных от θ, ω посредством системы уравнений равновесия (1).

Таким образом, все компоненты напряжённно-деформированного состояния выражены через θ, ω . Задача решена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляв А. Математическая теория упругости. – М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. – 674 с.
2. Лейбензон Л.С. Краткий курс теории упругости. – М.-Л.: ОГИЗ ГТТЛ, 1942. – 304 с.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1965. – 716 с.
4. Светашков А.А. Собственные преобразования системы уравнений теории упругости // Известия вузов. Физика. – 2004. – № 10. – С. 98–101.

УДК 622.24.05

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕПЯТСТВИЯ ТИПА УПРУГОСТЬ-МАССА

А.П. Слистин

Юргинский технологический институт ТПУ
E-mail: yftpu@mail.ru

Установлены аналитические зависимости прохождения волн через препятствия, обладающие одновременно упругостью и массой. Получены численные результаты, имеющие хорошее совпадение с экспериментальными данными (ошибка < 7 %).

Реальный ударный инструмент представляет собой совокупность последовательно расположенных конечных участков (штанг), имеющих в общем случае скачки площади поперечного сечения, соединений штанг, их стыков. Любое изменение параметров ударного инструмента можно рассматривать как некоторое препятствие для распространяющейся волны.

Принимая во внимание возможность разложения произвольной волны в ряд Фурье, далее будет рассматриваться прохождение через препятствие простейших гармонических волн. Падение продольной волны на препятствие вызывает появление отраженной волны, бегущей навстречу падающей, и формирование волны за препятствием. В дальнейшем будем обозначать величины, относящиеся к участку ударного инструмента до препятствия индексом 1, а относящиеся к участку после препятствия индексом 2.

Пусть падающая на препятствие гармоническая волна имеет вид $u_{1n} = B_{1n} \cdot e^{i(\omega t - \kappa_1 z)}$, отраженная – $u_{1o} = B_{1o} \cdot e^{i(\omega t - \kappa_1 z)}$, а сформированная за препятствием – $u_{2n} = B_{2n} \cdot e^{i(\omega t - \kappa_2 z)}$. Пусть зависимость продольной силы в падающей волне имеет вид $P_{1n} = D_{1n} \cdot e^{i(\omega t - \kappa_1 z)}$, в отраженной волне – $P_{1o} = D_{1o} \cdot e^{i(\omega t - \kappa_1 z)}$ и в прошедшей волне – $P_{2n} = D_{2n} \cdot e^{i(\omega t - \kappa_2 z)}$. Тогда, принимая во внимание, что $P = ES(\partial u / \partial z)$, амплитуды волн связаны соотношениями

$$B_{1n} = -\frac{D_{1n}}{i\kappa_1 E_1 S_1}, B_{1o} = \frac{D_{1o}}{i\kappa_1 E_1 S_1}, B_{2n} = -\frac{D_{2n}}{i\kappa_2 E_2 S_2}, \quad (1)$$

где κ – волновое число, E – модуль Юнга, S – площадь поперечного сечения.

Обозначим $V = D_{1o} / D_{1n}$ – коэффициент отражения, $W = D_{2n} / D_{1n}$ – коэффициент прохождения. Отметим, что в практике расчетов находят применение коэффициенты прохождения и отражения по перемещению (скорости) и силе. В данном случае рассматриваются соответствующие коэффициенты по силе. Тогда

$$D_{1o} = V \cdot D_{1n}, \quad D_{2n} = W \cdot D_{1n}. \quad (2)$$

То есть знание амплитуды падающей на препятствие волны и коэффициентов отражения и прохождения дает возможность определить амплитуды отраженной и прошедшей волн. Основная задача, рассматриваемая в работе, заключается в отыскании коэффициентов отражения и прохождения по известным свойствам препятствия.

Границу раздела между участками, составляющих препятствие, будем считать резкой. Это не обязательно означает реальный скачок свойств в молекулярном масштабе; переход от свойств одного участка к свойствам другого, происходящий непрерывно в слое, тонком по сравнению с длиной волны, действует на волну, падающую на слой, так же, как и резкий скачок свойств. В качестве характерной толщины слоя можно взять величину λ_0 . То есть для волн $\lambda > \lambda_0$ слой толщиной λ_0 и менее можно считать резкой границей.

В монографиях [1, 2] рассмотрено влияние на распространение волн простейших типов препятствий.

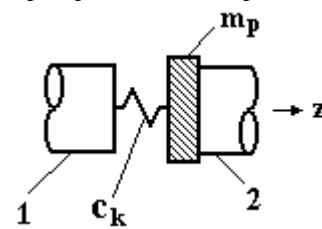


Рис. 1. Схема препятствия типа упругость-масса

При забивании труб в грунт удар бойком обычно наносится по пластине, прикрепленной тем или иным способом к торцу трубы. Из требований прочности пластина имеет значительную толщину и, следовательно, массу. Контакт боек-пластина обладает упругостью. Сама пластина под воздействием удара прогибается, что создает дополнительную упругость. Указанное взаимодействие