

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ АСИНХРОННОГО БЕСЩЕТОЧНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ЧАСТОТЫ

В. С. Новокшенов

(Представлено научно-методическим семинаром ЭМФ ТПИ)

В последнее время в ряде отраслей промышленности ощущается большая потребность в бесщеточных преобразователях повышенной частоты. Известно [2], что применение асинхронных электродвигателей повышенной частоты позволяет значительно снизить вес ручного электроинструмента (электропилы, электросверла и т. д.), упростить конструкцию и эксплуатацию высокоскоростных станков для деревообрабатывающей, автомобильной и авиационной отрасли промышленности.

Эксплуатация асинхронных двухмашинных преобразователей частоты и синхронных генераторов повышенной частоты при работе их в сырых, запыленных помещениях или на открытом воздухе является затруднительной ввиду наличия у этих преобразователей щеточного устройства, работа которого в указанных условиях весьма ненадежна. В ряде отраслей промышленности применение переобразователей, имеющих щеточный контакт, вообще не допускается. Большую потребность в бесщеточных преобразователях повышенной частоты имеет угольная промышленность. Шахтные облегченные электросверла повышенной частоты были спроектированы и изготовлены заводами Министерства угольной промышленности еще в 1950 г. Однако отсутствие бесщеточного преобразователя частоты, имеющего удовлетворительные характеристики, не позволило внедрить их в шахты.

Статические преобразователи повышенной частоты не нашли широкого применения как источники питания асинхронных двигателей, потому что они имеют низкое использование активных материалов, сильно падающую внешнюю характеристику и низкий коэффициент мощности [3, 9]. Вращающиеся преобразователи частоты, основанные на принципе искажения магнитного поля, также не нашли широкого применения [5]. Хотя характеристики у них несколько лучше, чем у статических преобразователей, однако они продолжают оставаться неудовлетворительными.

По сравнению со статическими преобразователями частоты и с преобразователями, основанными на принципе искажения магнитного поля, исследуемый асинхронный бесщеточный преобразователь частоты (АБПЧ) имеет ряд ценных свойств: 1) возможность получения хорошей внешней характеристики; 2) более высокие технико-экономические показатели в эксплуатации; 3) более высокое использование активных материалов.

Под руководством автора на Томском электромеханическом заводе выполнен технический проект АБПЧ для питания шахтных электросверл повышенной частоты. Указанный технический проект АБПЧ утвержден Министерством угольной промышленности СССР и сдан в производство. Техническому проекту предшествовали изготовление и испытание опытной модели АБПЧ.

1. Описание и принцип действия АБПЧ

АБПЧ (рис. 1) состоит из асинхронного приводного двигателя АД, асинхронного преобразователя АП и синхронной машины СМ. При-

водной двигатель и асинхронный преобразователь совмещены в одном магнитопроводе. Совмещение двух магнитных полей в одном магнитопроводе возможно только в том случае, если удовлетворяется неравенство:

$$p_1 \pm p_2 = \pm 1, \quad (1)$$

где p_1 и p_2 — число пар полюсов первого и второго полей.

Если при наложении двух магнитных полей неравенство (1) будет не выполнено, то в воздушном зазоре появятся силы односторонних магнитных притяжений и вибраций [1], которые могут вызвать механические вибрации всей машины, прогиб вала и быстрый износ подшипников. Следовательно, совмещение приводного двигателя, имеющего число пар полюсов p_1 , и асинхронного преобразователя, имеющего число пар полюсов p_2 ,

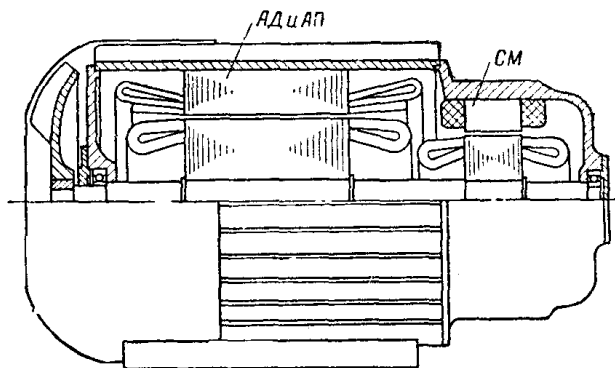


Рис. 1.

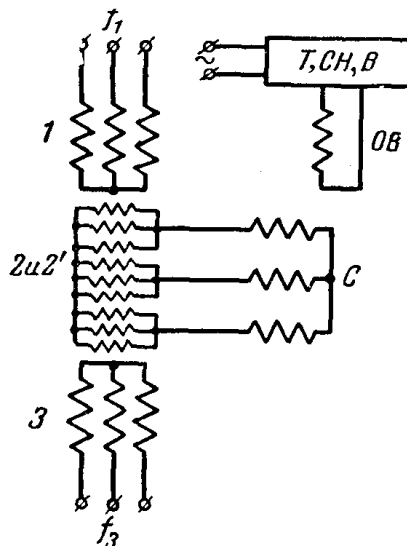


Рис. 2.

в одном магнитопроводе возможно лишь в случае, если удовлетворяется неравенство (1).

На рис. 2 приведена принципиальная схема АБПЧ. Обмотка 1, имеющая число пар полюсов p_1 и расположенная в пазах пакета статора, является первичной обмоткой приводного двигателя АБПЧ. Обмотка 3, имеющая число пар полюсов p_2 и расположенная в тех же пазах пакета статора, что и обмотка 1, является вторичной обмоткой асинхронного преобразователя. Между обмотками 1 и 3 трансформаторная связь должна отсутствовать. Последнее условие будет выполнено, если обмоточный коэффициент $k_{\alpha 1-2}$ обмотки 1 по отношению к магнитному полю асинхронного преобразователя Φ_2 и обмоточный коэффициент $k_{\omega 3-1}$ обмотки 3 по отношению к магнитному полю приводного двигателя Φ_1 будут равны нулю:

$$k_{\omega 1-2} = k_{y 1-2} k_{\beta 1-2} k_{\xi 1-2} = 0; \quad (2a)$$

$$k_{\omega 3-1} = k_{y 3-1} k_{\beta 3-1} k_{\xi 3-1} = 0, \quad (2б)$$

где $k_{y 1-2}$, $k_{\beta 1-2}$, $k_{\xi 1-2}$ — коэффициенты укорочения шага, распределения секций, распределения катушек обмотки 1 по отношению к полю Φ_2 ;

$k_{y 3-1}$, $k_{\beta 3-1}$, $k_{\xi 3-1}$ — коэффициенты укорочения шага, распределения секций, распределения катушек обмотки 3 по отношению к полю Φ_1 .

Обмотка 2, расположенная в пазах ротора, выполняет одновременно роль вторичной обмотки приводного двигателя и роль первичной обмотки асинхронного преобразователя. По отношению к магнитному потоку асинхронного преобразователя обмотка 2 представляет обычную трехфазную

двухслойную обмотку с диаметрально расположенными катушками, имеющую число параллельных ветвей a_2 , равное числу пар полюсов. По отношению же к магнитному потоку приводного двигателя система параллельных ветвей каждой фазы такой обмотки представляет a_2 -фазную короткозамкнутую обмотку со сдвигом фаз на $\frac{p_1}{p_2} 2\pi$ (в электрических градусах магнитного поля Φ_1). Поэтому в тех случаях, когда эта обмотка будет рассматриваться как первичная обмотка асинхронного преобразователя, она будет обозначаться через индекс «2»; в тех же случаях, когда эта обмотка будет рассматриваться как вторичная обмотка приводного двигателя, она будет обозначаться через индекс «2'». Соответствующими индексами будут обозначаться и параметры первичной обмотки асинхронного преобразователя и вторичной обмотки приводного двигателя.

Обмотка C , имеющая число пар полюсов p_C , является обмоткой якоря синхронной машины и расположена в пазах ее ротора. OB — обмотка возбуждения полюсов синхронной машины, которые укреплены на станине. Обмотка возбуждения полюсов питается постоянным током от твердых выпрямителей B , последние получают питание от трансформатора T , снабженного стабилизатором напряжения повышенной частоты CH .

Рассмотрим принцип действия АБПЧ.

Если первичную обмотку приводного двигателя (обмотку I) подключить к питающей сети с частотой f_1 , то под действием момента двигателя M_1 , ротор АБПЧ будет вращаться в пространстве со скоростью

$$n = n_1 (1 - s) = 60 f_1 \frac{1}{p_1} (1 - s), \quad (3)$$

где $n_1 = \frac{60 f_1}{p_1}$ — синхронная скорость вращения поля Φ_1 приводного двигателя;

s — скольжение ротора АБПЧ относительно поля Φ_1 .

В обмотке C якоря синхронной машины будет индуцироваться э. д. с. с частотой:

$$f_C = \frac{n p_C}{60} = f_1 \frac{p_C}{p_1} (1 - s). \quad (4)$$

Магнитное поле асинхронного преобразователя Φ_2 , обусловленное подведенным на зажимы обмотки 2 напряжением, будет вращаться относительно ротора со скоростью:

$$n_2 = \frac{60 f_C}{p_2} = 60 f_1 \frac{p_C}{p_1 p_2} (1 - s). \quad (5)$$

Скорость вращения поля Φ_2 в пространстве n_3 будет равна:

$$n_3 = n \pm n_2 = 60 f_1 \frac{1}{p_1} \left(1 \pm \frac{p_C}{p_2} \right) (1 - s). \quad (6)$$

Знак плюс относится к случаю согласного вращения ротора и поля Φ_2 , а знак минус — к случаю их встречного вращения. Тогда частота э. д. с., индуцируемой полем Φ_2 в обмотке 3 , будет равна:

$$f_3 = \frac{n_3 p_2}{60} = f_1 \frac{p_2 \pm p_C}{p_1} (1 - s). \quad (7)$$

В режимах, близких к номинальному, $s \ll 1$. Поэтому отношение повышенной частоты f_3 к частоте питающей сети f_1 определяется соотношением чисел пар полюсов приводного двигателя, асинхронного преобразователя и синхронной машины, входящих в состав АБПЧ, и направлением вращения поля Φ_2 относительно ротора.

2. Энергетические диаграммы распределения мощностей и потерь в АБПЧ

Распределение мощностей и потерь в АБПЧ наглядно может быть представлено в виде энергетических диаграмм. При анализе распределения мощностей за исходную величину примем полезную мощность АБПЧ P_3 , которая равна электромагнитной мощности $P_{\phi 3}$, передаваемой на статор (на обмотку 3) с ротора полем Φ_2 , за вычетом потерь в меди обмотки $3p_{Cu3}$ и потерь в железе статора p_{Fe3} , обусловленных полем Φ_2 :

$$P_2 = P_{\phi 3} - p_{Cu3} - p_{Fe3}. \quad (8)$$

Электромагнитная мощность $P_{\phi 3}$ равна произведению электромагнитного момента M_2 , который образуется в результате взаимодействия поля Φ_2 и тока I_3 , на угловую скорость вращения поля Φ_2 относительно статора ω_3 :

$$P_{\phi 3} = M_2 \omega_3. \quad (9)$$

Так как ω_3 равна алгебраической сумме угловых скоростей вращения ротора ω и поля Φ_2 относительно ротора ω_2 , то электромагнитную мощность $P_{\phi 3}$ можно рассматривать как алгебраическую сумму двух составляющих:

$$P_{\phi 3} = M_2 \omega + M_2 \omega_2 = P_{ma} + P_{\phi 2}, \quad (10)$$

где P_{ma} — мощность на окружности ротора асинхронного преобразователя, равная механической мощности на его валу;
 $P_{\phi 2}$ — электромагнитная мощность обмотки 2.

$$\frac{P_{\phi 2}}{P_{\phi 3}} = \frac{\omega_2}{\omega_3}.$$

Угловые скорости вращения ω , ω_2 , ω_3 согласно (3), (5) и (6) равны:

$$\omega = \omega_1 (1 - s), \quad \omega_2 = \pm \omega_1 \frac{p_C}{p_2} (1 - s), \quad \omega_3 = \omega_1 \left(1 \pm \frac{p_C}{p_2} \right) (1 - s). \quad (11)$$

Из приведенных выше уравнений нетрудно получить следующие выражения мощностей $P_{\phi 2}$ и P_{ma} :

$$P_{\phi 2} = P_{\phi 3} \frac{p_C}{p_C \pm p_2} = P_{\phi 3} \frac{1}{s_3}; \quad (12)$$

$$P_{ma} = \left(1 - \frac{1}{s_3} \right) P_{\phi 3}, \quad (13)$$

где скольжение обмотки 3 относительно магнитного потока Φ_2

$$s_3 = \frac{p_C \pm p_2}{p_C}. \quad (14)$$

Знак плюс соответствует случаю согласного вращения ротора и поля Φ_2 относительно ротора, а знак минус — случаю их встречного вращения.

Из уравнений (12) и (13) видно, что распределение мощностей в АБПЧ зависит как от соотношения чисел пар полюсов p_2 и p_C , так и от направления вращения поля Φ_2 относительно ротора. При этом следует различать четыре принципиально различных случая, которые отличаются не только распределением мощностей в АБПЧ, но также и режимами работы его отдельных обмоток. Рассмотрим эти случаи.

а) Направление вращения поля Φ_2 относительно ротора совпадает с направлением вращения самого ротора

В этом случае при любом значении чисел пар полюсов p_2 и p_c скольжение $s_3 > 1$. Следовательно, обмотки 2 и 3 можно рассматривать как обмотки асинхронной машины, работающей в режиме тормоза. Электромагнитная мощность $P_{\psi 3}$ равна, как это видно из уравнений (10), (12) и (13), арифметической сумме мощностей P_{ma} и $P_{\psi 2}$:

$$P_{\psi 3} = P_{ma} + P_{\psi 2}. \quad (15)$$

Мощность P_2 на зажимах обмотки 2 равна:

$$P_2 = P_{\psi 2} + p_{Cu2} + p_{Fe2}, \quad (16)$$

где p_{Cu2} — потери в меди обмотки 2, соответствующие току с частотой ω_2 ;

p_{Fe2} — потери в железе ротора.

Мощность на зажимах обмотки якоря синхронной машины, которая в этом случае работает в генераторном режиме, равна мощности P_2 :

$$P_c = P_2. \quad (17)$$

Механическая мощность на валу синхронной машины P_{mc} равна сумме мощности P_c , потерь в меди обмотки якоря $p_{Cu c}$ и потерь в железе якоря $p_{Fe c}$:

$$P_{mc} = P_c + p_{Cu c} + p_{Fe c}. \quad (18)$$

Механическая мощность на валу приводного двигателя

$$P_{md} = P_{ma} + P_{mc}. \quad (19)$$

И, наконец, потребляемая АБПЧ мощность P_1 равна:

$$P_1 = P_{md} + p_{Cu2'} + p_{Cu1} + p_{Fe1} + p_m, \quad (20)$$

где p_{Cu1} и $p_{Cu2'}$ — потери в меди обмотки 1 и потери в меди обмотки 2', соответствующие току скольжения;

p_{Fe1} — потери в железе АБПЧ, обусловленные полем Φ_1 ;

p_m — механические потери АБПЧ.

На основании полученных уравнений построена энергетическая диаграмма, представленная на рис. 3.

б) Направление вращения поля Φ_2 встречно направлению вращения ротора, а $p_c > p_2$

В этом случае скольжение обмотки 3 относительно поля Φ_2 согласно (14) $0 < s_3 < 1$. Следовательно, обмотки 2 и 3 можно рассматривать как обмотки асинхронной машины, работающей в двигательном режиме. Синхронная машина будет работать в генераторном режиме.

Подробное рассмотрение распределения мощностей и потерь в АБПЧ для этого случая приводит к следующим формулам:

$$P_{\psi 3} = P_{\psi 2} - P_{ma}, \quad P_{md} = P_{mc} - P_{ma}. \quad (21)$$

Значения P_2 , P_c , P_{mc} , P_1 определяются уравнениями (16), (17), (18) и (20).

Энергетическая диаграмма, соответствующая распределению мощностей и потерь в АБПЧ для рассматриваемого случая, приведена на рис. 4.

в) Направление вращения поля Φ_2 относительно ротора встречно направлению вращения самого ротора, а $p_c = p_2$

В этом случае согласно (14), (11) и (9) скольжение $s=0$, угловая скорость $\omega=0$, электромагнитная мощность, передаваемая с ротора на обмотку 3, $P_{\phi 3}=0$ и АБПЧ как преобразователь частоты теряет всякий смысл.

г) Направление вращения поля Φ_2 относительно ротора встречно направлению вращения самого ротора, а $p_c < p_2$

В этом случае скольжение $s_3 < 0$. Обмотки 2 и 3 асинхронного преобразователя работают в генераторном режиме асинхронной машины, а синхронная машина работает в двигательном режиме. Подробный

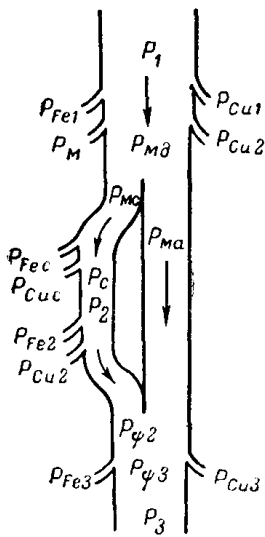


Рис. 3.

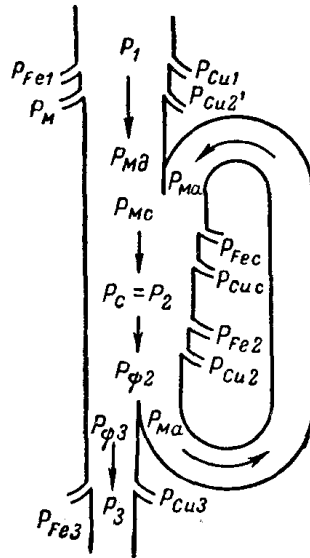


Рис. 4.

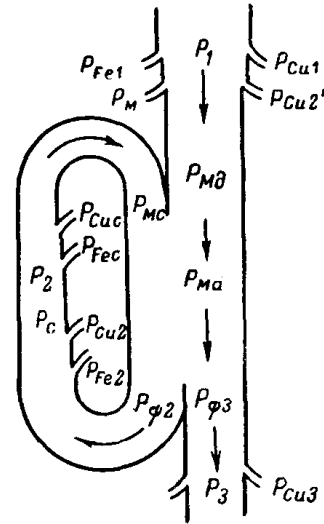


Рис. 5.

анализ распределения мощностей и потерь в АБПЧ для этого случая приводит к следующим формулам:

$$\begin{aligned} P_{\phi 3} &= P_{ma} - P_{\phi 2}, \quad P_2 = P_{\phi 2} - P_{Cu2} - P_{Fe2}; \\ P_c &= P_2, \quad P_{mc} = P_c - P_{Cuc} - P_{Fec}, \quad P_{md} = P_{ma} - P_{mc}. \end{aligned} \quad (22)$$

Значение мощности P_1 определяется формулой (20). Энергетическая диаграмма АБПЧ для рассматриваемого случая приведена на рис. 5.

Из сопоставления приведенных формул и энергетических диаграмм видно, что в случае «а» передаваемая на обмотку 3 электромагнитная мощность $P_{\phi 3}$ равна арифметической сумме мощностей P_{ma} и $P_{\phi 2}$, а в случаях «б» и «г» — их разности. При этом в случае «г» вся мощность, проходящая по обмотке 2 и обмотке якоря синхронной машины, а в случае «б» значительная ее часть не принимает участия в процессе передачи мощности на нагрузку АБПЧ, циркулирует по замкнутому кольцу, вызывая бесполезные потери. Таким образом, экономически наиболее целесообразным является такой режим работы АБПЧ, когда направление вращения поля Φ_2 относительно ротора совпадает с направлением вращения самого ротора. При выводе аналитических зависимостей, приведенных ниже, предполагается, что АБПЧ работает именно в этом режиме.

3. Схемы замещения и аналитические зависимости

Обмотки 1 и 2' являются первичной и вторичной обмотками приводного асинхронного двигателя, схема замещения которого ничем не отличается от схемы замещения обычного асинхронного двигателя.

Ток обмотки 1:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{\mu 1} + \dot{I}_{2'}'' = I_1 e^{-j\varphi_1}. \quad (23)$$

Ток обмотки 2', приведенный к уточненной схеме замещения, равен:

$$-\dot{I}_{2'}'' = \frac{U_1}{\left(r_1' + \frac{r_{2'}''}{s}\right) + j(x_1' + x_{2'}'')}. \quad (24)$$

Электромагнитный момент приводного двигателя АБПЧ

$$M_1 = \frac{m_1 U_1^2 \frac{r_{2'}''}{s}}{\omega_1 \left[\left(r_1' + \frac{r_{2'}''}{s}\right)^2 + (x_1' + x_{2'}'')^2 \right]}. \quad (25)$$

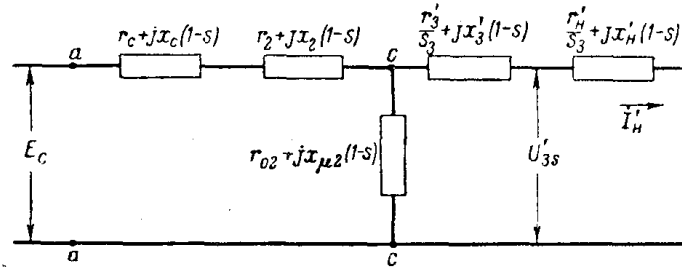


Рис. 6.

Так как магнитные потоки Φ_1 и Φ_2 находятся в общем магнитопроводе, то намагничивающий ток обмотки 1 $I_{\mu 1}$ зависит от величины магнитных индукций обоих полей, что является специфической особенностью приводного двигателя АБПЧ. Расчет $I_{\mu 1}$ приведен ниже.

Схема замещения цепи АБПЧ: синхронный генератор — асинхронный преобразователь (обмотки 2 и 3) — нагрузка, приведена на рис. 6. Здесь $r_c, x_c, r_2, x_2, r_3', x_3', r_n', x_n'$ — параметры обмоток С, 2, 3 и нагрузки АБПЧ при частоте f_c , соответствующей $s=0$. Параметры обмотки 3 и нагрузки приведены к обмотке 2. Для того чтобы механические характеристики асинхронных двигателей, питающихся от АБПЧ, были независимы от частоты f_3 , напряжение на зажимах обмотки 3 U_{3s}' должно удовлетворять известному уравнению М. П. Костенко [6], которое применительно к АБПЧ примет вид:

$$\frac{U_{3s}'}{U_3'} = \frac{f_{3s}}{f_{30}}, \quad (26)$$

где f_{3s} и U_{3s}' — текущие значения частоты и напряжения, f_{30} и U_3' — частота f_{3s} при $s=0$ и напряжение U_{3s}' при $f_{3s}=f_{30}$, откуда

$$U_{3s}' = U_3' (1 - s). \quad (27)$$

Если намагничивающий контур вынести на зажимы $a-a$, то получим упрощенную схему замещения (рис. 7), которая позволяет вывести сле-

дующие зависимости для тока нагрузки $I''_н$ и э. д. с. синхронного генератора E_c :

$$I''_н = U''_3 (1-s) \left[\frac{\frac{r''_н}{s_3}}{\left(\frac{r''_н}{s_3}\right)^2 + x''^2_н (1-s)^2} - j \frac{x''_н (1-s)}{\left(\frac{r''_н}{s_3}\right)^2 + x''^2_н (1-s)^2} \right]; \quad (28)$$

$$E''_c = U''_3 (1-s) \left[\frac{\left(r'_c + r'_2 + \frac{r'_3}{s_3} + \frac{r''_н}{s_3} \right) + j (x'_c + x'_2 + x'_3 + x''_н) (1-s)}{\frac{r''_н}{s_3} + j x''_н (1-s)} \right]. \quad (29)$$

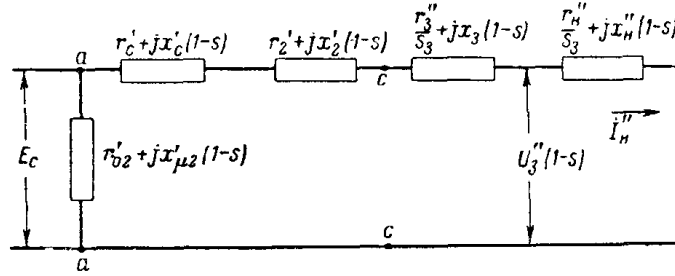


Рис. 7.

Зная ток $I''_н$ и э. д. с. генератора E_c , можно получить выражения электромагнитной мощности синхронного генератора

$$P_{\psi c} = m_c U''_3 \frac{r'_c + r'_2 + \frac{r'_3}{s_3} + \frac{r''_н}{s_3}}{\left[\frac{r''_н}{s_3 (1-s)} \right]^2 + x''^2_н}$$

и его электромагнитного момента

$$M_c = \frac{P_{\psi c}}{\omega_c} = \frac{P_{\psi c}}{\omega} = m_c U''_3 \frac{\left(r'_c + r'_2 + \frac{r'_3}{s_3} + \frac{r''_н}{s_3} \right) (1-s)}{\omega_1 \left[\frac{r''_н}{s_3} + x''_н (1-s)^2 \right]}, \quad (30)$$

а также выражение электромагнитного момента асинхронного преобразователя:

$$M_2 = \frac{m_2 I''^2_н \left(\frac{r'_3}{s_3} + \frac{r''_н}{s_3} \right)}{\omega_2} = \frac{m_2 U''^2_3 \left(\frac{r'_3}{s_3} + \frac{r''_н}{s_3} \right) (1-s)}{\omega_1 \frac{P_c}{P_2} \left[\left(\frac{r''_н}{s_3} \right)^2 + x''^2_н (1-s)^2 \right]}. \quad (31)$$

Как видно из приведенных выше выражений, характеристики АБПЧ являются функцией его параметров, параметров нагрузки и скольжения s . Последнее, однако, является также функцией этих параметров и может быть получено из уравнения равновесия моментов АБПЧ:

$$M_1 = M_c + M_2. \quad (32)$$

Подставив в него значения M_1 , M_2 и M_c , после некоторых преобразований можно получить следующее выражение скольжения s :

$$s^3 + As^2 + Bs + C = 0; \quad (33)$$

здесь

$$A = \frac{2r_n'' r_1' r_2'' - 2k_u r_2'' x_n'' - r_n'' r_1'^2 - r_n'' x_{k1}'^2}{k_u r_2'' x_n'' + r_n'' r_1'^2 + r_n'' x_{k1}'^2};$$

$$B = \frac{k_u r_2'' \left(\frac{r_n'}{s_3} \right)^2 + k_u r_2'' x_n'' + r_n'' r_2'^2 - 2r_n'' r_1' r_2''}{k_u r_2'' x_n'' + r_n'' r_1'^2 + r_n'' x_{k1}'^2};$$

$$C = \frac{r_n'' r_2'^2}{k_u r_2'' x_n'' + r_n'' r_1'^2 + r_n'' x_{k1}'^2},$$

где $x_{k1}'' = x_1' + x_2''$, $r_n'' = r_c' + r_2' + r_3' + r_n'$, $k_u = \frac{U_1^2}{U_3'^2}$.

Число действительных корней уравнения (33) зависит от параметров АБПЧ и его нагрузки и равно числу общих точек кривых $M_1 = f(s)$ и $(M_2 + M_c) = f(s)$.

4. Намагничивающие токи и м. д. с. обмоток 1 и 2

Намагничивающие токи обмоток 1 и 2 в значительной степени определяют их общие токи, электромагнитные нагрузки, АБПЧ и, следовательно, его характеристики, вес и габариты. При расчетах обычных асинхронных двигателей намагничивающий ток определяется через намагничивающие ампер-витки на пару полюсов; последние при заданных магнитных нагрузках определяются по специальным кривым удельных ампер-витков на зубцы и ярмо. Однако воспользоваться этими кривыми для определения намагничивающих токов в АБПЧ нельзя, так как указанные кривые справедливы лишь для случая, когда в магнитопроводе электрической машины имеется только один магнитный поток.

При исследовании намагничивающих токов обмоток 1 и 2 АБПЧ принимаем следующие допущения:

1. Напряжение сети и напряжение синхронного генератора синусоидальны и симметричны.

2. Явлением гистерезиса пренебрегаем. Так как гистерезисная петля для электротехнических сортов железа узкая, то указанное допущение не может внести в результаты исследования существенной погрешности.

3. Число пар полюсов обмотки 2 больше числа пар полюсов обмотки 1 ($p_2 > p_1$). Последнее неравенство в АБПЧ выполняется.

а) Выражения намагничивающих токов и м. д. с. обмоток 1 и 2 без учета высших гармонических в кривых магнитных индукций полей Φ_1 и Φ_2

Рассмотрим каждую из этих составляющих в отдельности.

Магнитодвижущая сила на воздушный зазор.

Магнитодвижущая сила на магнитную цепь: воздушный зазор—зубцы—ярмо, может быть представлена в виде суммы трех ее составляющих

$$f = f_\delta + f_z + f_a, \quad (34)$$

где f_δ , f_z , f_a — м. д. с. на воздушный зазор, зубцы, ярмо.

Если изменение магнитных индукций полей Φ_1 и Φ_2 в воздушном зазоре принять синусоидальным, то для любой произвольно взятой по окружности ротора точки N , находящейся на расстоянии x от исходной точки M , от которой мы будем вести отсчет расстояний, в любой момент времени величина магнитной индукции поля Φ_1 может быть выражена уравнением

$$B_{\delta 1} = B_{\delta m 1} \sin \left(\omega_s t - \frac{\pi}{\tau_1} x \right), \quad (35a)$$

а магнитная индукция поля Φ_2 — уравнением

$$B_{\delta 2} = B_{\delta m 2} \sin \left(\omega_2 t - \frac{\pi}{\tau_2} x \right), \quad (35b)$$

где $\omega_s = \omega_1 s$ — угловая скорость вращения поля Φ_2 относительно ротора.

Магнитная проницаемость воздуха есть величина постоянная. Поэтому м. д. с.

$$f_{\delta} = F_{\delta 1} \sin \left(\omega_s t - \frac{\pi}{\tau_1} x \right) + F_{\delta 2} \sin \left(\omega_2 t - \frac{\pi}{\tau_2} x \right). \quad (36)$$

Магнитодвижущая сила на зубцы.

Если выразить кривую намагничивания стали в виде гиперболического синуса

$$H = \alpha \operatorname{sh} \beta B,$$

то напряженность магнитного поля в зубцах H_z в любой точке окружности ротора N и в любой момент времени может быть выражена уравнением

$$\begin{aligned} H_z &= \alpha \operatorname{sh} \beta (B_{z1} + B_{z2}) = \\ &= \alpha \operatorname{sh} \left[\beta B_{zm1} \sin \left(\omega_s t - \frac{\pi}{\tau_1} x \right) \right] \operatorname{ch} \left[\beta B_{zm2} \sin \left(\omega_2 t - \frac{\pi}{\tau_2} x \right) \right] + \\ &+ \alpha \operatorname{ch} \left[\beta B_{zm1} \sin \left(\omega_s t - \frac{\pi}{\tau_1} x \right) \right] \operatorname{sh} \left[\beta B_{zm2} \sin \left(\omega_2 t - \frac{\pi}{\tau_2} x \right) \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Разлагая каждый из сомножителей первого и второго членов этого уравнения в ряд и умножая полученное уравнение на L_z , получим выражение м. д. с. на зубцы (на пару полюсов):

$$\begin{aligned} f_z &= -2L_z \alpha \cdot J_0(j\beta B_{zm2}) j \sum_{n=0}^{n=\infty} J_{2n+1}(j\beta B_{zm1}) \sin \left[(2n+1) \left(\omega_s t - \frac{\pi}{\tau_1} x \right) \right] - \\ &- 2L_z \alpha J_0(j\beta B_{zm1}) j \sum_{n=0}^{n=\infty} J_{2n+1}(j\beta B_{zm2}) \sin \left[(2n+1) \left(\omega_2 t - \frac{\pi}{\tau_2} x \right) \right] - \\ &- 4L_z \alpha \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{b=1}^{b=\infty} j J_{2n+1}(j\beta B_{zm2}) J_{2b}(j\beta B_{zm1}) \times \\ &\times \cos \left[2b \left(\omega_s t - \frac{\pi}{\tau_1} x \right) \right] \sin \left[(2n+1) \left(\omega_2 t - \frac{\pi}{\tau_2} x \right) \right] - \\ &- 4L_z \alpha \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{c=0}^{c=\infty} J_{2n}(j\beta B_{zm2}) j J_{2c+1}(j\beta B_{zm1}) \times \\ &\times \sin \left[(2c+1) \left(\omega_s t - \frac{\pi}{\tau_1} x \right) \right] \cos \left[2n \left(\omega_2 t - \frac{\pi}{\tau_2} x \right) \right]. \end{aligned} \quad (38)$$

Коэффициенты $J_n(j\beta B)$ есть бесселевы функции n -го порядка от чисто мнимого аргумента; при четных n они будут действительными величинами, а при нечетных — чисто мнимыми.

После некоторых преобразований, пренебрегая величинами второго порядка, получим:

$$\begin{aligned} i_z = & F_{z1} \sin\left(\omega_s t - \frac{\pi}{\tau_1} x\right) + F_{z2} \sin\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{\tau_2} x\right) - \\ & - F_{z1s} \sin\left(3\omega_s t - \frac{\pi}{\tau_{1s}} x\right) + F'_z \sin\left[(2\omega_2 - \omega_s) t - \frac{\pi}{\tau'} x\right] - \\ & - F''_z \sin\left[(2\omega_2 + \omega_s) t - \frac{\pi}{\tau''} x\right] - F'''_z \sin\left[(\omega_2 - 2\omega_s) t - \frac{\pi}{\tau'''} x\right] - \\ & - F_z^{\text{IV}} \sin\left[(\omega_2 + 2\omega_s) t - \frac{\pi}{\tau^{\text{IV}}} x\right]. \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$F_{z1} = -2L_z \alpha J_0(j\beta B_{zm2}) jJ_1(j\beta B_{zm1});$$

$$F_{z2} = -2L_z \alpha J_0(j\beta B_{zm1}) jJ_1(j\beta B_{zm2});$$

$$F_{z1s} = 2L_z \alpha J_0(j\beta B_{zm2}) jJ_3(j\beta B_{zm1});$$

$$F'_z = F''_z = 2L_z \alpha jJ_1(j\beta B_{zm1}) J_2(j\beta B_{zm2});$$

$$F'''_z = F_z^{\text{IV}} = 2L_z \alpha J_1(j\beta B_{zm2}) J_2(j\beta B_{zm1})$$

— амплитуды основных и высших гармонических м. д. с. на зубцы;

$$\tau_{1s} = \frac{\tau_1}{3}; \quad \tau' = \frac{p_1}{2p_2 - p_1} \tau_1; \quad \tau'' = \frac{p_1}{2p_2 + p_1} \tau_1;$$

$$\tau''' = \frac{p_1}{p_2 - 2p_1} \tau_1; \quad \tau^{\text{IV}} = \frac{p_1}{p_2 + 2p_1} \tau_1$$

— полюсные деления высших гармонических м. д. с., числа пар полюсов которых соответственно равны:

$$p_{1s} = 3p_1; \quad p' = (2p_2 - p_1) p_1; \quad p'' = (2p_2 + p_1) p_1;$$

$$p''' = (p_2 - 2p_1) p_1, \quad p^{\text{IV}} = (p_2 + 2p_1) p_1.$$

Магнитодвижущая сила на ярмо.

Если магнитные индукции в воздушном зазоре $B_{\delta 1}$ и $B_{\delta 2}$ в любой произвольно взятой на окружности ротора точке N , находящейся на расстоянии x от исходной точки M , выражаются уравнениями (35), то магнитные индукции полей Φ_1 и Φ_2 в любом сечении ярма, лежащем в плоскости, проходящей через точку N и ось машины, в любой момент времени будут выражаться уравнениями:

$$\begin{aligned} B_{a1} &= B_{am1} \cos\left(\omega_s t - \frac{\pi}{\tau_1} x\right); \\ B_{a2} &= B_{am2} \cos\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{\tau_2} x\right), \end{aligned} \quad (40)$$

а напряженность магнитного поля — уравнением

$$\begin{aligned}
 H_a &= \alpha \operatorname{sh} \beta (B_{a1} + B_{a2}) = \\
 &= \alpha \operatorname{sh} \left[\beta B_{am1} \cos \left(\omega_s t - \frac{\pi}{\tau_1} x \right) \right] \operatorname{ch} \left[\beta B_{am2} \cos \left(\omega_2 t - \frac{\pi}{\tau_2} x \right) \right] + \\
 &+ \alpha \operatorname{ch} \left[\beta B_{am1} \cos \left(\omega_s t - \frac{\pi}{\tau_1} x \right) \right] \operatorname{sh} \left[\beta B_{am2} \cos \left(\omega_2 t - \frac{\pi}{\tau_2} x \right) \right]. \quad (41)
 \end{aligned}$$

Разлагая каждый из сомножителей первого и второго членов этого уравнения в ряд и пренебрегая величинами второго порядка, получим:

$$\begin{aligned}
 H_a &= -2\alpha J_0 (j\beta B_{am2}) jJ_1 (j\beta B_{am1}) \cos \left(\omega_s t - \frac{\pi}{\tau_1} x \right) - \\
 &- 2\alpha J_0 (j\beta B_{am1}) jJ_1 (j\beta B_{am2}) \cos \left(\omega_2 t - \frac{\pi}{\tau_2} x \right) + \\
 &+ 2\alpha J_0 (j\beta B_{am2}) jJ_3 (j\beta B_{am1}) \cos \left(3\omega_s t - \frac{\pi}{\tau_{13}} x \right) + \\
 &+ 2\alpha jJ_1 (j\beta B_{am1}) J_2 (j\beta B_{am2}) \cos \left[(2\omega_2 - \omega_s) t - \frac{\pi}{\tau'} x \right] + \\
 &+ 2\alpha jJ_1 (j\beta B_{am1}) J_2 (j\beta B_{am2}) \cos \left[(2\omega_2 + \omega_s) t - \frac{\pi}{\tau''} x \right] + \\
 &+ 2\alpha jJ_1 (j\beta B_{am2}) J_2 (j\beta B_{am1}) \cos \left[(\omega_2 - 2\omega_s) t - \frac{\pi}{\tau'''} x \right] + \\
 &+ 2\alpha jJ_1 (j\beta B_{am2}) J_2 (j\beta B_{am1}) \cos \left[(\omega_2 + 2\omega_s) t - \frac{\pi}{\tau_{IV}} x \right]. \quad (42)
 \end{aligned}$$

Магнитодвижущая сила n -ной гармонической на бесконечно малом участке ярма dl равна

$$df_{an} = H_{an} dl = H_{an} \frac{L_{an}}{\pi} dQ_n, \quad (43)$$

где L_{an} — длина магнитной силовой линии в ярме n -ной гармонической (на два полюса);

dQ_n — бесконечно малый угол в электрических радианах n -ной гармонической, соответствующий дуге dl .

Магнитодвижущая сила n -ной гармонической на ярмо в любой произвольно взятой на окружности ротора точке N в любой момент времени определяется уравнением

$$f_{an} = \int_{-Q_n}^{+Q_n} H_{an} \frac{L_{an}}{\pi} dQ_n, \quad (44)$$

где Q_n — угол в электрических радианах n -ной гармонической м. д. с. между исходной M и текущей точками.

Тогда м. д. с. на ярмо в любой произвольно взятой на окружности ротора точке N в любой момент времени будет равна:

$$f_a = \sum f_{an} = \sum \int_{-Q_n}^{+Q_n} H_{an} \frac{L_{an}}{\pi} dQ_n, \quad (45)$$

После преобразований будем иметь:

$$\begin{aligned}
f_a = & F_{a1} \sin \left(\omega_s t - \frac{\pi}{\tau_1} x \right) + F_{a2} \sin \left(\omega_2 t - \frac{\pi}{\tau_2} x \right) + \\
& + F_{a1s} \sin \left(3\omega_s t - \frac{\pi}{\tau_{1s}} x \right) + F'_a \sin \left[(2\omega_2 - \omega_s) t - \frac{\pi}{\tau'} x \right] + \\
& + F''_a \sin \left[(2\omega_2 + \omega_s) t - \frac{\pi}{\tau''} x \right] + F'''_a \sin \left[(\omega_2 - 2\omega_s) t - \frac{\pi}{\tau'''} x \right] + \\
& + F^{IV}_a \sin \left[(\omega_2 + 2\omega_s) t - \frac{\pi}{\tau^{IV}} x \right], \tag{46}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
F_{a1} &= -\frac{4}{\pi} L_{a1} \alpha J_0(j\beta B_{am2}) jJ_1(j\beta B_{am1}); \\
F_{a2} &= -\frac{4}{\pi} L_{a2} \alpha J_0(j\beta B_{am1}) jJ_1(j\beta B_{am2}); \\
F_{a1s} &= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{p_1}{p_{1s}} L_{a1} \alpha J_0(j\beta B_{am2}) jJ_3(j\beta B_{am1}); \\
F'_a &= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{p_1}{p'} L_{a1} \alpha jJ_1(j\beta B_{am1}) J_2(j\beta B_{am2}); \\
F''_a &= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{p_1}{p''} L_{a1} \alpha jJ_1(j\beta B_{am1}) J_2(j\beta B_{am2}); \\
F'''_a &= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{p_1}{p'''} L_{a1} \alpha jJ_1(j\beta B_{am2}) J_2(j\beta B_{am1}); \\
F^{IV}_a &= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{p_1}{p^{IV}} L_{a1} \alpha jJ_1(j\beta B_{am2}) J_2(j\beta B_{am1}).
\end{aligned}$$

Подставляя значения м. д. с. f_δ , f_z , f_a по (36), (39) и (46) в уравнение (34), получим выражение мгновенных значений м. д. с. (на пару полюсов) на магнитную цепь: воздушный зазор—зубцы—ярмо, в любой точке окружности ротора N в любой момент времени t в виде:

$$\begin{aligned}
f = & F_1 \sin \left(\omega_s t - \frac{\pi}{\tau_1} x \right) + F_2 \sin \left(\omega_2 t - \frac{\pi}{\tau_2} x \right) + \\
& + F_{1s} \sin \left(3\omega_s t - \frac{\pi}{\tau_{1s}} x \right) + F' \sin \left[(2\omega_2 - \omega_s) t - \frac{\pi}{\tau'} x \right] + \\
& + F'' \sin \left[(2\omega_2 + \omega_s) t - \frac{\pi}{\tau''} x \right] + F''' \sin \left[(\omega_2 - 2\omega_s) t - \frac{\pi}{\tau'''} x \right] + \\
& + F^{IV} \sin \left[(\omega_2 + 2\omega_s) t - \frac{\pi}{\tau^{IV}} x \right], \tag{47}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
F_1 &= F_{\delta 1} + F_{z1} + F_{a1}, \quad F_2 = F_{\delta 2} + F_{z2} + F_{a2}, \quad F_{1s} = F_{a1s} - F_{z1s}; \\
F^I &= F'_a + F'_z, \quad F'' = F''_a - F''_z, \quad F''' = F'''_a - F'''_z, \quad F^{IV} = F^{IV}_a - F^{IV}_z.
\end{aligned}$$

Последнее выражение м. д. с. f выведено, как это указывалось выше, из условий, что в воздушном зазоре преобразователя существуют лишь два магнитных потока Φ_1 и Φ_2 с синусоидальным распределением магнитных индукций $B_{\delta 1}$ и $B_{\delta 2}$.

Однако в силу известных свойств трехфазных обмоток в кривой м. д. с. f будут отсутствовать те из высших гармонических $f_{13}, f', f'', f''', f^{IV}$, обмоточные коэффициенты которых по отношению к обмоткам 1, 2, 3 АБПЧ будут равны нулю или близки к нулю, что приведет к появлению в воздушном зазоре соответствующих высших гармонических магнитной индукции [12], которые будут находиться в противофазе с отсутствующими гармоническими м. д. с.

Если принять, что в кривой м. д. с. f будут отсутствовать все высшие гармонические, то выражение м. д. с. f примет вид:

$$f = F_1 \sin\left(\omega_s t - \frac{\pi}{\tau_1} x\right) + F_2 \sin\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{\tau_2} x\right), \quad (48)$$

откуда выражения м. д. с. обмотки 1 f_1 в осях статора и м. д. с. обмотки 2 f_2 в осях ротора могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1 &= F_1 \sin\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{\tau_1} x\right), \\ f_2 &= F_2 \sin\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{\tau_2} x\right). \end{aligned} \quad (49)$$

Действующее значение намагничивающего тока обмотки 1

$$I_1 = \frac{p_1 F_1}{2,7 \omega_1 k_{w1}}. \quad (50)$$

Действующее значение намагничивающего тока обмотки 2

$$I_2 = \frac{p_2 F_2}{2,7 \omega_2 k_{w2}}. \quad (51)$$

б) *Намагничивающие токи и м. д. с. обмоток 1 и 2 с учетом высших гармонических магнитной индукции*

Выше мы уже отмечали, что кривые изменения магнитных индукций могут содержать высшие гармонические. Рассмотрим их подробнее.

Если в кривой м. д. с. f по выражению (47) гармоническая

$$f_{13} = (F_{a13} - F_{z13}) \sin\left(3\omega_s t - \frac{\pi}{\tau_{13}} x\right) \quad (52)$$

имеет место, а в действительности в силу указанных уже свойств трехфазных обмоток она отсутствует, то в воздушном зазоре появится гармоническая магнитной индукции

$$B_{\delta 13} = \pm B_{\delta m 13} \sin\left(3\omega_s t - \frac{\pi}{\tau_{13}} x\right). \quad (53)$$

Очевидно, что $B_{\delta 13}$ будет тем больше, чем больше $F_{13} = F_{a13} - F_{z13}$ в выражении (47). Проведенные автором расчеты показали, что при более или менее рациональном (по экономическим соображениям) распределении магнитных нагрузок между ярмом и зубцами м. д. с. F_{13} в выражении (47) мала. Следовательно, в этих случаях гармоническая магнитной индукции $B_{\delta 13}$ будет мала и ей можно пренебречь. Если в АБПЧ отношение $\frac{p_2}{p_1} = 3$, то при выборе магнитных нагрузок на ярмо и зубцы условие $F_{13} = F_{a13} - F_{z13} \approx 0$ должно соблюдаться обязательно.

Действительно, если в выражении (47) $F_{13} \neq 0$, то $B_{\delta 13} \neq 0$. Гармоническая $B_{\delta 13}$ и поле обмотки 2 в этом случае будут иметь одно и то же число пар полюсов, но разную скорость вращения в пространстве, что приведет к появлению вибрационных сил.

Если в кривой м. д. с. f по выражению (47) гармонические f' , f'' , f''' , f^{IV} имеют место, а в действительности будут отсутствовать, то в кривой магнитной индукции появятся высшие гармонические магнитной индукции B'_δ , B''_δ , B'''_δ , B^{IV}_δ .

Для того чтобы найти выражения м. д. с. F_{z1} , F_{z2} , F_{a1} , F_{a2} с учетом влияния на них высших гармонических магнитной индукции B'_δ , B''_δ , B'''_δ , B^{IV}_δ , необходимо эти гармонические ввести в уравнения (36), (37) и (41) и произвести математические операции, подобные тем, которые мы проводили выше. В результате получим выражение, аналогичное выражению (47), в котором, однако, м. д. с. F_{z1} , F_{z2} , F_{a1} , F_{a2} будут функциями магнитных индукций основных составляющих и учитываемых высших гармонических. Величина высших гармонических магнитной индукции при заданных основных составляющих определяется решением системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} F' &= 0; \\ F'' &= 0; \\ F''' &= 0; \\ F^{IV} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Обычно в кривой м. д. с. отсутствуют не все из высших гармонических f' , f'' , f''' , f^{IV} . Следовательно, не все из высших гармонических магнитной индукции B'_δ , B''_δ , B'''_δ , B^{IV}_δ будут иметь место, а из имеющих при расчете м. д. с. F_{z1} , F_{z2} , F_{a1} , F_{a2} достаточно учесть одну — две наиболее ярко выраженные. Ниже приведены выражения м. д. с. F_{z1} , F_{z2} , F_{a1} , F_{a2} с учетом высшей гармонической магнитной индукции:

$$\begin{aligned} B'_\delta &= -B'_{\delta m} \sin \left[(2\omega_2 - \omega_s) t - \frac{\pi}{\tau} x \right]; \\ F_{z1} &= 2L_z \alpha \left\{ -J_0(j\beta B'_{zm}) J_0(j\beta B_{zm2}) jJ_1(j\beta B_{zm1}) - \right. \\ &\quad \left. - jJ_1(j\beta B'_{zm}) J_2(j\beta B_{zm2}) [J_0(j\beta B_{zm1}) - J_2(j\beta B_{zm1})] \right\}; \\ F_{z2} &= 2L_z \alpha \left\{ -J_0(j\beta B'_{zm}) J_0(j\beta B_{zm1}) jJ_1(j\beta B_{zm2}) - \right. \\ &\quad \left. - jJ_1(j\beta B'_{zm}) jJ_1(j\beta B_{zm1}) [jJ_3(j\beta B_{zm2}) - jJ_1(j\beta B_{zm2})] \right\}; \\ F_{a1} &= \frac{4}{\pi} L_{a1} \alpha \left\{ -J_0(j\beta B'_{am}) J_0(j\beta B_{am2}) jJ_1(j\beta B_{am1}) - \right. \\ &\quad \left. - jJ_1(j\beta B'_{am}) J_2(j\beta B_{am2}) [J_0(j\beta B_{am1}) - J_2(j\beta B_{am1})] \right\}; \\ F_{a2} &= \frac{4}{\pi} L_{a2} \alpha \left\{ -J_0(j\beta B'_{am}) J_0(j\beta B_{am1}) jJ_1(j\beta B_{am2}) - \right. \\ &\quad \left. - jJ_1(j\beta B'_{am}) jJ_1(j\beta B_{am1}) [jJ_3(j\beta B_{am2}) - jJ_1(j\beta B_{am2})] \right\}. \end{aligned} \quad (55)$$

Магнитные индукции в зубцах B'_{zm} и ярме B'_{am} определяются уравнением

$$\begin{aligned}
& 2L_z \alpha [J_0(j\beta B'_{zm}) jJ_1(j\beta B_{zm1}) J_2(j\beta B_{zm2}) + \\
& + J_0(j\beta B_{zm1}) J_0(j\beta B_{zm2}) jJ_1(j\beta B'_{zm})] + \\
& + \frac{4}{\pi} \frac{p_1}{p'} L_{a1} \alpha [J_0(j\beta B'_{am}) jJ_1(j\beta B_{am1}) J_2(j\beta B_{am2}) + \\
& + J_0(j\beta B_{am1}) J_0(j\beta B_{am2}) jJ_1(j\beta B'_{am})] - 1,6\delta B'_{\delta m} = 0.
\end{aligned} \quad (56)$$

При выводе уравнений (55), (56) величинами второго порядка пренебрегали; при этом предполагалось, что

$$(B_{zm1} + B_{zm2}) < 22\,000 \text{ гс}, \text{ а } (B_{am1} + B_{am2}) < 20\,000 \text{ гс}.$$

Произведенные автором расчеты показали, что гармонические могут оказывать довольно большое влияние на м. д. с. зубцов и ярма. Сопоставление расчетных и опытных данных подтверждает предлагаемый метод расчета м. д. с. и намагничивающих токов АБПЧ.

Выводы

1. Как следует из принципа действия АБПЧ, последний позволяет получить «жесткую» внешнюю характеристику при помощи компаундирования, чего не удастся получить у известных бесщеточных преобразователей частоты.

2. Режим работы отдельных обмоток АБПЧ и распределение мощностей в нем зависят от соотношения чисел пар полюсов p_1, p_2, p_c и направления вращения поля Φ_2 относительно ротора. Экономически наиболее выгодным является режим, когда направления вращения поля Φ_2 относительно ротора и вращения самого ротора совпадают.

3. Полученные аналитические выражения токов, э. д. с., мощностей, моментов и скольжения s АБПЧ позволяют произвести расчет его рабочих характеристик без каких-либо графических построений.

4. Выведенные выражения м. д. с. и намагничивающих токов, дающие достаточную для практических расчетов точность, могут быть рекомендованы для расчета магнитной цепи и выбора электромагнитных нагрузок АБПЧ, которыми определяются его вес и объем.

Литература

1. Рихтер Р., Электрические машины, т. IV, ОНТИ, 1939.
2. Полуянов, Влияние частоты на размеры асинхронного двигателя, «Электричество», 1936, № 2.
3. Рукавишников Н. Н. и Ермолин Н. П., Умножение частоты с помощью трансформаторов, «Электричество», 1935, № 4.
4. Вологдин В. М. и Сплицын М. А., Генераторы высокой частоты, Госэнергоиздат, 1935.
5. Таращанский М. М., Преобразователи частоты, основанные на принципе искажения магнитного поля, «Вестник электропромышленности», 1939, № 8.
6. Костенко М. П., Электрические машины, Специальная часть, ГЭИ, 1949.
7. Липатов Д. Н., Некоторые вопросы работы преобразовательных установок с асинхронным преобразователем частоты, «Электричество», 1954, № 5.
8. Артемьев А. И., Аналитическое определение характеристик асинхронного преобразователя частоты и его рациональная геометрия, Сборник научных трудов Ивановского энергетического института имени В. И. Ленина, выпуск IV, 1951.
9. Бессонов Л. А., Электрические цепи со сталью, ГЭИ, 1948.
10. Грей Э. и Матьюд Г. Б., Функции Бесселя и их приложение к физике и механике, Изд. иностранной литературы, 1953.
11. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 3, ГОНТИ, 1939.
12. Рихтер Р., Электрические машины, т. 1, ОНТИ, 1935.
13. Нейман П. Л. и Калантаров Л. Р., Теоретические основы электротехники, Госэнергоиздат, 1951.