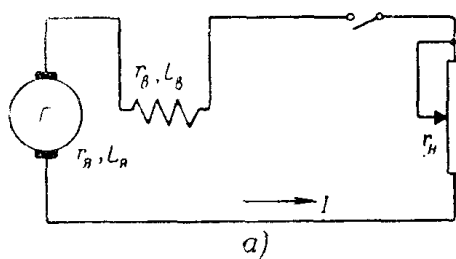


О САМОВОЗБУЖДЕНИИ ГЕНЕРАТОРОВ ПОСТОЯННОГО ТОКА

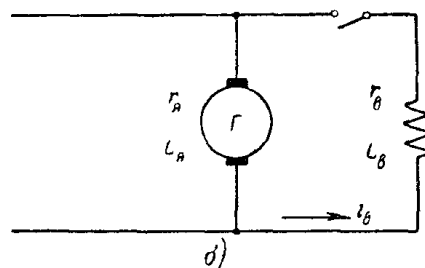
Л. И. Ганджа

(Представлено научно-методическим семинаром ЭМФ ТПИ)

По способу включения обмотки возбуждения различают два типа самовозбуждающихся генераторов: с последовательным и параллельным возбуждениями. В генераторе первого типа (рис. 1,а) процесс возбуждения начинается за счет э. д. с. e_0 от остаточного магнетизма с момента подключения к нему нагрузки. В генераторе второго типа с непод-



а)



б)

Рис. 1.

ключенной к якору нагрузкой (рис. 1,б) процесс возбуждения начинается также за счет e_0 с момента подключения к якору его обмотки возбуждения. В обоих случаях последняя включается последовательно с якром и оба названные элемента обтекаются одним током; естественно поэтому, что процесс самовозбуждения в обоих случаях будет описываться одним дифференциальным уравнением, и физика процесса возбуждения обоих генераторов будет одна и та же. Далее будем подробно рассматривать явления, связанные с процессом возбуждения генератора первого типа, поскольку генератор с последовательным возбуждением в основном и определяет автоколебательные свойства системы «генератор — двигатель».

Выводы, которые мы получим при рас-

смотрении свойств системы рис. 1,а, можно будет распространить и на систему рис. 1,б.

Рассмотрим подробнее процесс возбуждения генератора с последовательным возбуждением при включении его на омическое сопротивление, т. е. на нагрузку, не способную накапливать энергию какого-либо вида. Выводы, которые мы при этом получим, окажутся необходимыми при рассмотрении автоколебаний в простой системе «генератор — двигатель».

1. Дифференциальное уравнение процесса самовозбуждения генератора. Применительно к схеме рис. 1,а введем следующие обозначения:

$e_2 = e_2(I)$ — э. д. с. генератора, являющаяся нелинейной функцией тока возбуждения, равного току нагрузки, и определяемая по кривой намагничивания (рис. 2);

$R = r_a + r_f + r_n$ — полное сопротивление силовой цепи, где r_a , r_f и r_n — соответственно сопротивления якоря генератора, его обмотки возбуждения и нагрузки; за счет падения напряжения в щеточном контакте, зависящего от тока нагрузки, R является вели-

чиной переменной и обуславливает нелинейную вольт-амперную характеристику $u = RI = u(I)$, представляющую собой падение напряжения в силовой цепи;

$L(I) = L_{\alpha}(I) + L_{\theta}(I)$ — соответственно коэффициенты самоиндукции силовой цепи, обмотки якоря генератора и его обмотки возбуждения, являющиеся также функциями тока нагрузки.

Принимая обычные допущения (отсутствие вихревых токов, реакции якоря и пр.), будем иметь следующее дифференциальное уравнение, описывающее переходный процесс самовозбуждения генератора:

$$e_z(I) = R(I) \cdot I + L(I) \frac{dI}{dt} = u(I) + L(I) \frac{dI}{dt}. \quad (1)$$

Уравнение (1) является нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка. Система рис. 1,б опишется тем же уравнением (1) с заменой в нем I на i_a .

2. Состояния равновесия генератора. Решая (1) относительно производной, получим:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{e_z(I) - u(I)}{L(I)}. \quad (2)$$

По окончании переходного процесса система достигнет состояния равновесия, ток станет равен установившемуся току $I_{уст}$, а производная $\frac{dI_{уст}}{dt}$ станет равной нулю. Так как рассматриваемая нами система описывается дифференциальным уравнением первого порядка, то для установившегося процесса (или для состояний равновесия) необходимо и достаточно положить равной нулю только одну первую производную $\frac{dI}{dt}$. Таким образом, полагая $I = I_{уст}$, из (2) получим:

$$\frac{dI_{уст}}{dt} = \frac{e_z(I_{уст}) - u(I_{уст})}{L(I_{уст})} = 0,$$

(3)

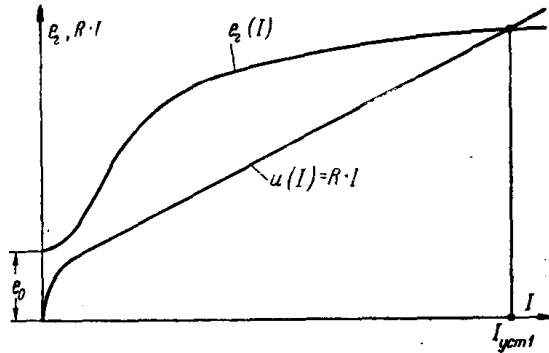


Рис. 2.

откуда следует, что необходимым и достаточным условием равновесия системы рис. 1,а является условие

$$e_z(I_{уст}) = u(I_{уст}). \quad (4)$$

Последнее означает, что система достигает состояний равновесия в точках пересечения кривых $e_z(I)$ и $u(I)$ (рис. 2). Имея в виду, что генератор может намагничиваться как до положительных, так и до отрицательных значений э. д. с. при соответствующих направлениях тока в обмотке возбуждения, получим две точки A_1 и A'_1 , соответствующие состояниям равновесия при условии, что кривая $e_z(I)$ располагается выше кривой $u(I)$ в области значений тока от 0 до $I_{уст}$ (рис. 3).

3. Устойчивость состояний равновесия генератора. Так как уравнения (1) и (2) являются нелинейными, то исследование устойчивости состояний равновесия рассматриваемой системы должно быть произведено по методу Ляпунова. Для этого полагаем прежде всего

$$I = I_{уст} + \Delta I, \quad (5)$$

где ΔI является отклонением тока от его установившегося (или равновесного) значения. Так как из (2) следует, что $\frac{dI}{dt}$ является функцией тока, то, полагая

$$\frac{dI}{dt} = f(I) \quad (6)$$

и подставляя (5) в (6), будем иметь:

$$\frac{d(\Delta I)}{dt} = f(I_{уст} + \Delta I), \quad (7)$$

а разлагая $\frac{d(\Delta I)}{dt}$ в ряд Тэйлора по степеням ΔI , получим:

$$\frac{d(\Delta I)}{dt} = f(I_{уст}) + f'(I_{уст})\Delta I + \frac{1}{1.2}f''(I_{уст})(\Delta I)^2. \quad (8)$$

Следуя Ляпонову, отбросим в (8) члены, содержащие ΔI в степенях, больших первой; имея, кроме того, в виду, что в соответствии с (6)

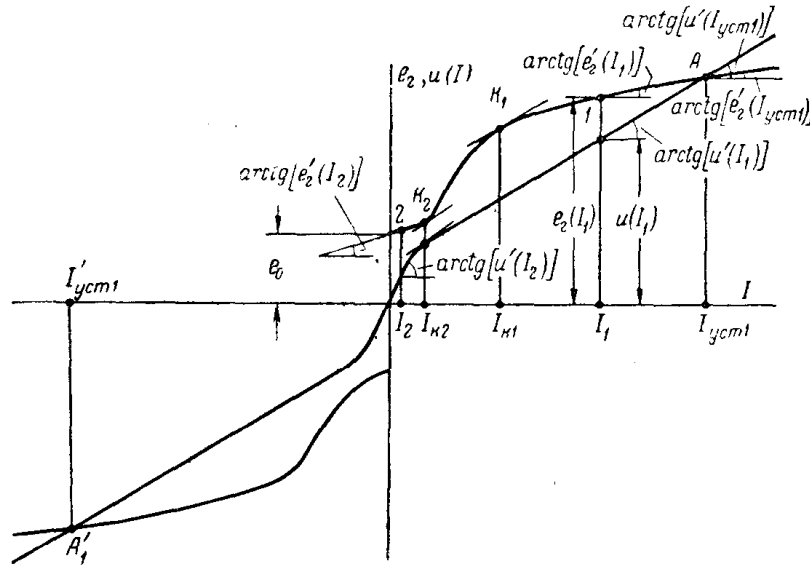


Рис. 3.

и (3) $f(I_{уст}) = 0$, получим линейное уравнение первого приближения в виде:

$$\frac{d(\Delta I)}{dt} = f'(I_{уст})\Delta I. \quad (9)$$

Для определения $f'(I_{уст})$ найдем $f'(I)$ на основании (6) и (2). Будем иметь:

$$f'(I) = \frac{[e'_2(I) - u'(I)]L'(I) - L'(I)[e_2(I) - u(I)]}{[L(I)]^2},$$

и подставляя $I = I_{уст}$ и имея в виду (4), получим:

$$f'(I_{уст}) = \frac{e'_2(I_{уст}) - u'(I_{уст})}{L(I_{уст})}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), получим окончательно:

$$\frac{d(\Delta I)}{dt} - \frac{e'_2(I_{уст}) - u'(I_{уст})}{L(I_{уст})} \Delta I = 0. \quad (11)$$

Характеристическое уравнение для линейного дифференциального уравнения (11) имеет вид:

$$p - \frac{e'_2(I_{ycm}) - u'(I_{ycm})}{L(I_{ycm})} = 0, \quad (12)$$

откуда определяется единственный корень этого уравнения:

$$p = \frac{e'_2(I_{ycm}) - u'(I_{ycm})}{L(I_{ycm})}. \quad (13)$$

Так как в соответствии с рис. 3 $|e'_2(I_{ycm})| < |u'(I_{ycm})|$, то на основании (13) корень $p < 0$, что, по Ляпунову, является признаком устойчивого состояния равновесия. Так как уравнению (11) соответствует решение $\Delta I = Ce^{pt}$, где C — постоянная интегрирования, то при $p < 0$ отклонение ΔI при $t \rightarrow \infty$ затухает, т. е. система стремится к прежнему состоянию равновесия.

Таким образом, на основании (13) необходимым и достаточным условием устойчивости состояния равновесия рассматриваемой системы является условие

$$e'_2(I_{ycm}) - u'(I_{ycm}) < 0, \quad (14)$$

и в соответствии с этим точки A_1 и A'_1 (рис. 3) соответствуют состояниям устойчивого равновесия.

4. Изображение процесса самовозбуждения на фазовой плоскости.

Как известно, фазовой плоскостью называется плоскость, на которой изображаются состояния системы и их изменения. Фазовой плоскостью является плоскость $\frac{dx}{dt} = f(x)$. Вводя обозначение для производной тока по времени $\frac{dI}{dt} = I'_t$, получим на основании (1):

$$\left. \begin{aligned} e_2(I) &= u(I) + L(I)I'_t, \\ I'_t &= \frac{dI}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (14a)$$

откуда

$$I'_t = \frac{e_2(I) - u(I)}{L(I)}, \quad (15)$$

и, таким образом, фазовая траектория $I'_t = f(I)$ может быть легко построена, если разности между ординатами кривых $e_2(I)$ и $u(I)$ (рис. 2 и 3), разделенные на $L(I)$, откладывать при соответствующих значениях тока на плоскости $I'_t - I$. Такое построение выполнено на рис. 4 для одного квадранта.

Очевидно, что условие $I'_t = 0$, представляющее собой условие (3), является необходимым и достаточным для нахождения состояний равновесия. Поэтому на основании (15) и рис. 4 состояние равновесия может быть найдено на фазовой плоскости как точка пересечения интегральной кривой с осью I (точка A_1 на рис. 4).

Далее из (15) и из рис. 4 следует, что I'_t является однозначной функцией тока; поэтому в рассматриваемой системе невозможны периодические движения и замкнутые фазовые траектории.

Так как изображающая точка движется по фазовой траектории в первом квадранте слева направо (что соответствует возрастанию I при положительной I'_t) и в четвертом квадранте справа налево (что

соответствует убыванию I при отрицательной I'_t), то на рис. 4 изображающая точка стремится к точке A_1 как в области первого, так и в области четвертого квадрантов, что показано стрелками и что также является признаком устойчивости рассматриваемого состояния равновесия.

Дифференцируя (15) по току, получим:

$$I''_{t,I} = \frac{[e'_2(I) - u'(I)] L(I) - L'(I) [e_2(I) - u(I)]}{[L(I)]^2}. \quad (16)$$

Последнее равенство показывает, что $I''_{t,I}$ обращается в нуль при экстремальных значениях I'_t . Поэтому из (16) вытекает условие

$$[e'_2(I) - u'(I)] L(I) - L'(I) [e_2(I) - u(I)] = 0,$$

или

$$\frac{e_2(I) - u(I)}{L(I)} = \frac{e'_2(I) - u'(I)}{L'(I)}, \quad (17)$$

которое означает, что фазовая траектория приобретает экстремальные значения при тех значениях тока I_1 (или I_2), при которых отношение

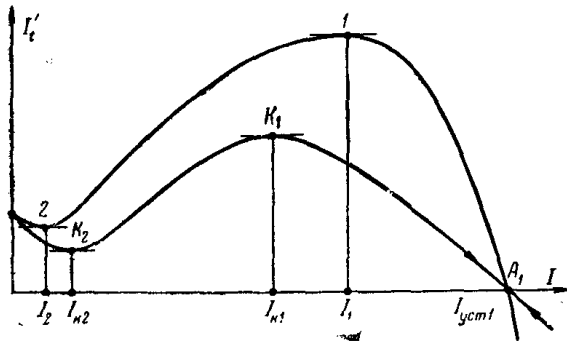


Рис. 4.

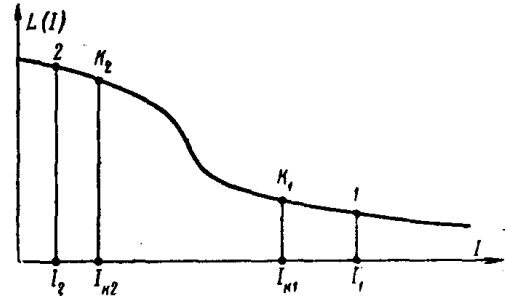


Рис. 5.

разности ординат кривых $e_2(I)$ и $u(I)$ к соответствующей ординате $L(I)$ равно отношению разности производных тех же кривых к соответствующей производной кривой $L(I)$ (рис. 3 и 5).

Имея в виду характер изменения $L(I)$ с ростом I , заключаем, что $L'(I) < 0$ (рис. 5); отсюда следует, что для соблюдения условия (17) всегда должно быть $|e'_2(I)| < |u'(I)|$ при $|e_2(I)| > |u(I)|$, что возможно лишь при $|I_1| > |I_{K_1}|$ в случае максимума интегральной кривой и при $|I_2| < |I_{K_2}|$ — в случае минимума интегральной кривой; при этом точки K_1 и K_2 обладают той особенностью, что в них касательные к $e_2(I)$ параллельны касательным к $u(I)$ при одинаковых токах, т. е. для этих точек выполняется условие $e'_2(I) - u'(I) = 0$.

В частном случае, когда $L(I) = \text{const}$, из (15) получаем:

$$I''_{t,I} = \frac{e'_2(I) - u'(I)}{L(I)}, \quad (18)$$

откуда следует, что в этом случае интегральная кривая приобретает экстремальные значения при таких I_{K_1} и I_{K_2} , при которых $e'_2(I) - u'(I) = 0$, что, очевидно, и соответствует точкам K_1 и K_2 на рис. 3 и 5.

Если учесть, что $I''_{t,I} = \frac{d^2 I}{dt^2}$ и что при $I''_{t,I} = 0$ $I'_t = f(I)$ приобретает экстремальные значения, то нетрудно понять, что точки I_1 и I_2 и соответствующие им токи I_1 и I_2 или точки K_1 и K_2 и соответ-

ствующие им токи I_{K_1} и I_{K_2} на рис. 4 при $L(I) = \text{const}$ определяют точки перегиба в кривой переходного процесса (рис. 6).

Из рассмотрения (15) и (16), а также из рис. 4, следует, кроме того, что для состояний равновесия, для которых $I'_t = 0$, $I''_{t,I} \neq 0$ и $|I''_{t,I}| < \infty$, так как в точках равновесия $e'_2(I) \neq u'(I)$ и конечны. Таким образом, интегральная кривая на фазовой плоскости не перпендикулярна к оси I , так как в точках, соответствующих состояниям равновесия (точка A_1 на рис. 4), имеет ограниченную производную.

Далее из (16) следует, что $I''_{t,I}$ ни при каких значениях I не приобретает неопределенных значений. Отсюда следует, что рассматриваемая фазовая траектория не имеет особенностей (особые точки отсутствуют). Последнее означает, что в данном случае состояния равновесия не являются особыми состояниями системы. Последнее следует также и из того, что уравнение для второй производной по времени от (15) и второе уравнение системы (14) имеют общий множитель $\frac{dI}{dt}$, обращающийся в нуль в состояниях равновесия.

5. Влияние R на поведение системы. На рис. 2, 3 и 4 представлен случай, когда при изменении тока в пределах $0 < I < I_{yсм1}$ кривая $e_2(I)$ располагается выше кривой $u(I)$. Выясним, как будет меняться поведение системы, если мы будем изменять величину R , которое является параметром в (1). Этого можно достичь включением добавочного переменного сопротивления в силовую цепь системы рис. 1,а. Полагая R переменным, мы должны теперь (15) рассматривать как функцию двух переменных — тока и сопротивления, т. е.:

$$I'_t = f(I, R) = \frac{e_2(I) - RI}{L(I)}. \quad (19)$$

Исследуем (19) на состояния равновесия, для чего следует положить:

$$e_2(I_{yсм}) - RI_{yсм} = 0. \quad (20)$$

Из (20) следует, что при изменении R состояния равновесия будут соответствовать различным установившимся токам. При этом в зависимости от поведения функций $e_2(I)$ и $u(I)$ при увеличении R могут появиться несколько точек пересечения кривых $e_2(I)$ и $u(I)$. На рис. 7 представлены различные характерные случаи, соответствующие кривым $u(I)$, приведенным для значений сопротивлений R_1, R_2, R_3, R_4 и R_5 .

Как видим,

при $R = R_1$ имеется одна точка A_{11} равновесия при $I = I_{yсм11}$;

при $R = R_2$ имеются две точки A_{12} и A_{22} равновесия соответственно при $I_{yсм12}$ и $I_{yсм22}$;

при $R = R_3$ — три точки A_{13}, A_{23} и A_{33} , соответствующие токам $I_{yсм13}, I_{yсм23}$ и $I_{yсм33}$;

при $R = R_4$ — две точки A_{14} и A_{24} при токах $I_{yсм14}$ и $I_{yсм24}$;

при $R = R_5$ — одна точка A_{15} при токе $I_{yсм15}$.

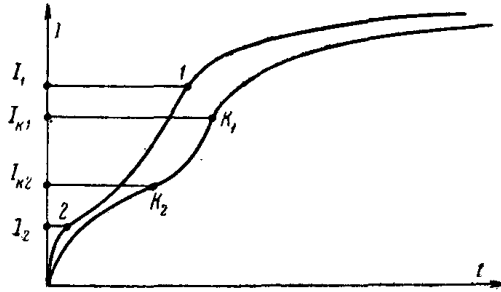


Рис. 6.

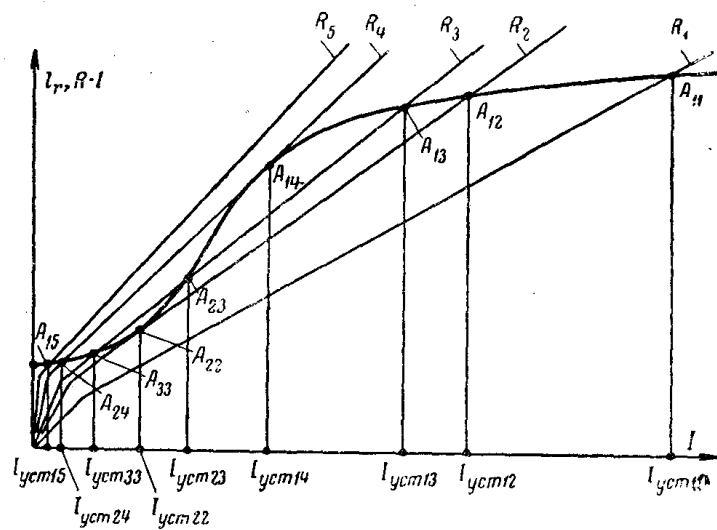


Рис. 7.

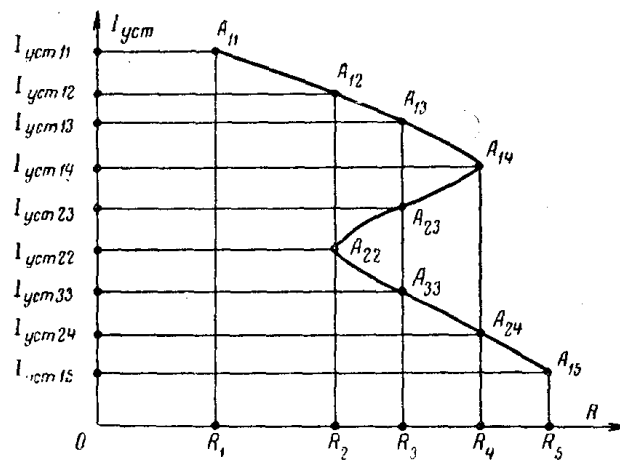


Рис. 8.

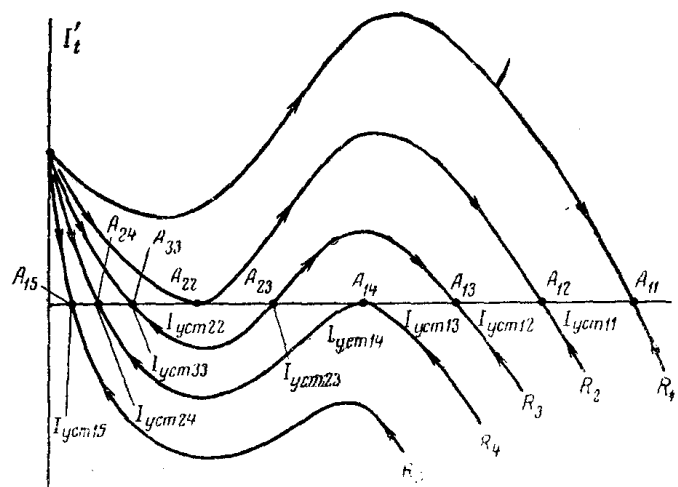


Рис. 9.

Установившиеся значения токов, соответствующие перечисленным точкам состояний равновесия системы, могут быть определены, если (20) при заданном значении R решать каждый раз относительно $I_{уст}$. Исходя из этого и из рис. 7, легко может быть построена зависимость $I_{уст}$ от R , представленная на рис. 8. Из нее следует, что при изменении сопротивления и при некоторых его значениях система приобретает или теряет некоторые состояния равновесия. Как известно, значения параметра, при которых происходит изменение числа устойчивых состояний равновесия системы,

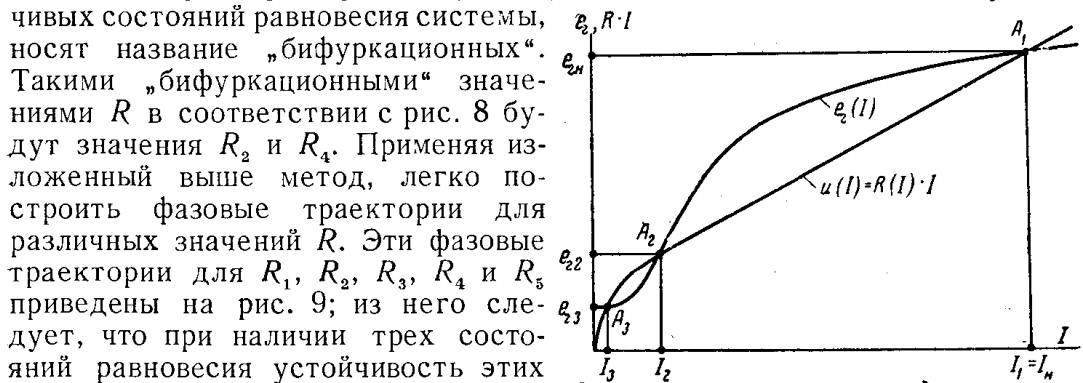


Рис. 10.

носят название „бифуркационных“. Такими „бифуркационными“ значениями R в соответствии с рис. 8 будут значения R_2 и R_4 . Применяя изложенный выше метод, легко построить фазовые траектории для различных значений R . Эти фазовые траектории для R_1, R_2, R_3, R_4 и R_5 приведены на рис. 9; из него следует, что при наличии трех состояний равновесия устойчивость этих состояний чередуется; так, например, точка A_{13} соответствует устойчивому, точка A_{23} — неустойчивому и точка A_{33} — вновь устойчивому состояниям равновесия. Особо следует отметить точки A_{22} и A_{14} , соответствующие полустойчивым состояниям равновесия, имеющим место тогда, когда фазовая траектория касается оси I . Обращаясь снова к рис. 8, можем сказать, что ветви $A_{11}—A_{14}$ и $A_{22}—A_{15}$ бифуркационной диаграммы определяют области устойчивых состояний, а ветвь $A_{14}—A_{22}$ — область неустойчивых состояний равновесия генератора.

Рассмотрим отдельно кривые $e_2(I)$ и $u(I)$ для случая трех состояний равновесия (рис. 10). Как уже указано выше, точки A_1 и A_3 являются точками устойчивых, а точка A_2 — неустойчивого состояний равновесия. Если предположить, что точка A_1 соответствует номинальному режиму генератора, то точка A_3 по сравнению с точкой A_1 располагается очень близко к началу координат; так как она определяет устойчивое состояние равновесия, то при подключении нагрузки к генератору последний возбудится не до номинального напряжения, а лишь до небольшой по величине э. д. с. e_{23} , соответствующей точке A_3 . Чтобы возбудить генератор до номинального напряжения, соответствующего точке A_1 , необходимо приложить к системе возбуждения „внешний толчок“ такой величины, при которой генератор возбудился бы до значения э. д. с. $e_2 > e_{22}$, соответствующей точке A_2 неустойчивого равновесия. Имея в виду сказанное и пренебрегая возбуждением генератора до э. д. с. e_{23} , можно рассматриваемый случай назвать случаем жесткого самовозбуждения. В отличие от него рассмотренный ранее случай (рис. 2, 3 и 4) является случаем мягкого самовозбуждения генератора.

Литература

Андронов А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, ОНТИ НКТП СССР, 1937.