

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Г. А. ДОЩИНСКИЙ

(Представлено научным семинаром кафедры сопротивления материалов)

Основой теории упруго-пластической деформации является ряд гипотез, который в наиболее общей форме, данной Ильюшиным А. А. [1], представляется следующими положениями.

1. Линейные инварианты тензоров напряжений и деформаций пропорциональны

$$\sigma = K \theta. \quad (1)$$

2. Направляющие тензоры напряжений и деформаций совпадают

$$(\bar{D}_s) = (\bar{D}_e). \quad (2)$$

3. Интенсивность напряжений есть определенная, не зависящая от вида напряженного состояния, функция интенсивности деформаций

$$\sigma_i = \Phi(e_i). \quad (3)$$

Эти положения получили практически достаточное экспериментальное подтверждение. Наилучшее соответствие опыту указанных гипотез имеет место при наличии изотропии свойств материалов и соблюдении условий простого нагружения, т. е. нагружения, при котором все компоненты тензора напряжений возрастают пропорционально одному параметру λ . Значительное развитие теории пластичности, в особенности в последнее время, позволило получить большое число практически важных решений.

Однако математическая теория пластичности, будучи построенной на чисто аналитических категориях, лишена наглядности. Это обстоятельство, в известной мере, затрудняет усовершенствование теории, требует от лиц, желающих изучить основы теории, специальной математической подготовки и приводит иногда к различным толкованиям основных понятий.

Ниже рассматривается возможность наглядного геометрического представления основных зависимостей, имеющих место в процессе упруго-пластической деформации (анализируется наиболее изученный случай нагружения—простое нагружение).

Приводимая интерпретация включает в себя обычный способ графического представления в пространстве напряжений условий проч-

ности и пластичности, дополненный некоторыми геометрическими соотношениями. При этом трудно осязаемые понятия — интенсивность напряжений и деформаций заменяются некоторыми новыми категориями. Последнее, однако, не приводит к существенному изменению соотношений, свойственных упруго-пластической деформации и отражаемых отмеченными исходными гипотезами теории. При изложении рассматривается более общий случай, свободный от гипотезы (1), т. е. предполагается возможность существования и остаточной объемной деформации.

Одной из исходных предпосылок теории упруго-пластической деформации является предположение о совпадении направлений главных напряжений и деформаций. Для геометрического отражения этого условия совместим системы ортогональных координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и e_1, e_2, e_3 , обозначив соответственно оси 1, 2, 3. Не накладывая каких-либо условий на соотношения главных напряжений и деформаций, будем считать все оси равноправными. Ось симметрии пространства напряжений и деформаций x образует с осями координат 1, 2, 3 равные углы φ

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (4)$$

Введем понятие средней деформации, как количественной меры деформации для общего случая. Предполагая при этом для пластичных материалов одинаковое сопротивление растяжению и сжатию, т. е. учитывая лишь абсолютные значения деформаций, будем исчислять средние значения как среднеквадратическое отклонение от исходного недеформированного состояния

$$e_{cp} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} e_i^2}{n-1}},$$

где n — число измерений.

Деформация в общем случае характеризуется тремя измерениями. Поведение материала при упруго-пластической деформации устанавливается на основе анализа его поведения в некотором исходном опыте. Так как в эквивалентных состояниях знаменатель может быть сокращен, то в дальнейшем будем именовать средней деформацией величину

$$e_{cp} = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}. \quad (5)$$

Аналогично примем в качестве меры напряженности среднее напряжение

$$\sigma_{cp} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}. \quad (6)$$

Компоненты деформации при упруго-пластической деформации могут быть выражены через напряжения следующим образом:

$$e_1 = \frac{1}{E(\lambda)} [\sigma_1 - \mu(\lambda)(\sigma_2 + \sigma_3)], \quad e_2 = \frac{1}{E(\lambda)} [\sigma_2 - \mu(\lambda)(\sigma_3 + \sigma_1)],$$

$$e_3 = \frac{1}{E(\lambda)} [\sigma_3 - \mu(\lambda)(\sigma_1 + \sigma_2)],$$

где $E(\lambda)$ и $\mu(\lambda)$ —характеристики материала на данной стадии деформирования [2, 3, 4, 6].

Как было показано ранее [5], величина e_{cp} оказывается достаточно надежной общей мерой деформации, не зависящей от типа напряженного состояния. Условие эквивалентности состояний, полученное на основе этого критерия, выраженное в напряжениях (7), хорошо согласуется с опытными данными

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - k(\lambda)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} = \sigma_s. \quad (7)$$

Используя обычный способ пространственной интерпретации условий прочности и пластичности, можно показать, что эквивалентные состояния материала по напряжениям определяются точками, расположенными на поверхности эллипсоида вращения с продольной осью x

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1, \quad (8)$$

где

$$a = \frac{\sigma_s}{\sqrt{1 - k(\lambda)}}; \quad b = \frac{\sqrt{2} \cdot \sigma_s}{\sqrt{2 + k(\lambda)}};$$

$$k(\lambda) = \frac{4\mu(\lambda) - 2\mu(\lambda)^2}{1 + 2\mu(\lambda)^2}.$$

Поверхностью, определяющей эквивалентные состояния по деформации, будет поверхность полной полярной симметрии—сфера с радиусом

$$R = e_{расп} \cdot \sqrt{1 + 2\mu(\lambda)^2}. \quad (9)$$

Наличие полной симметрии определяющей поверхности является в данном случае отражением исходного в теории допущения о полной изотропии материала.

Среднее напряжение σ_{cp} и средняя деформация e_{cp} являются чисто количественными мерами напряженности и деформации. Для того, чтобы дать некоторую качественную характеристику напряженного и деформированного состояния, введем понятие векторных величин результирующей деформации $\bar{e}_p$ и результирующего напряжения $\bar{\sigma}_p$, определяемых как геометрическая сумма главных деформаций или напряжений

$$\bar{e}_p = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3; \quad \bar{\sigma}_p = \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3. \quad (10)$$

Направленность компонентов главных деформаций и напряжений при учете их относительных значений обусловит определенную ориентацию векторов $\bar{e}_p$ и $\bar{\sigma}_p$ в системе осей координат 1, 2, 3. Это, в свою очередь, позволит охарактеризовать качественную сторону напряженного и деформированного состояния. Так, например, совпадение $\bar{e}_p$ с осью симметрии пространства x в положительном или отрицательном октанте будет указывать на то, что имеет место только объемная деформация—уплотнение или разуплотнение материала. Всякое отклонение

$\bar{e}_p$ от оси x будет указывать на наличие сдвиговой деформации и характеризовать соотношение изменений объема и формоизменения. То же можно сказать и относительно вектора $\bar{\sigma}_p$.

Векторы $\bar{\sigma}_p$ и $\bar{e}_p$, исходя из начала координат 1, 2, 3, не определяют напряжение и деформацию по какому-либо направлению, а понимаются здесь лишь как величины, разложение которых по осям 1, 2, 3 дает значения главных напряжений и деформаций¹⁾. Модули векторов $\bar{\sigma}_p$ и $\bar{e}_p$ равны значениям среднего напряжения (5) и средней деформации (6).

Направляющими косинусами этих векторов будут:

$$\begin{aligned} \text{для } \bar{\sigma}_p \quad \cos \alpha' &= \frac{\sigma_1}{\sigma_p}, \quad \cos \beta' = \frac{\sigma_2}{\sigma_p}, \quad \cos \gamma' = \frac{\sigma_3}{\sigma_p}, \\ \text{для } \bar{e}_p \quad \cos \alpha'' &= \frac{e_1}{e_p}, \quad \cos \beta'' = \frac{e_2}{e_p}, \quad \cos \gamma'' = \frac{e_3}{e_p}. \end{aligned} \quad (11)$$

Между численными значениями $\bar{\sigma}_p$ и $\bar{e}_p$ существует связь, которая может быть найдена из исходной диаграммы растяжения. Для установления связи с диаграммой растяжения, определяющей механические свойства материала, найдем значения средней деформации и среднего напряжения в эквивалентных состояниях. При этом будем исходить из обобщенной кривой течения

$$\sigma_{прив} = \Phi(e_{прив}) \quad (12)$$

$$\sigma_{прив} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - k(\lambda)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)};$$

$$e_{прив} = \frac{e_{ср}}{\sqrt{1 + 2\mu(\lambda)^2}},$$

рассмотренной ранее [6] и находящейся в хорошем согласовании с опытом.

Для некоторого напряженного состояния, при котором

$$\sigma_1 = \sigma_1; \quad \sigma_2 = m \sigma_1; \quad \sigma_3 = n \sigma_1,$$

среднее напряжение

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_1^2 + m^2 \sigma_1^2 + n^2 \sigma_1^2} = \sigma_1 \sqrt{1 + m^2 + n^2}. \quad (13)$$

Величина напряжения σ_1 , эквивалентного растягивающему напряжению σ в опыте на растяжение, может быть выражена из условия эквивалентности в напряжениях (7)

$$\sqrt{\sigma_1^2 + m^2 \sigma_1^2 + n^2 \sigma_1^2 - k(\lambda)(m \sigma_1^2 + n \sigma_1^2 + m n \sigma_1^2)} = \sigma,$$

откуда

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{\sqrt{1 + m^2 + n^2 - k(\lambda)(m + n + mn)}}. \quad (14)$$

¹⁾Иначе говоря, имеют лишь геометрический смысл.

Растягивающее напряжение σ , эквивалентное заданному значению σ_{cp} из выражений (13) и (14) определяется:

$$\sigma = \frac{\sigma_{cp}}{A}, \quad (15)$$

где
$$A = \sqrt{\frac{1 + m^2 + n^2}{1 + m^2 + n^2 - k(\lambda)(m + n + mn)}}.$$

A — коэффициент вида напряженного состояния (для простого нагружения при использовании условия несжимаемости $A = \text{const}$). Величина e_{cp} , соответствующая значению σ_{cp} из обобщенной диаграммы $\sigma - e$, может быть найдена из выражений (12)

$$e = \frac{e_{cp}}{\sqrt{1 + 2\mu(\lambda)^2}}, \quad e_{cp} = e \cdot \sqrt{1 + 2\mu(\lambda)^2}. \quad (16)$$

Таким образом можно сказать, что величины σ_{cp} и e_{cp} (имея в виду (15), (16) и диаграмму растяжения $\sigma = E(\lambda) \cdot e$, $\mu = \mu(\lambda)$) для любого напряженного состояния связаны зависимостью

$$\frac{\sigma_{cp}}{A} = E(\lambda) \frac{e_{cp}}{\sqrt{1 + 2\mu(\lambda)^2}}, \quad (17)$$

где $E(\lambda)$ — секущий модуль диаграммы растяжения. При $m = n = 0$ зависимость (17) обращается в диаграмму растяжения, позволяя по данным испытания материала на растяжение $\sigma = f_1(e)$, $\mu(\lambda) = f_2(e)$ находить величину e_{cp} по заданному значению σ_{cp} . Возможность разрешения подобной задачи (хотя бы путем последовательных приближений) следует из факта хорошего соответствия исходного уравнения (12) экспериментальным данным.

Выясним взаимное расположение векторов $\bar{\sigma}_p$ и $\bar{e}_p$ в совмещенной системе координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и e_1, e_2, e_3 . Соотношение проекций $\bar{\sigma}_p$ и $\bar{e}_p$ на оси координат будет в этом случае соответствовать зависимостям между компонентами напряженного и деформированного состояний, т. е. давать физические уравнения.

Уравнение плоскости, проходящей через два направления и точку их пересечения $x_1; y_1; z_1$, имеет вид:

$$(x - x_1)(\cos \beta_1 \cdot \cos \gamma_2 - \cos \beta_2 \cdot \cos \gamma_1) + (y - y_1)(\cos \gamma_1 \cdot \cos \alpha_2 - \\ - \cos \gamma_2 \cdot \cos \alpha_1) + (z - z_1)(\cos \alpha_1 \cdot \cos \beta_2 - \cos \alpha_2 \cdot \cos \beta_1) = 0.$$

Направляющие косинусы оси симметрии пространства и вектора результирующей деформации выражаются отношениями (4) и (11). Подставляя эти значения и учитывая, что точкой пересечения является начало координат, имеем:

$$x \left(\frac{e_3}{e_p \sqrt{3}} - \frac{e_2}{e_p \sqrt{3}} \right) + y \left(\frac{e_1}{e_p \sqrt{3}} - \frac{e_3}{e_p \sqrt{3}} \right) + \\ + z \left(\frac{e_2}{e_p \sqrt{3}} - \frac{e_1}{e_p \sqrt{3}} \right) = 0. \quad (18)$$

После сокращений уравнение плоскости, проходящей через вектор результирующей деформации и ось симметрии пространства, приобретает вид:

$$x(e_3 - e_2) + y(e_1 - e_3) + z(e_2 - e_1) = 0. \quad (19)$$

Направляющие косинусы вектора результирующего напряжения и оси симметрии пространства напряжений даны отношениями (4) и (11). Точкой пересечения этих направлений также является начало координат. Поэтому на основе уравнения (18) получим:

$$x(\sigma_3 - \sigma_2) + y(\sigma_1 - \sigma_3) + z(\sigma_2 - \sigma_1) = 0. \quad (20)$$

Из аналитических выражений, определяющих закон подобия девиаторов (гипотеза 2), следуют соотношения:

$$\sigma_3 - \sigma_2 = 2G(e_3 - e_2), \quad \sigma_1 - \sigma_3 = 2G(e_1 - e_3),$$

$$\sigma_2 - \sigma_1 = 2G(e_2 - e_1).$$

Подставляя в уравнение (20) и сокращая на $2G$, получим:

$$x(e_3 - e_2) + y(e_1 - e_3) + z(e_2 - e_1) = 0$$

это означает, что плоскости: ось симметрии пространства напряжений — вектор результирующего напряжения и ось симметрии пространства деформаций — вектор результирующей деформации совпадают.

Таким же образом можно показать, что плоскости ось симметрии x — вектор результирующего напряжения и ось симметрии x — вектор результирующей упругой деформации $\bar{\epsilon}_p$ (определяемый ниже) оказываются совпадающими.

Компоненты полной (упруго-пластической) деформации состоят из двух частей: упругой и остаточной, т. е. аналитически представляются в форме алгебраических сумм:

$$e_1 = \epsilon_1 + \delta_1; \quad e_2 = \epsilon_2 + \delta_2; \quad e_3 = \epsilon_3 + \delta_3. \quad (21)$$

Эта запись не предполагает каких-либо соотношений составляющих деформации, а отражает лишь факт существования упругой и остаточной деформации. Поэтому значение результирующей полной деформации может быть определено следующим образом:

$$\begin{aligned} e_{cp} &= \sqrt{(\epsilon_1 + \delta_1)^2 + (\epsilon_2 + \delta_2)^2 + (\epsilon_3 + \delta_3)^2} = \\ &= \sqrt{(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) + (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2) + 2(\epsilon_1 \delta_1 + \epsilon_2 \delta_2 + \epsilon_3 \delta_3)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Для „чисто упругой“ деформации, при которой ни по одному из главных направлений не наблюдается остаточных изменений ($\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$)

$$e_{cp} = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2} = \epsilon_{cp}.$$

Вектор $\overline{\varepsilon}_p$ с модулем ε_{cp} будем называть вектором результирующей упругой деформации. Его направление определяется косинусами:

$$\cos \alpha^* = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_p} ; \cos \beta^* = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_p} ; \cos \gamma^* = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_p} . \quad (23)$$

Направленную величину $\overline{\delta}_p$ с модулем

$$\delta_p = \delta_{cp} = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}$$

аналогично назовем вектором результирующей пластической деформации. На основе теоремы о проекции равнодействующей, учитывая (21), приходим к выражению

$$\overline{e}_p = \overline{\varepsilon}_p + \overline{\delta}_p . \quad (24)$$

Для больших деформаций, когда составляющими упругой деформации можно пренебречь, т. е. положить

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0 ,$$

на основе (22) и (24) получим

$$\overline{e}_p = \overline{\delta}_p .$$

Аналогично для „чисто упругой“ деформации $\overline{e}_p = \overline{\varepsilon}_p$.

Исходя из (19) и (24) можно заключить, что геометрическим отражением закона пропорциональности касательных напряжений соответствующим сдвигам (или закона подобия девиаторов) является расположение векторов $\overline{\sigma}_p$, $\overline{e}_p$, $\overline{\varepsilon}_p$, $\overline{\delta}_p$ в одной плоскости, проходящей через ось симметрии пространства x .

Для установления взаимной ориентации векторов $\overline{\sigma}_p$ и $\overline{e}_p$ достаточно теперь определить угол между ними. Уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей углы α , β , γ с осями координат, имеет вид:

$$\frac{x}{\cos \alpha} = \frac{y}{\cos \beta} = \frac{z}{\cos \gamma} .$$

Для вектора результирующей деформации

$$\frac{e_1}{\cos \alpha''} = \frac{e_2}{\cos \beta''} = \frac{e_3}{\cos \gamma''} ,$$

для результирующего напряжения

$$\frac{\sigma_1}{\cos \alpha'} = \frac{\sigma_2}{\cos \beta'} = \frac{\sigma_3}{\cos \gamma'} .$$

Угол между двумя прямыми определяется соотношением

$$\cos \psi = \cos \alpha' \cdot \cos \alpha'' + \cos \beta' \cdot \cos \beta'' + \cos \gamma' \cdot \cos \gamma'' .$$

Поэтому угол ψ между векторами $\overline{\sigma_p}$ и $\overline{e_p}$ может быть определен следующим образом:

$$\cos \psi = \frac{\sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \sigma_3 e_3}{\sigma_p e_p},$$

откуда

$$\psi = \arccos \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\lambda)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}{E(\lambda) \cdot \sigma_p \cdot e_p}. \quad (25)$$

В частности при сдвиге $\overline{\sigma_p}$ и $\overline{e_p}$ совпадают по направлению ($\psi = 0$). Так как векторы $\overline{\sigma_p}$ и $\overline{e_p}$ расположены в одной плоскости с осью симметрии пространства, то для угла ψ может быть дано и другое выражение

$$\psi = \psi'' - \psi', \quad (26)$$

где ψ' и ψ'' — отклонения векторов $\overline{\sigma_p}$ и $\overline{e_p}$ от оси симметрии x .

Направленность вектора $\overline{e_p}$ в пространстве деформаций позволяет установить связь этой характеристики деформации с изменением объема. Если пренебречь малыми величинами высшего порядка, то величина относительного изменения объема, как известно, определится алгебраической суммой деформаций

$$\Theta = e_1 + e_2 + e_3. \quad (27)$$

Проекции главных компонентов деформации на ось симметрии пространства соответственно выражаются:

$$n_{p(x)} e_1 = e_1 \cdot \cos \varphi = \frac{e_1}{\sqrt{3}}; \quad n_{p(x)} e_2 = e_2 \cdot \cos \varphi = \frac{e_2}{\sqrt{3}};$$

$$n_{p(x)} e_3 = e_3 \cdot \cos \varphi = \frac{e_3}{\sqrt{3}}.$$

На основании теоремы о проекции равнодействующей следует, что изменение объема пропорционально величине проекции вектора результирующей деформации на ось симметрии пространства

$$n_{p(x)} \overline{e_p} = \frac{e_1 + e_2 + e_3}{\sqrt{3}} = \frac{\Theta}{\sqrt{3}} = e_p \cdot \cos \psi''.$$

Неизменность объема при деформации характеризуется скольжением конца вектора $\overline{e_p}$ по плоскости, перпендикулярной оси x . Если пренебречь изменением объема, эта плоскость будет проходить через начало координат.

Аналогично можно определить упругое изменение объема через проекцию результирующей упругой деформации на ось x

$$n_{p(x)} \overline{\varepsilon_p} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{\sqrt{3}} = \frac{\Theta_{упр}}{\sqrt{3}} = \varepsilon_p \cdot \cos \psi^*.$$

Отклонение $\overline{e_p}$ от оси симметрии пространства

$$\psi'' = \arccos \frac{\Theta}{e_p \sqrt{3}} \quad (28)$$

для вектора результирующей упругой деформации

$$\psi^* = \arccos \frac{\Theta_{unp}}{\varepsilon_p \sqrt{3}}.$$

Проекция результирующего напряжения $\overline{\sigma_p}$ на ось x

$$n_{p(x)} \overline{\sigma_p} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot \sigma_0 = \sqrt{3} \cdot p$$

Отклонение этого вектора от оси симметрии пространства

$$\psi' = \arccos \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_p \sqrt{3}}. \quad (29)$$

Следовательно, закономерности объемной деформации могут быть охарактеризованы изменением соотношений проекций результирующего напряжения $\overline{\sigma_p}$ и результирующей деформации $\overline{e_p}$ на ось симметрии пространства

$$p = K(\lambda) \cdot \Theta, \quad n_{p(x)} \overline{\sigma_p} = 3 K(\lambda) \cdot n_{p(x)} \overline{e_p}.$$

Таким образом, все элементы и соотношения, необходимые для описания процесса упруго-пластической деформации, приобретают наглядную геометрическую форму. На этой основе возможно и моделирование. Упруго-пластическая деформация при любом напряженном состоянии протекает так, что поведение материала может быть уяснено из нижеследующей геометрической картины.

В простейшем опыте (растяжение) определяются характеристики механических свойств данного материала при деформации в виде исходных диаграмм

$$\sigma = f_1(e), \quad p(\lambda) = f_2(e).$$

Напряженность при любом напряженном состоянии характеризуется вектором $\overline{\sigma_p}$. Если задано напряженное состояние, все компоненты которого возрастают пропорционально одному параметру, то в системе координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ направление вектора $\overline{\sigma_p}$ остается неизменным, а величина его меняется пропорционально параметру нагружения λ . Каждому значению σ_p соответствует определенное по величине значение e_p соответственно свойствам материала на данной стадии. В системе совмещенных координат $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), (e_1, e_2, e_3)$ векторы $\overline{\sigma_p}$ и $\overline{e_p}$ исходят из общего начала координат. В процессе нагружения $\overline{e_p}$ отклоняется от $\overline{\sigma_p}$ на угол ψ , оставаясь в одной плоскости, проходящей через $\overline{\sigma_p}$ и ось, равнонаклоненную к осям координат. Проекции вектора $\overline{e_p}$ на оси координат определяют значения главных компонентов деформации, а на ось симметрии пространства — величину объемной деформации. Проекции составляющих вектора $\overline{e_p} = \overline{\varepsilon_p} + \overline{\delta_p}$ на оси координат дают значения упругих и остаточных частей компонентов деформации (фиг. 1).

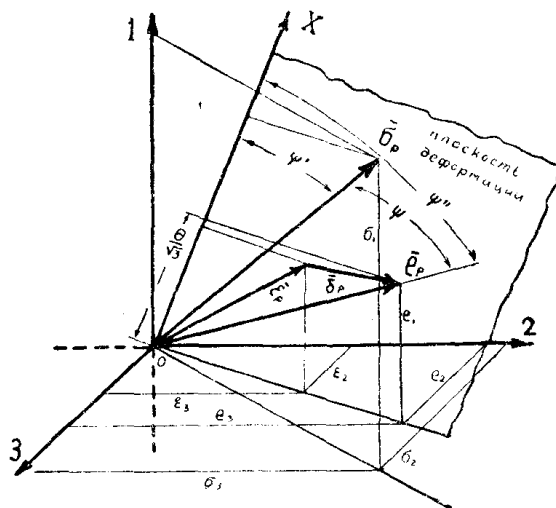
В эквивалентных состояниях при различном силовом воздействии векторы $\overline{e_p}$ касаются поверхности общей сферы (9), а $\overline{\sigma_p}$ эллипсоида (8). Фиг. 2 показывает ряд последовательных стадий деформации¹⁾.

Примечание. Следует отметить, что данная работа, как и ранее [6], предполагает следующее подразделение.

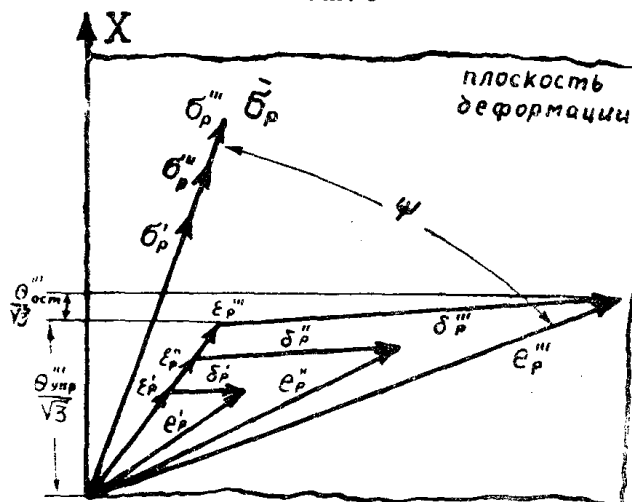
1. Простое нагружение — нагружение, при котором компоненты напряженного состояния меняются пропорционально одному параметру. Изменение компонентов деформации при этом определяется свойствами реального материала.

2. Простое деформирование — деформирование с изменением компонентов деформации пропорционально одному параметру. Изменение напряжений определяется свойствами реального материала.

Для объемно недеформируемого материала (в пренебрежении изменением объема при упруго-пластической деформации), а также в пределах упругости простое нагружение соответствует и простой деформации.



Фиг. 1



Фиг. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность, Гостехиздат, 1948.
2. Работнов Ю. Н. Сопротивление материалов, Изд. МГУ, 1950.
3. Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов, М., 1954.
4. Жуков А. М. О коэффициенте Пуассона в пластической области. Изв. АН СССР, ОТН, № 12, 1954.
5. Дошинский Г. А. Теория предельного упругого состояния. Изв. Томского политехн. ин-та, т. 85, 1957.
6. Дошинский Г. А. К теории упруго-пластической деформации. Изв. Томского политехн. ин-та, т. 85, 1957.
7. Майзель В. М. Справочное руководство по машиностроению, т. 1. (математика), ДНТБУ, 1937.