

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И ВЛАЖНОСТИ С ИСПАРЕНИЕМ ВЛАГИ ВНУТРИ ТЕЛА ПРИ ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ ПЕРВОГО РОДА

С. П. КУЗНЕЦОВ

(Представлено проф. докт. техн. наук П. М. Алабужевым)

Постановка вопроса. Если влажность тела небольшая, то влага в нем связана в основном адсорбционными силами и перемещение ее при нагревании тела происходит как в виде жидкости, так и в виде пара. Система дифференциальных уравнений, описывающих тепло и массообмен внутри влажного капиллярно-пористого тела, может быть написана следующим образом:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{\varepsilon \rho}{c} \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = k \nabla^2 u + k \delta \nabla^2 t,$$

где a — коэффициент температуропроводности, k — коэффициент влаготеплопроводности, u — влажность, ρ — удельная теплоемкость испарения, c — приведенная удельная теплоемкость,

$$(c = c_0 + c_g u).$$

Критерий внутреннего испарения ε в этом случае не равен нулю, его значение заключено между нулем и единицей. При наличии идеальной влагоизоляции тела, которая должна быть одновременно и хорошим проводником тепла, задачу можно сформулировать так. В момент времени $\tau = 0$ влажное тело с начальной температурой, t_0 и начальной влажностью u_0 погружено в среду с температурой, равной нулю, которая и держится на этом уровне в течение всего процесса охлаждения тела. Нужно исследовать поля температуры и влажности в любой момент времени, считая, что общее количество влаги остается неизменным, а перемещение влаги происходит в виде жидкости и пара.

Исследование полей для неограниченной пластины. Математически задача формулируется системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon \rho}{c} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} = \kappa \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} + \kappa \delta \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (1)$$

при следующих краевых условиях:

$$t(x, 0) = t_0, \quad u(x, 0) = u_0,$$

$$\frac{\partial t(0, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial u(0, \tau)}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$t(R, \tau) = 0, \quad \frac{1}{R} \int_0^R u(x, \tau) dx = u_0.$$

Для решения систем (1) — (2) воспользуемся интегральным преобразованием Лапласа. Преобразованные по Лапласу функции температуры и влажности соответственно обозначаем

$$L[t(x, \tau)] = \int_0^\infty e^{-s\tau} t(x, \tau) d\tau = T(x, s),$$

$$L[u(x, \tau)] = \int_0^\infty e^{-s\tau} u(x, \tau) d\tau = F(x, s).$$

s — принадлежит области $Re(s) > \sigma_1$, в которой указанные несобственные интегралы существуют. Применяя преобразование Лапласа к уравнению первому системы (1) и к краевым условиям (2), получим обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами, общим решением которого после очевидных преобразований будет

$$T(x, s) = A_1 \operatorname{ch} r_1 x + A_2 \operatorname{ch} r_2 x + \frac{t_0}{s}, \quad (3)$$

где
$$r_1 = \sqrt{\frac{s}{a} N_1}, \quad r_2 = \sqrt{\frac{s}{a} N_2},$$

$$N_{1,2} = \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon \rho \delta}{2c} + \frac{a}{2\kappa} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon \rho \delta}{2c} + \frac{a}{2\kappa} \right)^2 - \frac{a}{\kappa}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Коэффициенты A_1 и A_2 могут быть найдены посредством преобразованных граничных условий. Окончательно изображение функции распределения температуры принимает вид

$$T(x, s) - \frac{t_0}{s} = -t_0 \frac{\sigma \operatorname{sh} r_2 R \operatorname{ch} r_1 x - \operatorname{sh} r_1 R \operatorname{ch} r_2 x}{s [\sigma \operatorname{sh} r_2 R \operatorname{ch} r_1 R - \operatorname{ch} r_2 R \operatorname{sh} r_1 R]} = -t_0 \frac{\Phi(s)}{\psi(s)}, \quad (4)$$

где
$$\sigma = \frac{N_1}{N_2} \left(\frac{1 - N_2^2}{1 - N_1^2} \right).$$

Для определения оригинала $t(x, \tau)$ воспользуемся теоремой разложения, так как выражение (4) может быть представлено в виде от-

ношения двух обобщенных полиномов относительно s и степень полинома в знаменателе на единицу больше степени полинома, находящегося в числителе. В результате получим

$$\Theta(x, \tau) = \frac{t(x, \tau)}{t_0} =$$

$$= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma \sin b \mu_m \cos \mu_m \frac{x}{R} - \sin \mu_m \cos b \mu_m \frac{x}{R}}{\mu_m [(1 - \sigma b) \cos \mu_m \cos b \mu_m + (\sigma - b) \sin \mu_m \sin b \mu_m]} \cdot e^{-\frac{\mu_m^2 a \tau}{N_1^2 R^2}}, \quad (5)$$

где $\mu_m = i \sqrt{\frac{s}{a}} N_1 R$ — корни уравнения $\operatorname{ctg} b \mu - \sigma \operatorname{ctg} \mu = 0$, $b = \frac{N_2}{N_1}$,

$\Theta(x, \tau)$ — безразмерная температура. Применяя к уравнению второму системы (1) преобразование Лапласа и учитывая значение для изображения температуры $T(x, s)$, найдем сначала изображение $F(x, s)$ для функции распределения влажности, а затем, используя теорему разложения, найдем и оригинал $u(x, \tau)$.

Окончательно имеем:

$$\vartheta(x, \tau) = \frac{u(x, \tau) - u_0}{u_0} = \frac{2 \kappa t_0 \delta}{u_0 (\kappa N_1^2 - a) (\kappa N_2^2 - a)} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{a}{\kappa}} (M - P) \sin \mu_n \sin b \mu_n \cos \frac{1}{N_1} \mu_n \frac{x}{R} + (P N_1 \sin b \mu_n \cos \mu_n \frac{x}{R} -$$

$$- M N_2 \sin \mu_n \cos b \mu_n \frac{x}{R}) \cdot \sin \frac{1}{N_1} \sqrt{\frac{a}{\kappa}} \mu_n}{\mu_n \left\{ \frac{1}{N_1} (N_1^2 - N_2^2) (N_1 N_2 \cos b \mu_n \cos \mu_n - \sin b \mu_n \sin \mu_n) \right\} \sin \frac{1}{N_1} \sqrt{\frac{a}{\kappa}} \mu_n} \times e^{-\frac{\mu_n^2 a \tau}{N_1^2 R^2}} +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{[(M - P) \sqrt{\frac{a}{\kappa}} \sin \sqrt{\frac{\kappa}{a}} N_1 \mu_p \sin \sqrt{\frac{\kappa}{a}} N_2 \mu_p \cos \mu_p \frac{x}{R}] \cdot e^{-\frac{\mu_p^2 \kappa \tau}{R^2}}}{(-1)^p \mu_p \left\{ N_1 (1 - N_2^2) \sin \sqrt{\frac{\kappa}{a}} N_2 \mu_p \cos \sqrt{\frac{\kappa}{a}} N_1 \mu_p - N_2 (1 - N_1^2) \times \right.$$

$$\left. \times \sin \sqrt{\frac{\kappa}{a}} N_1 \mu_p \cos \sqrt{\frac{\kappa}{a}} N_2 \mu_p \right\}} \quad (6)$$

где $M = N_2^2 (1 - N_1^2) (\kappa N_1^2 - a)$, $P = N_1^2 (1 - N_2^2) (\kappa N_2^2 - a)$

s_n — корни уравнения $N_1 (1 - N_2^2) \operatorname{ctg} b \mu - N_2 (1 - N_1^2) \operatorname{ctg} \mu = 0$

s_p — корни уравнения $\sin i \sqrt{\frac{s}{\kappa}} R = 0$, $\mu = i \sqrt{\frac{s}{a}} N_1 R$, $b = \frac{N_2}{N_1}$.

Анализ решения. При рассмотрении решений (5), (6) — температуры и влажности тела можно заключить, что наряду с известными

критериями (термический критерий Фурье, гигротермический критерий Фурье) сюда входят еще новые критерии:

1. Критерий Поснова $P_n = \frac{\delta t_0}{u_0}$, характеризующий неравномерность поля влажности.

2. Критерий Коссовича $\kappa_0 = \frac{\rho u_0}{c t_0}$, характеризующий отношение тепла, затраченного на испарение влаги к теплу, необходимому для нагревания влажного тела, при этом расчет тепла производится по отношению к единице массы сухого вещества. Кроме этих новых критериев, в решения входят безразмерные величины

$$N_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{\varepsilon \rho \delta}{c} + \frac{a}{\kappa} \right) + \sqrt{\left(1 + \frac{\varepsilon \rho \delta}{c} + \frac{a}{\kappa} \right)^2 - \frac{4a}{\kappa}} \right] \frac{1}{2}},$$

$$N_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{\varepsilon \rho \delta}{c} + \frac{a}{\kappa} \right) - \sqrt{\left(1 + \frac{\varepsilon \rho \delta}{c} + \frac{a}{\kappa} \right)^2 - \frac{4a}{\kappa}} \right] \frac{1}{2}}.$$

Величины N_i , $i = 1, 2$ являются функциями критерия Лыкова $Lu = \frac{\kappa}{a}$, характеризующего относительную инерцию поля влажности и нового критерия $K_\varepsilon = \frac{\varepsilon \rho \delta}{c}$. Этот критерий имеет определенный физический смысл. Он равен отношению тепла, необходимого для внутреннего испарения влаги, задержанной термовлагопроводностью к теплу, необходимому для нагревания влажного тела на один градус, при этом расчет ведется на единицу массы тела. Критерий K_ε равен произведению трех, ранее рассмотренных критериев ε , P_n , K_0 , а именно:

$$\varepsilon P_n K_0 = \varepsilon \cdot \frac{\delta t_0}{u_0} \cdot \frac{\rho u_0}{c t_0} = \frac{\varepsilon \rho \delta}{c} = K_\varepsilon.$$

Можно написать, что

$$N_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(1 + K_\varepsilon + \frac{1}{Lu} \right) \pm \sqrt{\left(1 + K_\varepsilon + \frac{1}{Lu} \right)^2 - \frac{4}{Lu}} \right] \frac{1}{2}},$$

то есть

$$N_i = f(Lu, \varepsilon, P_n, K_\varepsilon) \quad \text{при } i = 1, 2$$

или

$$N_i = \varphi(Lu, K_\varepsilon). \quad (7)$$

По формуле (7) можно составить таблицу по определению критериев N_i как функции критериев Lu и K_ε . По данным такой таблицы для разных значений критерия K_ε от 0 до 1 можно построить графики

$$N_i = f_1(Lu),$$

которые позволяют легко находить значения N_1 и N_2 по заданным значениям критерия Лыкова и критерия K_ε .

Полученные решения (5), (6) позволяют произвести расчет для полей температуры и влажности по толщине пластины в зависимости от критерия Фурье.

Изложенные соображения могут быть использованы при вычислении теплофизических коэффициентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А. В. Явления переноса в капиллярно-пористых телах. Москва, изд. 1954.