

**О КВАЗИЛИНЕЙНЫХ И КВАЗИРЕЛАКСАЦИОННЫХ
АВТОКОЛЕБАНИЯХ В ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ**

В. М. РИККОНЕН

(Представлено научно-методическим семинаром электромеханического факультета)

В связи с распространением сложных схем электромашинной автоматики в настоящее время все большее значение приобретают вопросы изучения колебательных явлений и устойчивости систем в отношении возникновения колебательных явлений и, в частности, в системе генератор—двигатель.

Как известно, анализ сложных схем автоматического регулирования проводится методами и различными критериями устойчивости теории автоматического регулирования. Колебательные явления или периодические режимы систем регулирования определяются существующими в системе нелинейностями; наблюдаемое в практике большое разнообразие возникающих периодических движений в системах объясняется как количеством и видом этих нелинейных характеристик, так и местом расположения их в структурной схеме системы.

Рассматривая явление колебаний в системах регулирования как нежелательный и осложняющий факт, часто ограничиваются нахождением частоты возможных колебаний и критериями устойчивости системы, не затрагивая физической картины или природы данного явления.

Если обратиться к теории электрических машин и теории электропривода, то переходные процессы в системе Г—Д с учетом различных нелинейных характеристик были и остаются в настоящее время еще нерешенными научными проблемами. По этому поводу действительный член Академии наук Армянской ССР А. Г. Иосифьян писал [1]: „Как известно, теоретические основы исследования переходных процессов основываются на методах анализа поведения систем, требующих решения нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих нестационарные процессы в электрических цепях, и дифференциальных уравнений, описывающих процессы, связанных с движением инерционных масс.

Для облегчения методов анализа обычно пренебрегают нелинейными параметрами цепей токов, исключают из рассмотрения явление насыщения, потери на вихревые токи, гистерезис..., а также исключают переменную скорость движущихся масс. Линеаризация уравнений является результатом чрезвычайных математических трудностей, возникающих при решении этих уравнений в общем виде.

Между тем такие важные для практики величины, как время переходного режима, амплитуда колебаний, число предельных циклов колебаний, анализ потерь при этих колебаниях, явления самораскачивания и автоколебаний, весьма сильно зависят от нелинейных параметров электрических цепей и от движущихся с ускорением механических масс. Следовательно, основное внимание исследователей должно быть направлено на область анализа переходных процессов с учетом нелинейных параметров“.

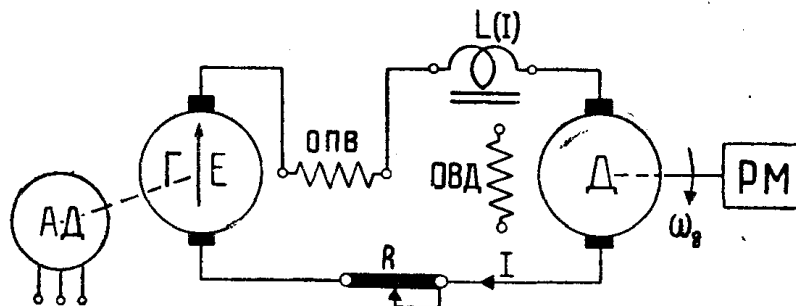
Проблема решения переходных процессов в системах с учетом основных нелинейностей ставится в различных областях техники, например, в электроприводе, теоретической электротехнике и т. д. В теории электрических машин для решения нелинейных проблем применяются методы последовательных интервалов, различные методы линеаризации нелинейных характеристик, численные и графоаналитические методы.

Однако существуют специальные методы теории нелинейных колебаний, разработанные в основном советскими учеными-физиками академиками Манделъштамом, Папалекси и Андроновым, с помощью которых возможно объяснить ряд существенно важных свойств системы, о которых упоминает А. Г. Иосифьян.

Система генератор—двигатель является основной частью схемы электромашинной автоматики, а потому вопросы возникновения свободных колебаний в данной системе и физика явления автоколебаний в ней являются весьма актуальными.

Вполне естественно при решении возникающих задач воспользоваться указаниями теории нелинейных колебаний, в которой решаются вопросы нахождения предельных циклов автоколебаний, явления самораскачивания системы, вскрывается физическая картина данного явления.

Поскольку в теории электрических машин и в теории электропривода автоколебания почти не изучались, то исследование проще начать с рассмотрения простейшей системы, в качестве которой возьмем систему генератор последовательного—двигатель независимого возбуждения (фиг. 1).



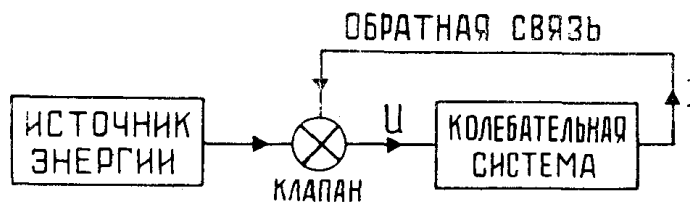
Фиг. 1.

Здесь АД—первичный двигатель, источник энергии;
Г—ОПВ—генератор последовательного возбуждения;
L(I)—переменная или постоянная индуктивность;
Д—ОВД—двигатель независимого возбуждения.

В теории колебаний автоколебательные системы имеют структурную схему вида (фиг. 2).

Источник энергии в автоколебательной системе должен существовать в той или иной форме, поскольку во всякой реальной колебательной системе происходит рассеяние энергии колебательного кон-

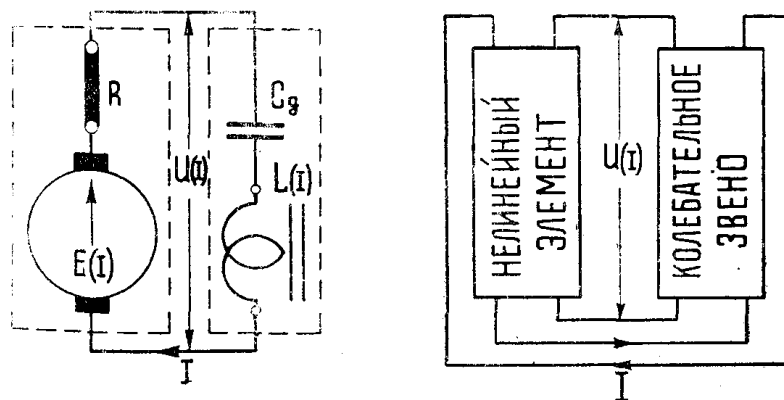
тура и для поддержания установившихся периодических движений необходимо пополнение запаса энергии в контуре. Роль обратной связи заключается в воздействии на „клапан“, открывающий доступ энергии в систему. Такая изолированная от внешних воздействий система (автономная) обладает свойством саморегулирования притока энергии, и все свойства свободных движений в системе будут объясняться только особенностями самой системы.



Фиг. 2.

Принятую нами систему Г—Д (фиг. 1) можно представить структурной схемой, аналогичной фиг. 2, если выделить колебательное звено, состоящее из индуктивности, обремененной потокосцеплениями по всему контуру Г—Д, и электродинамической емкости вращающегося двигателя— C_D . В общем случае и индуктивность и емкость такого колебательного звена будут зависеть от „интенсивности“ процесса, т. е. от величины протекающего тока и движущихся с ускорением маховых масс, и, следовательно, колебательный контур будет нелинейным.

Нелинейность характеристики генератора благодаря насыщению магнитной системы представится в структурной схеме нелинейным элементом, играющим роль ограничителя нарастания колебаний. Таким образом, мы получаем фиг. 3, аналогичную фиг. 2.



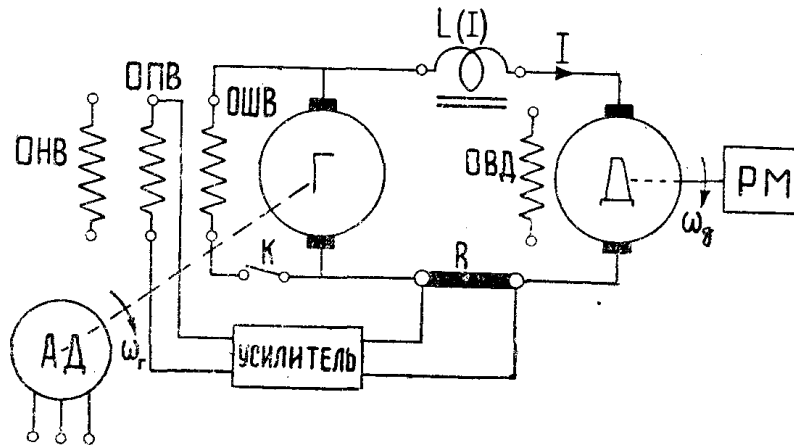
Фиг. 3.

Роль клапана играет обмотка последовательного возбуждения генератора, обтекаемая током контура Г—Д и вместе с тем выполняющая функцию обратной положительной связи по току.

В электромашинной автоматике встречаются более сложные схемы, в которых имеются обратные связи по току, напряжению и обратные связи по скорости, подаваемые на обмотки управления генератора или электромашинного усилителя. Кроме этих обмоток возбуждения могут быть обмотки независимого возбуждения или задающие обмотки (фиг. 4).

Если из схемы фиг. 4 удалить ОНВ—обмотку независимого возбуждения и ОШВ—обмотку шунтовую, то при определенном коэффициенте усиления по току и положительной обратной связи мы получим взятую нами схему (фиг. 1).

Ампервитки ОНВ и ОШВ изменяют автоколебательные свойства системы, но принципиально методика исследования и физика явления должны остаться прежними.



Фиг. 4.

Для цепи Г—Д уравнение равновесия напряжений будет

$$\frac{d\psi}{dt} + IR + 2\Delta U_{щ} + E_D = E_a(I), \quad (1)$$

где R —общее активное сопротивление цепи;
 $2\Delta U_{щ}$ —падение напряжения в щеточных контактах на генераторе и двигателе;
 E_D —противо-э.д.с. двигателя;
 $E_a(I)$ —внутренняя характеристика генератора.

Основной нелинейностью в контуре Г—Д будем считать нелинейность $E_a(I)$; остальные коэффициенты уравнения (1), как электродинамическая емкость и индуктивность, могут быть приняты постоянными при определенных условиях. В самом деле при включении в контур большой линейной индуктивности потокосцепление по контуру Г—Д представится слабо нелинейной кривой $\psi(I)$, которую можно заменить спрямленной характеристикой.

Для нелинейности кривой $E_a(I)$ применим аппроксимацию полиномом третьей степени, учитывающую характерную нелинейность намагничивания

$$E_a(I) = \alpha' I - \beta' I^3. \quad (2)$$

Данная аппроксимация часто принимается в теории нелинейных колебаний для характеристик с насыщением и дает возможность „при помощи простых математических выкладок получить легко обозримые и вместе с тем с качественной стороны достаточно близко совпадающие с экспериментальными данными результаты“ [2].

Принимая $M_s = 0$, получим уравнение Даламбера в форме

$$I \frac{d\omega}{dt} = C_M \cdot I. \quad (3)$$

Приняв сказанные допущения и продифференцировав по времени уравнение (1), с учетом выражения (3) мы получим:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + (R - \alpha' + 3\beta' I^2) \frac{dI}{dt} + \frac{C_e' C_M}{J} I = 0. \quad (4)$$

При анализе электромеханических переходных процессов в основном подлежат рассмотрению ток в системе и скорость вращения двигателя. Поскольку $I = \frac{j}{C_M} \cdot \frac{d\omega}{dt}$ (3), то (4) представится так:

$$L \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \left[R - \alpha' + \beta_1 \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 \right] \frac{d\omega}{dt} + K \cdot \omega = 0, \quad (5)$$

где

$$\beta_1 = \beta' \left(\frac{J}{C_M} \right)^2, \quad K = \frac{C_e' C_M}{J}.$$

В уравнении (5) можно выделить линейное колебательное звено, которому присуща круговая частота контура

$$h_0 = \sqrt{\frac{C_e' C_M}{J L}}. \quad (6)$$

Выражение $\frac{j}{C_e' C_M} = C_\partial$ играет роль электродинамической емкости, физический смысл которой заключается в накоплении кинетической энергии вращающимся приводом.

Так как $C_M = K_1 \Phi_\partial$ и $C_e' = K_2 \Phi_\partial$, где Φ_∂ — поток возбуждения двигателя, то частота линейного контура

$$h_0 \equiv \Phi_\partial \quad \text{и} \quad C_\partial \equiv \frac{1}{\Phi_\partial^2}. \quad (7)$$

Для анализа полученного уравнения (5) необходимо выразить его в относительных единицах. Эта необходимость объясняется не столько удобствами и упрощениями, которые появляются при пользовании относительными единицами, сколько тем, что теория нелинейных колебаний широко использует метод сравнения различных коэффициентов в уравнениях. Понятно, что такое сравнение возможно производить только для величин, имеющих одну размерность или выраженных в безразмерной форме.

В системе относительных единиц, как известно, все величины должны быть приведены к одному звену, номинальные величины которого берутся за базисные. В данном случае удобно взять за базисные значения номинальные данные исследуемого двигателя

$$E_n = I_n \cdot R_n = C_e' \omega_n.$$

Для выражения индуктивности потокосцепление по всему контуру Г—Д необходимо привести к обмотке якоря, номинальное потокосцепление которого $\Phi_{\partial,н}$. $W_{я,д}$ возьмем за базисное.

В относительных единицах

$$e_a(i) = \alpha i - \beta i^3; \quad \psi(i) = l_\partial i.$$

Тогда уравнение (4) запишется так:

$$\xi l_{\partial} \frac{d^2 i}{dt^2} + (r - \alpha + 3\beta i^2) \frac{di}{dt} + \frac{C_M C_e'}{J R_H} i = 0, \quad (8)$$

где

$$\xi = \frac{W_{яд} \Phi_{\partial H}}{E_H} = \frac{W_{яд} \cdot \Phi_{\partial H} \cdot \pi a}{p \cdot \omega_H \cdot W_{яд} \Phi_{\partial H}} = \frac{\pi a}{p \cdot \omega_H} \text{ [сек]}. \quad (9)$$

Если теперь за единицу времени взять собственную частоту линейного контура $\tau = h_0 t$, то получим в безразмерных единицах

$$\frac{di^2}{d\tau^2} + \frac{1}{\xi l_{\partial} h_0} (r - \alpha + 3\beta i^2) \frac{di}{d\tau} + i = 0. \quad (10)$$

Для уравнения (5) соответственно получим

$$\frac{d^2 \omega}{d\tau^2} + \frac{1}{\xi l_{\partial} h_0} \left[r - \alpha + \frac{\beta}{(\xi l_{\partial} h_0)^2} \left(\frac{d\omega}{d\tau} \right)^2 \right] \frac{d\omega}{d\tau} + \omega = 0. \quad (11)$$

Величину $\xi l_{\partial} h_0$ можно назвать волновым сопротивлением контура в безразмерных единицах. В самом деле,

$$\xi l_{\partial} h_0 = \xi l_{\partial} \sqrt{\frac{C_M C_e'}{J \epsilon l_{\partial} R_H}} = \sqrt{\frac{\xi l_{\partial}}{C_{\partial} R_H}} = \frac{1}{R_H} \sqrt{\frac{L_{\partial}}{C_{\partial}}} = \rho. \quad (12)$$

Для консервативного колебательного контура, полученного из (11), когда второй член равен 0, имеем:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 = C. \quad (13)$$

Это равенство выражает закон сохранения энергии для идеального консервативного контура.

В дальнейшем анализ уравнения (11) мы проводим качественными методами с помощью построения интегральных кривых на фазовой плоскости согласно теории [2,3].

Согласно равенству (13) энергия консервативного контура остается постоянной и, следовательно, движение в этом случае изображается окружностью, радиус-вектор которой

$$r = \sqrt{2W}, \quad (14)$$

где $2W$ — удвоенная энергия консервативного контура.

На фазовой плоскости по оси абсцисс откладываем значения ω , по оси ординат — значения $\frac{d\omega}{d\tau}$.

Для нахождения величины тока в системе относительных единиц имеем равенство

$$i = \frac{\omega}{\rho}. \quad (15)$$

Действительно,

$$\omega = \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{C_M I_H}{h_0 J \cdot \omega_H} i = \sqrt{\frac{C_M C_e' \xi l_{\partial} R_H}{J R_H^2}} \cdot i = \frac{1}{R_H} \sqrt{\frac{L_{\partial}}{C_{\partial}}} i = \rho \cdot i.$$

Таким образом, решением уравнения (11) будут являться интегральные кривые на фазовой плоскости, дающие представление о движении в системе; интересующие нас скорость вращения двигателя и ток в системе с учетом равенства (15) найдутся как проекции изображающей точки на координатные оси.

Режим установления квазилинейных автоколебаний

Уравнение (11) перепишем в следующей форме:

$$\frac{d^2\omega}{d\tau^2} + \frac{1}{\rho} \left[r - \alpha + \frac{\beta}{\rho^2} \left(\frac{d\omega}{d\tau} \right)^2 \right] \frac{d\omega}{d\tau} + \omega = 0. \quad (16)$$

Построение интегральных кривых по уравнению (16) возможно проделать или способом изоклин или методом Льенара [2,4].

В данном случае диссипативный член уравнения является нелинейной функцией от производной переменной ω , поэтому возможно применить метод Льенара, значительно упрощающий построение интегральных кривых [3,4].

Для этого метода необходимо построить изоклину горизонтальных касательных, по которой производится построение уже самих интегральных кривых. Если принять $x = \omega$, $y = \frac{d\omega}{d\tau}$, то из (16) получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} + \frac{1}{\rho} \left[r - \alpha + \frac{\beta}{\rho^2} y^2 \right] \cdot y + x &= 0. \\ \frac{dx}{d\tau} &= y. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Уравнение интегральных кривых на фазовой плоскости получим, если исключим время, разделив первое уравнение на второе

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{1}{\rho} \left[r - \alpha + \frac{\beta}{\rho^2} y^2 \right] y - x}{y}. \quad (18)$$

Уравнение изоклины горизонтальных касательных получим из условия $\frac{dy}{dx} = 0$, что дает нам

$$x = \frac{1}{\rho} (x - r) y - \frac{\beta}{\rho^3} y^3. \quad (19)$$

Это уравнение кубической параболы. Зная коэффициенты α , r , β и ρ , мы строим в относительных единицах по уравнению (19) изоклину горизонтальных касательных на фазовой плоскости.

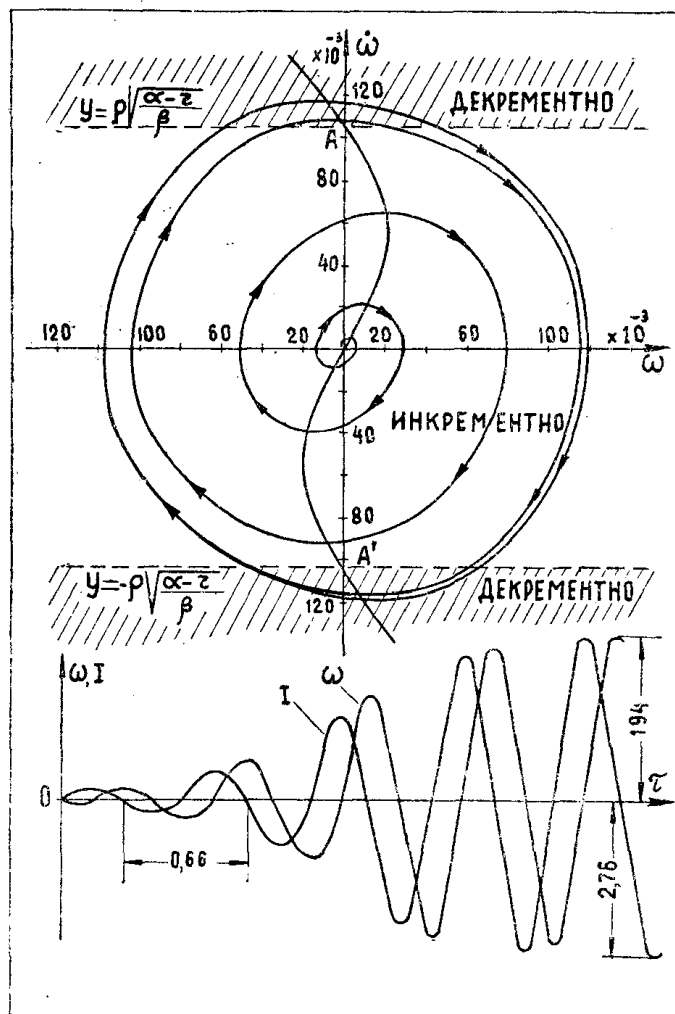
Уравнение разделяющей кривой [3], разграничивающей инкрементные и декрементные области фазовой плоскости, получим из условия

$$2\zeta\varphi(y) = \frac{1}{\rho} \left(r - \alpha + \frac{\beta}{\rho^2} y^2 \right) = 0, \quad (20)$$

откуда разделяющие прямые получают выражение

$$y = \pm \rho \sqrt{\frac{\alpha - r}{\beta}}. \quad (21)$$

На фиг. 5 построена изоклина горизонтальных касательных по (19), с помощью которой построены интегральные кривые на фазовой плоскости, дающие полную качественную и количественную картину поведения системы.



Фиг. 5.

Для получения интересующих нас скорости вращения двигателя и тока в системе в функции времени производим построение по точкам согласно формуле [5]

$$\Delta t_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{y} = \frac{x_{i+1} - x_i}{y_{i+1} - y_i} \ln \frac{y_{i+1}}{y_i}. \quad (22)$$

Из фиг. 5 видно, что при малых значениях коэффициента $\frac{\alpha - r}{\rho}$

в формуле (19) изоклина горизонтальных касательных мало отклоняется от оси ординат. Это можно достичь за счет увеличенного активного сопротивления контура Г—Д или же за счет большого значения волнового сопротивления контура. При этом получается так называемое „мягкое“ самовозбуждение системы без каких-либо внешних возмущающих воздействий.

В начальной стадии самораскачивания при незначительных амплитудах в инкрементной области происходит накопление энергии в колебательном контуре. Радиус-вектор с увеличением энергии в системе увеличивается сначала незначительно, затем спираль разворачивается быстрее—поступление энергии в контур достигает максимума; в дальнейшем увеличение радиуса-вектора замедляется, изображающая точка приближается к предельному циклу, который характеризуется тем, что за период колебания энергия контура остается постоянной. Постоянство энергии при установившемся периодическом движении в системе объясняется тем, что изображающая точка дважды за период проходит по инкрементной области и дважды—по декрементной, в которой происходит уменьшение радиуса-вектора, так как энергия контура в последней области рассеивается.

Естественно, при установившемся движении в течение периода должен соблюдаться баланс энергии, поступающей в контур, и энергии, теряемой контуром.

Форма автоколебаний в этом случае мало отличается от гармонического движения, поскольку изоклина горизонтальных касательных близко располагается от оси ординат; в данном случае автоколебания носят название квазилинейных.

С увеличением коэффициента $\frac{\alpha-r}{\rho}$ изоклина горизонтальных касательных больше отходит от ординаты; это означает большие количества энергии, поступающей в инкрементной области; система при этом должна глубже заходить в декрементную область фазовой плоскости с тем, чтобы соблюдался баланс энергии при автоколебаниях. Форма движения значительно отличается от гармонического и, следовательно, в кривых тока и скорости появляются значительные гармонические составляющие высшего порядка.

Интересно определить количество энергии, которое поступает в контур и затем отдается колебательным контуром при автоколебаниях.

В уравнении (16) диссипативный член может быть обозначен так:

$$\frac{1}{\rho} \left[r - \alpha + \frac{\beta}{\rho^2} \left(\frac{d\omega}{d\tau} \right)^2 \right] \frac{d\omega}{d\tau} = 2\varepsilon\varphi_1(\omega) \dot{\omega} = F_1(\omega). \quad (23)$$

Если уравнение (13) означает постоянство энергии консервативного контура, то при автоколебаниях, когда в среднем за период наблюдается также постоянство энергии колебательного контура, работа „внешней“ силы, приложенной к этому контуру, за период должна равняться 0.

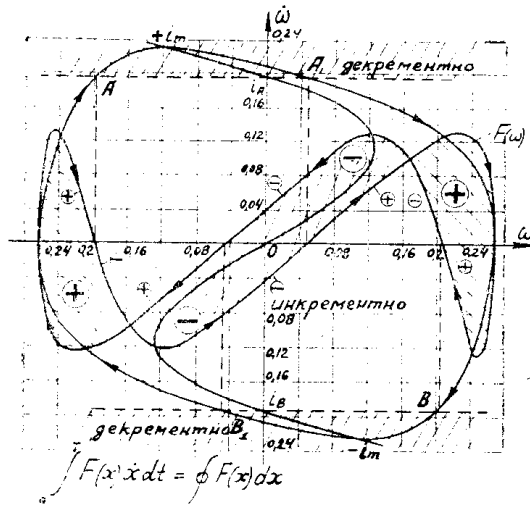
Это записывается следующим образом:

$$W = \int_0^T 2\varepsilon\varphi_1(\omega) \dot{\omega}^2 d\tau = \Phi 2\varepsilon\varphi_1(\omega) \dot{\omega} d\omega = 0, \quad (24)$$

что означает—интеграл по замкнутому контуру от диссипативного члена должен быть равен 0.

Как видно, значение силы определяется кривой горизонтальных касательных, которая является функцией только ω ; для нахождения интеграла (24) эту „силу“ необходимо представить функцией ω . Это

возможно сделать с помощью предельного цикла, устанавливающего связь между ω и $\dot{\omega}$. На фиг. 6 показана построенная таким образом зависимость $F(\omega)$.



Фиг. 6.

ограничивает площадь, дающую значение энергии, теряемой контуром в декрементной области —.

Естественно, что при установившемся режиме автоколебаний площади с + и — должны быть равными. На фиг. 6 хорошо видна как качественная, так и количественная сторона процесса автоколебаний в нашей системе.

При значительных коэффициентах $2\varepsilon = \frac{\alpha - r}{\rho}$ в системе возникают квазирелаксационные автоколебания, приобретающие характерную форму чисто релаксационных колебаний при $\varepsilon \rightarrow \infty$.

Для удобства анализа уравнения (16) сделаем линейные преобразования переменных подстановкой

$$x = \sqrt{\frac{\beta}{\rho^3 2\varepsilon}}.$$

Таким образом, из (16) получим выражение

$$\ddot{x} - 2\varepsilon[1 - x^2] \cdot \dot{x} + x = 0. \quad (25)$$

Уравнение изоклины горизонтальных касательных

$$x_1 = 2\varepsilon(1 - y^2) \cdot y. \quad (26)$$

На фиг. 7 построена изоклина при $2\varepsilon = 4,61$, а по ней построен предельный цикл.

Благодаря тому, что $2\varepsilon \gg 1$, движение в системе резко декрементно или резко инкрементно во всех областях фазовой плоскости кроме поля направлений вблизи изоклины горизонтальных касательных. Предельный цикл наступает за первую четверть периода при любых начальных условиях. Здесь мы не видим прежнего явления самораскачивания, колебательное звено как бы теряет колебательные свойства.

Из точки P_0 изображающая точка почти скачком переходит вниз до пересечения с изоклиной горизонтальных касательных в точке P_1 .

Затем движение происходит вдоль нижней ветви изоклины горизонтальных касательных; в окрестности т. P_2 изображающая точка пойдет почти вертикально вверх до пересечения с верхней ветвью изоклины.

На фиг. 7 показаны интересные нас кривые $\omega = f(t)$ и $I = \varphi(t)$, которые построены с помощью предельного цикла.

Как видно, форма кривых значительно отклоняется от гармонической и приобретает характерную пилообразную форму, присущую релаксационным колебаниям.

Такие автоколебания носят название квазирелаксационных.

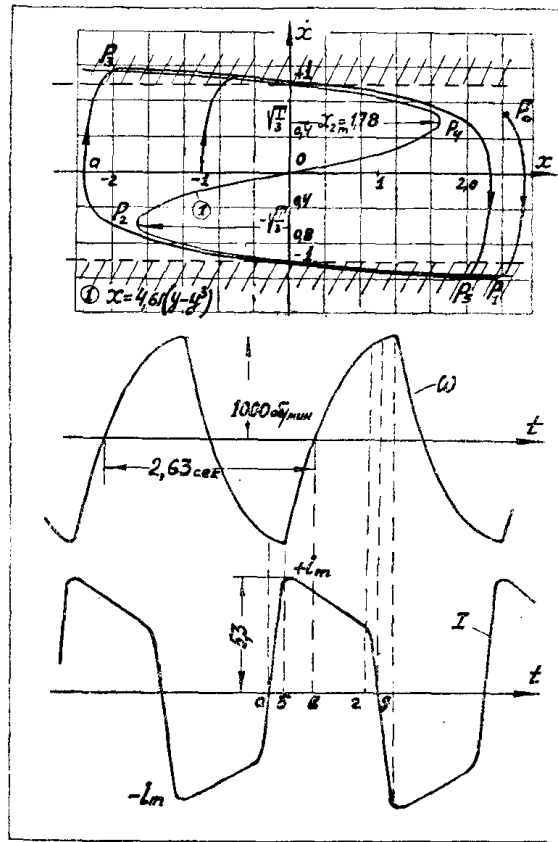
Выводы

Методами теории нелинейных колебаний возможно разрешить ряд нелинейных задач, возникающих в практике электропривода.

В простейшей системе Г—Д периодические движения свободной системы или автоколебания могут быть двух видов в зависимости от величины коэффициента $\frac{\alpha - \gamma}{\rho}$ в нелинейном уравнении; при одном и том же ускоряющем напряжении в системе могут возникнуть или квазилинейные или квазирелаксационные автоколебания; при установившемся режиме возможно установить энергетику автоколебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Иосифьян. Научные проблемы отечественного электромашиностроения, *Электричество*, № 7, 1955.
2. А. А. Андронов, С. Э. Хайкин. Теория колебаний, ОНТИ, 1937.
3. К. Ф. Теодорчик. Автоколебательные системы, изд. 3, 1952.
4. Д. Ж. Стокер. Нелинейные колебания в механических и электрических системах, ИИЛ, Москва, 1953.
5. Под ред. д. т. н. Поливанова. Физические основы электротехники, Госэнергоиздат, ИИЛ 1950.



Фиг. 7.