

**ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РОТОРА  
СИНХРОННО-РЕАКТИВНОГО ДВИГАТЕЛЯ  
МЕТОДОМ ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ**

Е. В. КОНОНЕНКО, А. Ф. ФИНК

(Представлена научным семинаром электромеханического факультета)

В процессе эксплуатации синхронно-реактивного двигателя (СРД) его работу можно классифицировать в следующих режимах: асинхронном, синхронном и в режиме втягивания в синхронизм.

В асинхронном режиме двигатель работает в период пуска и при выпадении из синхронизма при перегрузках, а в синхронном режиме — при нормальной эксплуатации. Режим втягивания в синхронизм промежуточный, когда двигатель переходит из асинхронного режима в синхронный.

При исследовании работы СРД в основу положен метод вращающихся магнитных полей.

Переходные электромеханические процессы СРД описываются известной системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_d}{dt} + r \cdot i_d &= U_d + \omega \cdot \psi_q, \\ \frac{d\psi_q}{dt} + r \cdot i_q &= U_q - \omega \psi_d, \\ \frac{d\psi_{dr}}{dt} + r_{dr} \cdot i_{qr} &= 0, \\ \frac{d\psi_{qr}}{dt} + r_{qr} \cdot i_{qr} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где величины без дополнительных индексов относятся к обмоткам статора, а с индексом  $r$  к обмоткам ротора соответственно по осям  $d$  и  $q$

$$T_j \cdot \frac{d^2\Theta}{dt^2} + M = M_c, \tag{2}$$

где  $T_j$  — механическая постоянная времени,  $\Theta$  — угол, образованный поперечной осью полюсов ротора с вектором напряжения  $M = \psi_d \cdot i_q - \psi_q \cdot i_d$  — электромагнитный момент вращения.

$M_c$  — момент статических сил сопротивления. Предполагая, что электромагнитные переходные процессы протекают значительно быст-

рее, чем механические, уравнение движения ротора можно представить в виде [1, 2]

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + K \cdot \frac{d\theta}{dt} + \sin 2\theta = M_c, \quad (3)$$

где  $K$  — коэффициент пропорциональности. Данное уравнение нелинейно, так как величина синхронного момента является нелинейной функцией. Оно не имеет регулярного метода решения, поэтому точный математический анализ этого уравнения вызывает большие трудности. Исследование уравнения (3) можно провести с помощью построения семейства интегральных кривых на фазовой плоскости [1 — 5]. Уравнение (3) эквивалентно системе

$$\frac{dS}{dt} = M_c - \sin 2\theta - K \cdot S; \quad \frac{d\theta}{dt} = S. \quad (4)$$

Фазовое трастранство рассматриваемой системы есть поверхность кругового цилиндра с осью, параллельной оси  $S$ , так как уравнение не изменяется при замене  $\theta$  на  $\theta + \frac{\pi}{2}$ .

Фазовые траектории системы определяются дифференциальным уравнением

$$\frac{dS}{dt} = \frac{M_c - \sin 2\theta - K \cdot S}{S} = f(\theta, S). \quad (5)$$

Качественную картину на фазовой поверхности определяют состояния равновесия, сепаратрисы и замкнутые траектории (предельные циклы).

В данной статье ставится задача исследования частного случая уравнения (5), когда  $K = 0$  (консервативная система).

Тогда уравнение (5) принимает вид:

$$\frac{dS}{d\theta} = \frac{M_c - \sin 2\theta}{S}. \quad (6)$$

Его общий интеграл будет

$$\frac{S^2}{2} = M_c \theta + \frac{\cos 2\theta}{2} + C' \quad (7)$$

или

$$S = \pm \sqrt{2M_c \theta + \cos 2\theta + C} = \pm \sqrt{Y(\theta) + C}, \quad (8)$$

где  $C'$  — постоянная интегрирования, а

$$C = 2C'$$

координаты состояния равновесия определяются равенствами

$$M_c - \sin 2\theta = 0, \quad S = 0. \quad (9)$$

Заметим, что функция  $\frac{S^2}{2}$ , взятая с обратным знаком, представляет собою потенциальную энергию системы.

$$U(\theta) = - \int_0^\theta (M_c - \sin 2\theta) \cdot d\theta, \quad (10)$$

а постоянная интегрирования  $C'$  в выражении (7) есть постоянная полной энергии системы, зависящая от начальных условий.

Из (10), (11) вытекает, что особые точки могут иметь место для значений  $\theta$ , удовлетворяющих уравнению

$$U'(\theta) = 0.$$

Для точки устойчивого положения равновесия ( $\theta_c$ ) должно быть

$$U''(\theta_c) = 2 \cos 2\theta_c > 0. \quad (11)$$

Для точки неустойчивого положения равновесия должно быть

$$U''(\theta_s) = 2 \cos 2\theta_s < 0. \quad (12)$$

Построение интегральных кривых в плоскости  $(\theta, S)$  сводится к следующему.

Для различных значений  $C$  определяется  $S = \pm \sqrt{Y(\theta) + C}$ . Результаты расчетов представляются в виде семейства кривых на плоскости  $(\theta, S)$ . Характер кривых зависит от величины  $M_c$ .

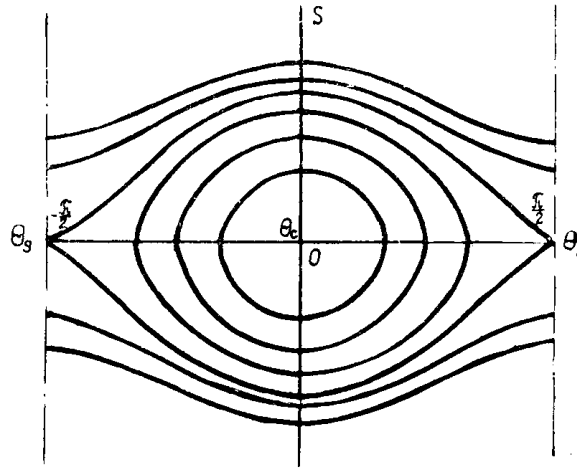


Рис. 1. Фазовый портрет для случая  $k=0$   $M_c=0$ .

а) На рис. 1 представлен фазовый портрет для случая  $M_c=0$ . При  $C = -1,0$  получаем одну точку устойчивого равновесия  $\theta_c$  — центр с координатами

$$\theta = 0, S = 0.$$

При  $C = 0,5$  получаем две точки неустойчивого равновесия  $\theta_s = \pm \frac{\pi}{2}$ . Фазовые траектории, пересекающиеся в этих точках, называются сепаратрисами. Для  $-1 < C < 0,5$  получаем ряд замкнутых интегральных кривых, вложенных одна в другую. При  $C > 0,5$  кривые не пересекают ось абсцисс. При  $C < -1$  интегральные кривые не имеют действительных корней. Все интегральные кривые внутри сепаратрис замкнуты и не охватывают цилиндр. Они соответствуют качаниям ротора СРД.

Кривые вне сепаратрис  $C > 0,5$  также замкнуты, но они соответствуют другому типу периодических движений — асинхронному режиму работы СРД со скольжением, постоянным по направлению, но переменным по величине.

б) На рис. 2 представлен фазовый портрет для случая

$$0 < M_c < M_m.$$

Из приведенных кривых следует, что кривые внутри сепаратрисы замкнуты, а вне ее разомкнуты, так как при увеличении  $\theta$  на  $\frac{\pi}{2}$  скольжение  $S$  возрастет с каждым оборотом по абсолютной величине.

Колебания около положения устойчивого равновесия  $\theta_c$  в этом случае возможны лишь при достаточно малых отклонениях. Если начальное отклонение велико, то ротор СРД перейдет через положение неустойчивого равновесия  $\theta_s$  и выпадет из синхронизма.

в) При  $M = M_m$  фазовый портрет представлен на рис. 3. В этом случае имеем одну точку неустойчивого равновесия. Замкнутых интегральных кривых, охватывающих цилиндр, нет.

г) При  $M > M_m$  особых точек и замкнутых кривых, не охватывающих цилиндр, нет.

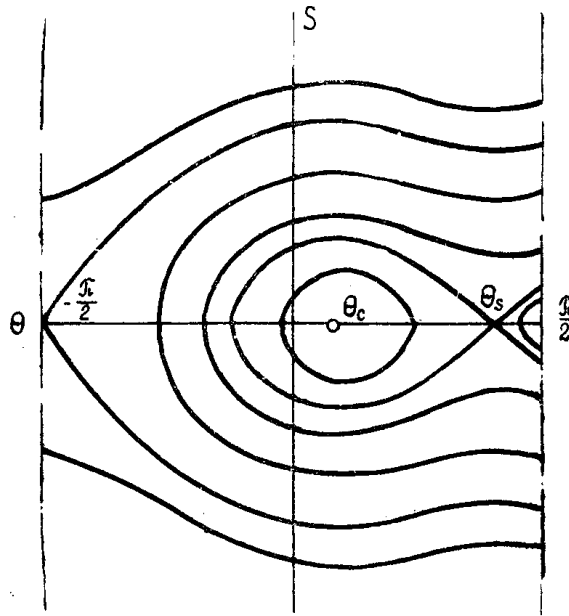


Рис. 2. Фазовый портрет для случая  $k = 0$   $0 < M_c < M_m$ .

Представление о характере протекания процессов могут быть расширены, если согласно [3] определять по фазовым траекториям процессы, протекающие во времени.

Пусть в момент времени  $t_n$  изображающая точка имеет координаты  $\theta_n$  и  $S_n$ , а в момент  $t_{n+1}$  достигает точки с координатами  $\theta_{n+1}$  и  $S_{n+1}$ . Введем обозначения

$$\Delta\theta = \theta - \theta_n; \quad \Delta_n\theta = \theta_{n+1} - \theta_n; \quad (13)$$

$$\Delta t = t - t_n; \quad \Delta_n t = t_{n+1} - t_n.$$

Система уравнений (4) может быть решена в квадратурах

$$\frac{d(\Delta\theta)}{dt} = S; \quad \frac{dS}{dt} = f(\theta_n + \Delta\theta) = f(\Delta\theta), \quad (14)$$

$$S^2 - S_n^2 = 2 \int_0^{\Delta\theta} f(\Delta\theta) \cdot d(\Delta\theta) = F(\Delta\theta) - F(0), \quad (15)$$

$$\Delta_n t = \int_0^{\Delta_n \theta} \frac{d(\Delta \theta)}{\sqrt{F(\Delta \theta) - F(0) + S_n^2}} = \int_0^{\Delta_n \theta} \varphi(\Delta \theta) \cdot d(\Delta \theta). \quad (16)$$

Вычисление (16) может быть проведено разложением  $\varphi(\Delta \theta)$  в ряд с последующим интегрированием этого ряда.

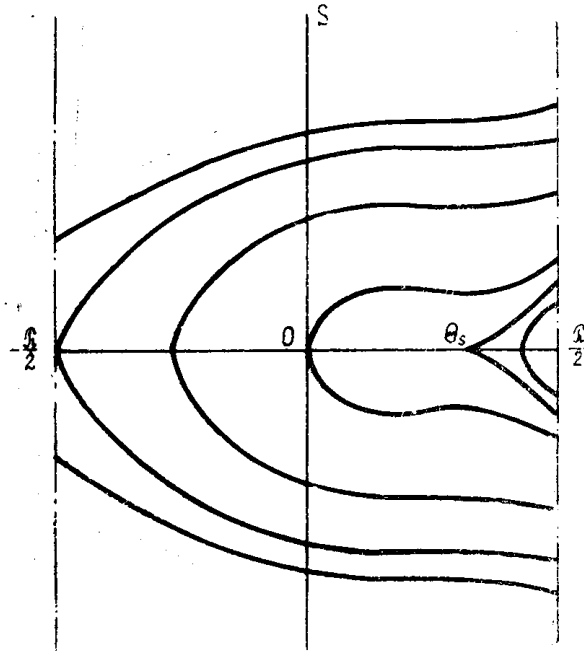


Рис. 3. Фазовый портрет для случая  $k = 0$   $M_c = M_m$

### Выводы

1. Применение метода фазовой плоскости наглядно позволяет судить о характере движения ротора СРД. Построение картины на фазовой поверхности в простейших случаях позволяет получить также количественное решение задач, связанных с электромеханическими переходными процессами в СРД.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Н. Белюстина. Об устойчивости режима явнополюсного синхронного двигателя. Известия АН СССР, ОТН, № 10, 1954.
2. Л. Н. Белюстина. Об одном уравнении из теории машин. Сб. памяти А. А. Андропова, изд. АН СССР, 1955.
3. А. А. Янко-Триницкий. Новый метод анализа работы синхронных двигателей при резкопеременных нагрузках. Изд. Госэнергоиздат, 1958.
4. Д. Ж. Стокер. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. Изд-во иностр. лит., 1952.
5. А. А. Андронов, А. А. Витт и С. Э. Хайкин. Теория колебаний. Физматгиз, 1959.