ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 143 1966

О ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ В ОБЛАСТИ АКСОНОМЕТРИИ

В. А. ВОСКРЕСЕНСКИЙ

(Представлена научным семинаром кафедры начертательной геометрии и графики)

Великая Октябрьская социалистическая революция предоставила все возможности для развития науки, ставшей достоянием народа. Советское правительство, восстанавливая промышленность, разрушенную мировой и гражданской войнами, наметило план дальнейшего подъема индустриализации страны, в короткий срок добилось больших успехов в организации обучения инженерно-технических кадров, необходимых различным отраслям народного хозяйства. Для выполнения поставленной задачи было увеличено количество средних и высших технических учебных заведений, созданы новые кафедры как по специальным, так и по общетехническим дисциплинам, в частности по начертательной и инженерной графике. По этим дисциплинам была открыта аспирантура при крупных технических институтах Союза, что дало возможность вести научные исследования, вполне отвечающие уровню промышленного производства.

Появились новые книги и статьи, где в отличие от старых сочинений, представлявших большей частью учебные руководства по способам практического построения изображений, большое внимание было обращено на теорию, значение которой возросло еще больше в связи с появлением новых отраслей науки и техники. В области разработки теории аксонометрических проекций «обстоятельному исследованию подвергалось так называемое «основное предложение» аксонометрии как при параллельном, так и при центральном проектировании» [1], (стр. 4).

Большая заслуга в этом принадлежит профессору Московского государственного университета А. К. Власову, привлекшему внимание геометров к разработке новых теоретических проблем начертательной геометрии вообще и аксонометрических проекций в частности.

В 1917 г. он предложил новое доказательство теоремы Польке, которое появилось в печати только в 1925 г. [2]. Особенность этого доказательства заключалась в том, что оно было основано на использовании аффинного соответствия, теория которого явилась основанием для решения различных задач начертательной геометрии, и «основная теорема аксонометрии — теорема Польке — получила наиболее простое доказательство именно при помощи свойств аффинных фигур»[1]).

Следует заметить, что доказательство, предложенное профессором А. К. Власовым, становится невозможным при частном случае проекти-

1) См. [3], (стр. 3)

рования, когда одна из граней проектируемого тетраэдра вырождается в прямую линию.

Последующее использование свойств аффинных соответствий в деле дальнейшего совершенствования теории аксонометрии осуществил Н. А. Глаголев, сделавший 9 декабря 1924 г. доклад в Московском математическом обществе на тему «Обобщение теоремы Польке» [4].

Большие исследования в теории аксонометрического проектирования произвел профессор Н. Ф. Четверухин, выдвинувший в 1933 г. теорему о проектировании двух центрированных прямоугольных систем осей как при параллельном, так и центральном методах проектирования [5]. Для такого случая теорема Польке ответа не дает вследствие того, что рассматривает только одну систему осей. Но так как изображение последней определяет проекцию, то вторая система, связанная с ней, не может быть изображена произвольно. Прежде чем приступить к доказательству новой теоремы, Н. Ф. Четверухин исследовал возможные области проектирования прямоугольных координатных осей, находящихся в пространстве и проектирующихся по заранее выбранному направлению $O'O$ (где O' — центр системы осей, а O — центр тройки прямых). На основании свойства ортогонального проектирования автор доказал теорему о том, что «тройка прямых в том и только в том случае может рассматриваться как параллельная (центральная) проекция по направлению $O'O$ прямоугольной системы осей в пространстве, если каждый разделенный двугранный угол тройки этого направления $O'O$ является тупым (а каждый неразделенный угол — острым)». В результате проведенных исследований он установил, что граничной поверхностью «направления проектирования является конус второго порядка» и «направлением проектирования могут служить лишь те прямые $O'O$, которые проходят вне граничного конуса».

Благодаря определению области проектируемости троек прямых была решена задача нахождения условий, при которых две центрированные тройки прямых, лежащие в какой-либо плоскости, являются параллельной проекцией двух прямоугольных систем осей в пространстве. Необходимость условия заключается в данном случае в том, чтобы две центрированные тройки прямых не содержали разделенных пар. Достаточность условия состоит в наличии хотя бы двух разделенных пар рассматриваемых троек. Таким образом, исследование Н. Ф. Четверухина о тройках прямых интересно в следующих отношениях:

1. Оно устанавливает определенные области проектирования аксонометрической системы (что не дает теорема Польке) и делает возможным считать, в каких случаях данная тройка прямых, проходящих через одну точку, является параллельной (центральной) проекцией прямоугольной системы натуральных осей координат по заданному направлению.

2. Предложенная теорема позволяет решить задачу о двух центрированных тройках прямых, как параллельной проекции двух прямоугольных систем осей, что весьма существенно, если приходится иметь дело с преобразованием координат, подвижной и неподвижной системой в механике и т. п.

3. Теорема о тройках прямых дает возможность подробнее рассмотреть метод одного изображения на плоскости, главным образом относительно его наглядности.

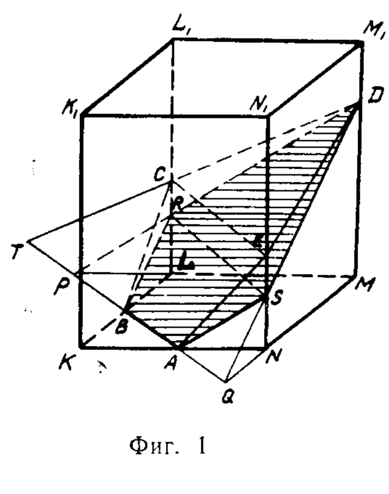
В ходе последующих исследований Н. Ф. Четверухин обратил внимание на геометрическую правильность изображений, оказывающих влияние на наглядность предмета. В одном из своих первых сочинений [6], изданном в 1934 г., он отметил, что при построении изображений следует учитывать, какие элементы его могут быть выбраны произвольно с таким расчетом, чтобы этот выбор вполне определил проекцию. Высказанное предложение автор на протяжении нескольких лет развивал и совершенствовал и в результате создал совершенно новую теорию о полноте изображений. Исходя из геометрической правильности наглядных изображений, автор пришел к выводу о том, что любые изображения можно считать полными, неполными и даже сверхполными. К полным изображениям относятся такие, на которых можно определить все инциденции оригинала. При невозможности установить таковые изображение считается неполным. Одной из работ, где затрагивается полнота и неполнота изображений, является статья Н. Ф. Четверухина [7], опубликованная в 1944 г., но поскольку здесь главным вопросом было доказательство «аффинной жесткости многогранников», постольку полного исследования упомянутых изображений и их метрической определенности здесь не производилось. Все эти вопросы с большой глубиной были изложены в его работах [8, 9, 10], опубликованных в 1946 и 1947 гг.

В этих сочинениях рассматривается, каким образом то или иное изображение определяет оригинал и отражает позиционные и метрические свойства последнего. Всякое изображение (чертеж) определяет в различной степени общие элементы линий и поверхностей (инциденции) оригинала. В зависимости от того, сколько инциденций оригинала представлено на изображении, его можно отнести к полным или неполным изображениям. Таким образом, чертеж называется полным, если на нем определены все инциденции оригинала, причем те, которые не показаны на изображении, могут быть построены путем использования уже имеющихся. Следовательно, их нельзя выбирать произвольно, так как в противном случае можно получить сверхполные изображения. Последнее может быть верным или неверным в зависимости от того, совпадает или не совпадает произвольно выбранная лишняя инциденция с инциденцией, получаемой построением.

Рассмотрим следующий пример [11].

В правильной четырехугольной призме через середины двух последовательных сторон основания проведена плоскость, пересекающая три боковые ребра и наклоненная к основанию (фиг. 1). Исследуя этот чертеж, обнаруживаем, что он неверен. Убедиться в этом легко, если продолжить хотя бы сторону DC до пересечения со следом AB секущей плоскости $ABCDE$.

Прямая AB лежит в основной плоскости KLM, которая пересекается со второй основной плоскостью L_1LM по линии LM. Следовательно, точка встречи прямой AB с плоскостью L_1LM должна лежать на продолжении линии пересечения основных плоскостей. В то же время прямая CD, лежащая в вертикальной плоскости, должна встретиться с плоскостью KLM и, так как обе прямые AB и CD принадлежат плоскости $ABCDE$, то они обязательно должны пересечься в общей точке P на продолжении линии LM. Но, как видно из построения, такой точки для данного чертежа не получается.



Фиг. 1

Ошибка здесь в том, что исполнитель чертежа задался произвольно лишними точками сечения, чем сделал изображение сверхполным и неверным. Для построения правильного сечения надо было, кроме точек A и B, заданных по условию, взять произвольно наивысшую точку на ребре MM_1 — точку D, затем найти линии пересечения плоскости AB с основными плоскостями путем соединения точек P и Q с D и фигура сечения призмы была бы построена верно (сеч. $ABRDS$).

Изображение называется неполным, если оно имеет недостаточно инциденций для построения всех остальных инциденций оригинала. Для определения недостающих инциденций Н. Ф. Четверухин ввел так называемый коэффициент неполноты (k), под которым понимается число параметров, или численных значений, имеющих тот или иной геометрический смысл. Для того, чтобы отыскать коэффициент неполноты для некоторого изображения Φ, автор применяет «метод последовательного расширения» полного изображения, который заключается в том, что к системе 4 точек, представляющей тетраэдр (полное изображение), присоединяют последовательно 1, 2, 3... κ точек данного изображения. Система из $n = \kappa + 4$ точек называется точечным базисом последнего. В сочинении [10] автор исследует параметрическое исчисление полных изображений, в связи с их метрической определенностью. Под метрически определенными изображениями понимают такие изображения, оригинал которых определен до подобия. Они не допускают никаких элементов произвола, «так как им соответствуют вполне определенные построения в оригинале» (стр. 192). Но до того момента, пока полное изображение метрически не определено, они допускают произвольность метрических операций, выполняемых на нем. Это зависит от «запаса свободных параметров, которые должны быть заданы, чтобы изображение стало метрически определенным» (стр. 192). Число такого «запаса параметров» называется «параметражем изображения». Надо сказать, что между полным изображением и метрически определенным есть существенная разница. Полное изображение, согласно определению, позволяет находить построением любые инциденции его элементов. Но оригинал полного изображения остается неопределенным так же, как центр проекций S' и положение основных плоскостей σ_1' и σ_2'.

Чтобы установить положение центра S', необходимо задать три параметра (координаты центра). Для определения положения основной плоскости σ_1' требуется два параметра (углы наклона следов плоскости σ_1' на двух плоскостях координат к соответствующей оси). Положение плоскости σ_2' задается одним параметром (углом наклона ее к плоскости σ_1'). В итоге параметраж полного изображения $\bar{p} = 6$ ($\bar{p}$ — параметрическое число). Для метрически определенного изображения достаточно, чтобы разность между $\bar{p}$ и числом заданных параметров (сделанных при помощи условий, наложенных на оригинале) обратилась в нуль.

При параллельном проектировании центр его находится в несобственной точке S'_∞, для определения которого требуется два параметра. Тогда параметрическое число полных изображений в параллельной проекции $\bar{p} = 5$. Если же центр проекций задан, что соответствует случаю параллельной проекции с данным направлением проектирования, минимальное значение параметрического числа $\bar{p} = 3$. При параллельном проектировании основу для решения метрической определенности дает теорема Польке-Шварца, которую Н. Ф. Четверухин называет первой теоремой существования. Такое название вполне объяснимо, так как из теоремы следует, что «при произвольном метрическом определении какого-либо тетраэдра (с точностью до подобия) всегда существует проекция (направление проектирования и положение тетраэдра относительно плоскости изображения), которая дает изображение его, совпадающее с наперед заданным» (стр. 216). При этом оригинал, точки которого аффинно определяются относительно упомянутого тетраэдра по их изображению, называется метрически определенным.

Основываясь на теореме Полька-Шварца, профессор Н. Ф. Четверухин предложил «вторую теорему существования», в которой полный четырехугольник с отрезком, соединяющим одну из вершин с любой точкой, лежащей внутри образованного тремя остальными вершинами треугольника, рассматривался как параллельная проекция тетраэдра, имеющего прямоугольный трехгранный угол и высоту, опущенную из вершины его на противоположную грань.

Вторая теорема существования нашла применение в случаях:

а) построения перпендикуляра, опущенного из вершины трехгранного угла на противоположную грань и

б) при построении плоских сечений, проходящих через данную точку перпендикулярно к заданной прямой.

Оба эти пункта можно свести к одному общему выводу: упомянутая теорема применима всегда, когда требуется выполнить построение пространственной сопряженной пары[1]).

Наряду с теоретическими исследованиями по вопросу полных и неполных изображений, автор показал возможность практического использования последних, так как они имеют большой запас свободных параметров. Он рассмотрел следующие случаи применения неполных изображений:

а) изображение пространственных сопряженных пар;

б) изображение проектирования на ось;

в) изображение операции проектирования фигуры на плоскость.

Теория полных и неполных изображений, параметрический метод их построения внесли необходимую ясность в вопросы наглядности и правильности выполнения чертежей в условиях педагогического процесса. Эта теория в настоящее время находит применение в стереометрии, аналитической и начертательной геометрии. Совершенствуя ее, Н. Ф. Четверухин в 1947 г. более полно изложил все ранее высказанные теоретические исследования в виде четырех отдельных статей [9, 10, 12, 13], дополнив их специальными практическими приложениями к проекционным чертежам. Его исследования в области теории наглядных изображений интересны тем, что дают возможность верно строить фигуры на плоскости; устанавливают позиционные свойства оригинала, а также его метрическую определенность и находят соответствующее практическое использование для всех видов проекционных чертежей, в том числе и аксонометрических.

Одновременно с Н. Ф. Четверухиным над вопросами теории аксонометрии работал ленинградский геометр О. А. Вольберг. Его исследования, опубликованные в 1947 г. [14], также решают вопрос о верности построения изображений, имеющих инциденции, соответствующие оригиналу. О. А. Вольберг ввел понятие о монопроекции, под которой следует понимать изображение, полученное проектированием фигуры из какого-то центра на данную плоскость, и из дополнительных сведений об оригинале, прилагаемых к чертежу в виде описания (хотя какого характера эти сведения, определение не устанавливает). Используя аффинное соответствие, автор изложил теорему Польке-Шварца и рассмотрел ряд метрических задач в аксонометрии.

Все теоретические исследования в области аксонометрических проекций сводятся в основном к определенной цели — правильности по-

[1]) Пространственной сопряженной парой на изображении называются такие плоскость и прямая, которым в оригинале соответствуют взаимно перпендикулярные плоскость и прямая.

строения того или иного изображения в соответствии с заданным оригиналом и проектирующим аппаратом (т. е. плоскостью проекций, центром или направлением проектирования). Это так называемая первая и основная проблема аксонометрии. Отсюда, однако, непосредственно вытекает и вторая проблема — определение оригинала по заданной проекции и проектирующему аппарату. Между этими проблемами имеется полная взаимосвязь. Теорема Польке-Шварца вполне подтверждает это, так как дает возможность получить реконструкцию тетраэдра оригинала по его параллельной проекции и, наоборот, по наперед заданному тетраэдру-оригиналу соответствующую ему проекцию невырождающегося полного четырехугольника. Решение обратной задачи, встречающееся во всевозможных руководствах и теоретических исследованиях, является довольно сложным. Естественно, что возник вопрос о том, чтобы найти более простое решение реконструкции натуральной системы координат в пространстве по ее заданному аксонометрическому изображению. Такое решение было предложено Шеффером (Scheffers) в его учебнике начертательной геометрии, изданном в 1919 г. [15].

Наиболее полно в нашей литературе этот вопрос изложен профессором Е. А. Глазуновым по материалам его доклада, сделанного на заседании Московского городского семинара начертательной геометрии 18 марта 1949 г. [16, стр. 35—38].

В настоящее время в СССР имеется весьма обширный материал по теории и практике аксонометрического проектирования, в несколько раз превышающий не только по объему, но и по глубине исследования, дореволюционные учебно-практические пособия, излагавшие эту тематику.

Авторы многочисленных статей и диссертационных работ занимались исследованиями:

а) теории построения аксонометрических изображений при параллельном проектировании;

б) способов решения задач в аксонометрии;

в) практического применения аксонометрических проекций в технике и пространственной статике;

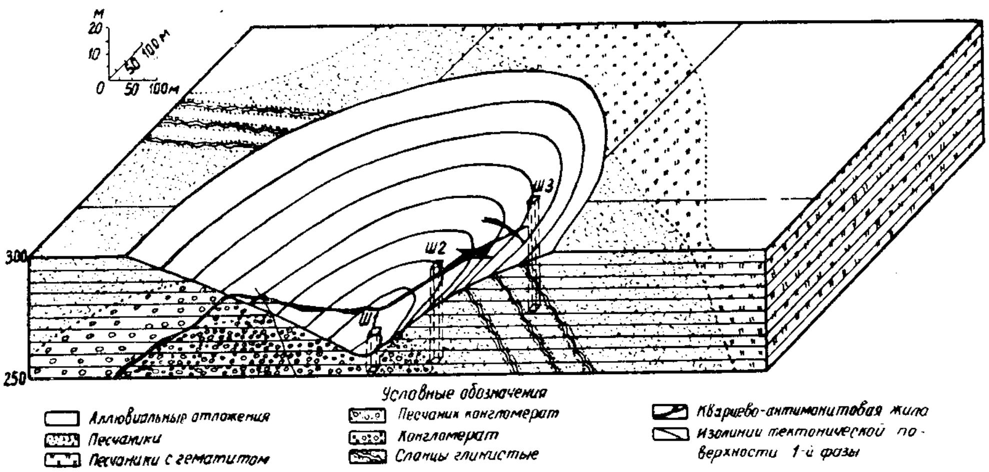
г) механизации вычерчивания аксонометрических изображений.

Появление большого количества работ по аксонометрии в советский период приходится на 30-е и особенно 40-е и 50-е годы. Такое внимание к вопросам построения наглядных изображений при параллельном проектировании объясняется созданием новых отраслей промышленности, как автомобильной, авиационной и др., требующих изготовления сложных конструкций, качество производства которых зависит и от правильно составленного рабочего комплексного чертежа. Часто ввиду сложности таких чертежей приходится для более быстрого и ясного понимания общих видов, схем и т. п. использовать наглядные изображения, преимущественно в аксонометрических проекциях.

Широкое распространение получили аксонометрические проекции в горном, геолого-разведочном и инженерно-строительном деле для изображения блок-диаграмм, профильных сечений месторождений, горных выработок, конструкций перекрытий, сложных строительных узлов и т. п. (фиг. 2, 3, 4, 5)[1]).

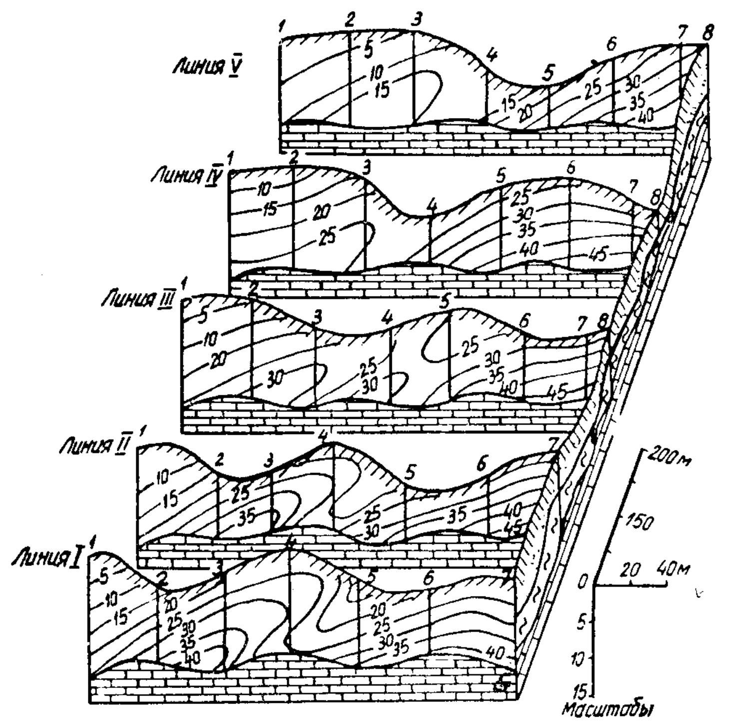
Наряду с параллельным проектированием, как известно, имеется еще центральное, которое по времени своего возникновения гораздо раньше нашло применение в живописи и архитектуре в виде науки о перспективе. Однако вопрос об использовании аксонометрического

[1]) См. Рыжов П. А. Геометрия недр. Углетехиздат. 1952.



Аксонометрическое изображение главной рудной жилы и структурной поверхности первой фазы трещинной тектоники

Фиг. 2

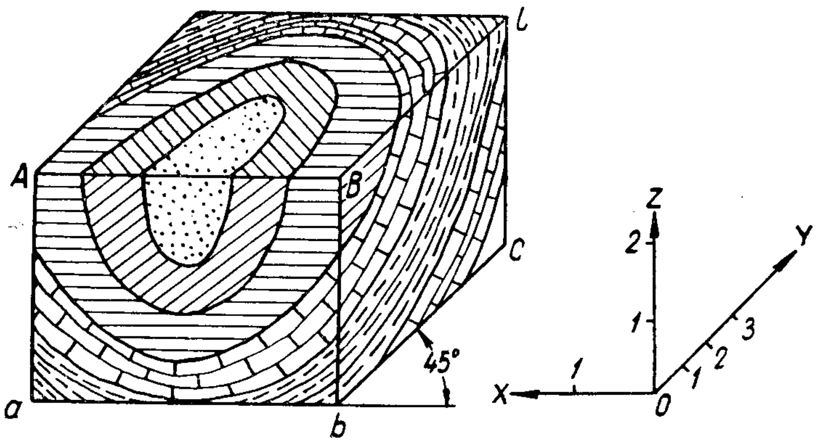


Аксонометрическая проекция профилей сечений залежи с изолиниями средних содержаний металла по ним.

Фиг. 3.

метода в центральном проектировании был рассмотрен только в I четверти XX века, точнее, в 1910 г. Эрвином Круппа, перенесшим теорему Польке-Шварца в центральную аксонометрию.

В нашей стране вопросами теории центральной аксонометрии стали заниматься только в советский период, причем было внесено мно-

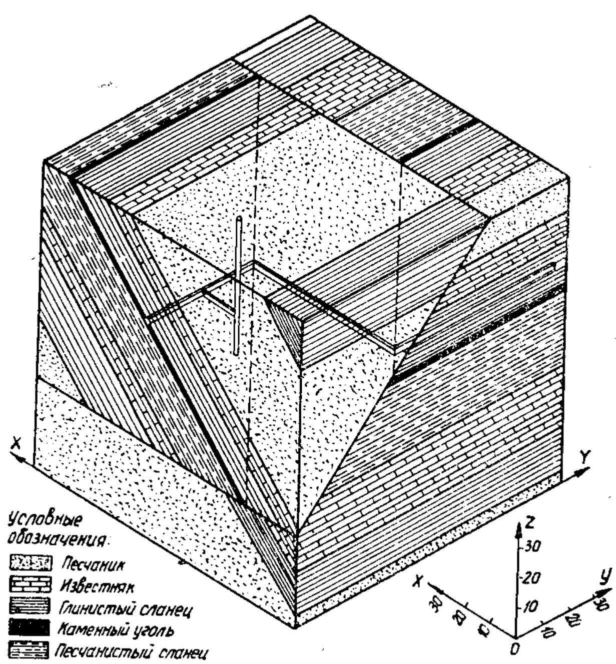


Блок-диаграмма синклинальной складки

Фиг. 4

го нового в доказательство теоремы Круппа, а также предложены новые теоремы.

В 1945 г. Н. Ф. Четверухин [17] и одновременно с ним Н. М. Бескин [18] опубликовали свои статьи, посвященные доказательству теоремы Круппа. Как известно, доказательство самого Круппа, основанное на свойствах минимальных конусов и мнимых окружностей, было очень сложно. Н. Ф. Четверухин заменил минимальные конуса и мнимые окружности их действительными «представителями», что дало возможность подвергнуть у с л о в и е Круппа графической проверке. Это было достигнуто путем использования полярных соответствий.



Блок-диаграмма дизъюнктивного или разрывного нарушения в изометрической проекции

Фиг. 5

Статья Н. М. Бескина, рассматривая вторую теорему Круппа, предлагает несколько уточненное доказательство, являющееся естественным обобщением теоремы Польке-Шварца в центральной проекции. Доказательство автор ведет проективно-аналитическим путем, в результате чего приходит к выводу, что при центральном проектировании заданной любым способом пространственной проективной системы координат можно получить ранее заданное плоское изображение с точностью до унимодулярно-аффинного преобразования. Такое заключение вполне совпадает с формулировкой теоремы Польке-Шварца, когда, проектируя параллельно любую пространственную аффинную систему координат (также заданную любым способом), можно получить наперед заданное плоское изображение с точностью до подобия.

Проективно аналитическое доказательство Н. М. Бескиным второй теоремы Круппа не имеет достаточной наглядности и довольно сложно, поэтому были предложены новые доказательства этой теоремы. В 1949 г. доцент Е. А. Мчедлешвили в своей работе [19] в поисках элементарного доказательства использовал «проективные соответствия пространства и расплющенного пространства или плоскости проекций» (стр. 175). Доказательство теоремы сводится к отысканию центра и плоскости проекций, на которую проектируется данная пространственная дезаргова конфигурация в данную же плоскую дезаргову конфигурацию.

Следует заметить, что несмотря на сравнительную краткость доказательства, автор излагает его недостаточно ясным языком, вводя новое понятие «расплющенного пространства», которое рассматривает как «плоскость плоской дезарговой конфигурации» Е. А. Мчедлешвили и сам отмечает, что из-за сосредоточения «внимания на дезарговых конфигурациях, ускользает настоящая суть этой теоремы» (стр. 178).

Более интересное и наглядное доказательство основной теоремы аксонометрии в центральной проекции удалось выполнить И. С. Джапаридзе [20].

Как упоминалось выше, большое значение для верности проекционных методов имеет теория полных и неполных изображений, которая применена для всех видов проекционных чертежей, в том числе выполненных в центральной проекции (перспективе).

Большое внимание к методам построения одного изображения и, в частности, решению метрических задач в центральной проекции уделил профессор О. А. Вольберг [14]. Главное отличие его работ от всех других в том, что он наиболее полно показал связь начертательной геометрии с проективной.

В 1951 г. появилась большая работа И. И. Котова [21], представляющая собой монографию, в которой приведены исследования центральных проекций как трехмерного, так и многомерного пространства. Автор на основе анализа центральных проекций поставил задачу «развить теорию комбинированных изображений как метода построения плоских моделей пространственных фигур, полностью отображающих их позиционные и метрические свойства как фигур проективного и евклидова пространства» [21] (стр. 5). Рассматривая центральную проекцию прямоугольной системы координат на аксонометрическую плоскость, он приходит к выводу, что теорему центральной аксонометрии [17, 18] можно формулировать следующим образом:

«Треугольник следов комбинированного изображения пространственной системы координат в центральной проекции гомотетичен треугольнику линий схода ее координатных плоскостей при центре гомотетии, представляющем собой центральную проекцию начала координат» [21] (стр. 142). Эта теорема имеет место для косоугольной системы координатных осей. Исходя из вышеприведенной формулировки теоремы, автор доказывает обратную теорему, называя ее теоремой существования центральных проекций.

Согласно этой теореме можно два любых гомотетичных остроугольных треугольника, имеющих центр гомотетии, «... рассматривать как комбинированное изображение прямоугольной системы координат в центральных проекциях, дополненное проекциями бесконечно удаленных прямых, координатных плоскостей» [21] (стр. 143). Если центр гомотетии совпадает с ортоцентром треугольника следов, то такого типа центральная аксонометрия называется нормальной, причем, когда две аксонометрические оси имеют конгруентные шкалы, то это будет нормальная или центральная диметрия. Нормальная аксонометрия с тремя конгурентными шкалами называется нормальной или центральной изометрией. Далее И. И. Котов делает вывод, что в древнерусских миниатюрах использовался частный вид нормальной диметрии (он назвал ее «русская диметрия»), при котором плоскость аксонометрических проекций была параллельна оси Z'. Что касается «обратной перспективы», использовавшейся русскими художниками, то это есть только «приближение к одному из видов центральной аксонометрии» [21] (стр. 176—177), так как в тот период ни о каких измерениях по осям на основе координатного принципа не могло быть и речи. Применение комбинированных изображений координатных осей в центральной аксонометрии дает возможность установить практическое использование ее в фотограмметрии и, кроме того, обнаруживается связь между центральной и ортогональной аксонометрией, являющейся ее частным видом.

Применение центральной аксонометрии в фотограмметрии является большим практическим вопросом, решающим задачу, обратную построению перспективы, т. е. восстановление оригинала по данному фотографическому снимку.

В настоящее время фотограмметрический способ применяется:

а) для выявления особенностей местности, где предполагается вести строительные работы;

б) для геологических и военных целей (составление военно-топографических планов);

в) при съемках архитектурных или археологических предметов;

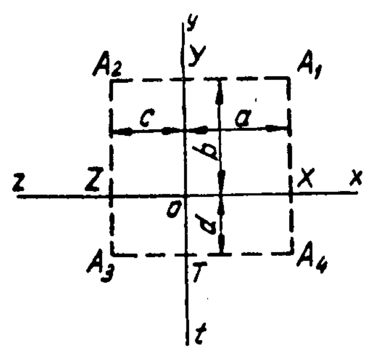
г) в мелиорации, сельском хозяйстве и других областях.

Для решения обратной задачи, задачи реконструкции предмета по его центральному изображению в фотограмметрии имеется много способов, а именно: способ засечек, аналитический и графо-механический. Однако все они не базируются на методе центральной аксонометрии. В ряде работ [22, 23, 24, 25 и др.] этим методом решаются задачи для простых геометрических фигур и для частного случая, когда на снимке, кроме изображения точек, имеются их вторичные проекции (так называемое полное изображение в смысле Н. Ф. Четверухина). Решение метрических задач по изображениям предметов более сложной формы становится невозможным. Исключение представляет диссертация В. А. Рыжовой [25], которая по двум фотографиям предмета, снятых с двух точек, осуществила их аксонометризацию, что дало возможность определить аксонометрические координаты любой, заснятой на местности точки. Автор предложила новую схему прибора для обработки снимков координатным методом.

Аксонометрические проекции нашли большое применение в вопросах физико-химического анализа, где потребовалось использовать их для многомерного пространства. Соответствующий вклад в развитие методов изображений в n-мерном пространстве внес академик Н. С. Курнаков.

«Профессор Н. С. Курнаков, — писал Е. С. Федоров, — подчеркнул важность для целей физической химии способа изображений...», который «... сделал доступным наглядному изображению образцы (функции) четырех независимых переменных» [26] (стр. 53).

Метод изображения систем с четырьмя независимыми переменными был предложен в 1902 г. голландским ученым П. Х. Скоуте (Schoute) [27], который, разрабатывая теорию способов построения в четырехмерном пространстве, обобщил на него основную теорему аксонометрии. В дальнейшем, в 1916 г. метод Скоуте был применен на практике Буке (Boeke) [28], почему до настоящего времени сохранилось название «метод Скоуте-Буке». По характеру построения упомянутый метод может быть отнесен к аксонометрическим, так как он основан на координатном принципе, являющемся обязательным условием аксонометрии. Рассматривая четыре переменных величины как координаты точек четырехмерного пространства, можно такую точку изобразить на плоскости в виде комплексного чертежа. Для этого, взяв две взаимно перпендикулярные линии, принимают точку пересечения их за начало координат, а четыре луча ox, oy, oz, ot — за четыре координатные оси. Откладывая соответствующие значения переменных a, b, c, d и отмечая точки на осях x, y, z, t, проводят линии, параллельные данным осям. Взаимное пересечение линий в четырех точках A_1, A_2, A_3, A_4 изображает состав или состояние системы (фиг. 6).



Фиг. 6

Рассматривая различные способы изображений в физико-химическом анализе, можно отметить, что авторы, предложившие тот или иной метод, большей частью использовали координатный принцип построения диаграмм «состав—свойство», вследствие чего многие из этих методов могут быть отнесены к методу параллельной многомерной аксонометрии.

Широкое применение графических способов для изображения многокомпонентных систем получило соответствующее отображение в теоретических исследованиях, касающихся аксонометрии n-мерного пространства. В настоящее время у нас имеются работы, специально рассматривающие теоретические вопросы многомерной аксонометрии, выполненные Н. Ф. Четверухиным, И. И. Котовым, З. И. Прянишниковой, В. Н. Первиковой и др.

Надо отметить, что аксонометрия многомерного пространства представляет довольно интересную область для дальнейших теоретических исследований и практического использования.

Подводя итоги сказанному, можно сделать следующие выводы:

1. В Советский период теория аксонометрии и ее практические приложения получили наибольшее развитие.

2. Большинство ученых исследователей стремилось и стремится метрически реконструировать пространственный объект (тетраэдр) по его изображению в параллельной и центральной аксонометрии, т. е. добиться наиболее удобных способов доказательства ее основных теорем и реконструкции натуральной системы координат.

3. Соответствующее развитие получила многомерная аксонометрия, нашедшая применение в физико-химическом анализе.

4. Для ускорения построения аксонометрических изображений были предложены различные конструкции аксонографов. Надо сказать, что до сих пор эти приборы слабо используются на производстве. Это объясняется, по-видимому, или сложностью установки приборов (аксонограф Л. С. Скрипова), или дополнительными графическими по-

строениями, неиспользуемыми в дальнейшей работе (приборы Кона и Крота), или ограниченностью вычерчивания типов аксонометрических проекций (прибор Юдицкого) и т. п. Можно отметить, что из всех существующих в настоящее время конструкций наиболее подходящим под уровень требований механизации следует отнести прибор Н. Л. Русскевича, который имеет полную возможность для внедрения в конструкторские и чертежные бюро заводов как по простоте работы с ним, так и по значительной ускоряемости процесса построения изображений.

5. Для быстрого выбора нужного типа аксонометрической проекции является весьма удобным способ номографирования параметров и формул ортогональной аксонометрии, предложенный А. И. Островским и М. В. Бурде. Интересующиеся этим способом могут более подробно ознакомиться с ним в работе [16].

ЛИТЕРАТУРА

1. Сборник «Вопросы современной начертательной геометрии». М., 1947.

2. А. К. Власов. Новое доказательство теоремы Польке (Математический сборник, т. 32, вып. 3, 1925).

3. Н. А. Глаголев. Начертательная геометрия. Изд. 1-е, М., 1936.

4. Н. А. Глаголев. Обобщение теоремы Польке (Математический сборник, т. 32, вып. 4, 1925).

5. Н. Ф. Четверухин. Тройки прямых как проекции прямоугольных систем осей в пространстве (Математический сборник, т. 40, вып. 4, 1933).

6. Н. Ф. Четверухин. Введение в высшую геометрию. Изд. 1-е, М., 1934.

7. Н. Ф. Четверухин. Об аффинной жесткости многогранников (Доклады АН СССР, т. 42, № 1, 1944).

8. Н. Ф. Четверухин. Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии. М., 1946.

9. Н. Ф. Четверухин. Полные и неполные изображения (Вопросы современной начертательной геометрии, М., 1947).

10. Н. Ф. Четверухин. Условные изображения и параметрический метод их построения (Вопросы современной начертательной геометрии, М., 1947).

11. И. М. Кипнис. Геометрические задачи, требующие составления тригонометрических уравнений (Математика в школе, № 4, М., 1941).

12. Н. Ф. Четверухин. Основная теорема аксонометрии с точки зрения условных изображений (Труды МАИ, вып. VI, 1947).

13. Н. Ф. Четверухин. Точечный базис и его применение к проекционным чертежам (инженерный сборник АН СССР, т. V, вып. 1, М., 1948).

14. О. А. Вольберг. Лекции по начертательной геометрии, М., 1947.

15. G. Scheffers. Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Bd I—II. Berlin. 1919—1920.

16. Е. А. Глазунов и Н. Ф. Четверухин. Аксонометрия. М., 1953.

17. Н. Ф. Четверухин. Об основной теореме аксонометрии в центральной проекции (Доклад АН СССР, т. L, 1945).

18. Н. М. Бескин. Аналог теоремы Польке-Шварца в центральной аксонометрии (Доклады АН СССР, т. L, 1945).

19. Е. А. Мчедлешвили. Проективные основания начертательной геометрии (Отд. оттиск из трудов ТПИ, № 19) Тбилиси, 1949.

20. И. С. Джапаридзе. Проективно-синтетическое доказательство предложения Н. М. Бескина (Труды Грузинского политехнического института, № 30, 1954).

21. И. И. Котов. Комбинированные изображения. Изд. МАИ, 1951.

22. Г. М. Дешевой. Применение метода изображения координат к решению задач в перспективе (Записки Ленинградского Горного института, вып. 3, 1939).

23. К. С. Кипшидзе. Метод построения перспектив по аксонометрическим проекциям. Канд. диссертация, Библиотека им. В. И. Ленина, 1944.

24. А. А. Кон. Преобразование ортогональных проекций в центральные и аксонометрические. Канд. диссертация, Библиотека им. В. И. Ленина, 1949.

25. В. А. Рыжова. Метод центральной аксонометрии и его применение в фотограмметрии. Канд. диссертация, Библиотека им. В. И. Ленина, 1953.

26. Е. С. Федоров. Точное изображение точек пространства на плоскости (Записки Горного института, т. 1, вып. 1, СПб, 1907).

27. P. H. Schoute. Mehrdimensionale Geometrie. I Teil. Leipzig. 1902.

28. H. E. Bocke. Eine Anwendung mehrdimensionaler Geometrie auf chemisch—mineralogische Fragen, die Zusammen setzung des Turmalins (Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paleontologie. II Band. Zweites Heft. S. 109—148. Stuttgart. 1916).

ИСПРАВЛЕНИЯ И ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строки сверху	Строки снизу	Фиг.	Напечатано	Следует читать
21			1 нижн. угол слева	φ_3	φ_0
23		14	—	$-48°35'$ (9)	$-48°35'$
36		1	—	$f > n$	$f > h$
36		15	—	фиг. 2	фиг. 1
42		1	—	$PACD$	$PASD$
42		2	—	GL	GT
56		19	—	ТПИ	ГПИ
58	24	—	—	не собственную точку.	несобственную точку.
58	28—29	—	—	(прямого кругового)	прямого кругового
60	8	—	—	MM и KK,	MM_1 и KK_1
60	9	—	—	KK	KK_1
60		10	—	$\kappa'\kappa_1')$.	$\kappa'\kappa'_1$.
60		18	—	вертикальной	фронтальной
61		7	—	вертикальной	фронтальной
66		6	—	$\frac{x^2}{R^2\kappa_1^2} =$	$\frac{x^2}{R^2\kappa_1^2} +$
68	19	—	—	Формула	Формулы
68		6	—	$= az$	$= 4\,az$
73	6	—	—	$b^{\kappa}(0)$	$b_{\kappa}(0)$
76	—	7	—	2,0	1,0