ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 143 1966

# О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТАХ ТОЧЕК

С. Ф. СИБИРЦЕВ

(Представлена научным семинаром кафедры начертательной геометрии и графики)

## Введение

В начертательной геометрии при решении многих задач используются геометрические места точек. Цель данной работы — рассмотреть геометрические места точек и дать их классификацию.

Кроме того, в работе рассмотрено геометрическое место точек, равноудаленных от двух скрещивающихся прямых.

## Геометрические места точек

Геометрическим местом точек (г. м. т.) называется такая совокупность точек, которая содержит все точки, обладающие каким-либо свойством, и не содержит ни одной точки, не обладающей этим свойством.

## Основные геометрические места точек

1. Г. м. т., равноудаленных от одной точки, есть поверхность шара с центром в данной точке.

2. Г. м. т., равноудаленных от двух точек, есть плоскость, проходящая через середину отрезка, соединяющую данные точки, и к нему перпендикулярная.

3. Г. м. т., равноудаленных от трех данных $A$, $B$, $C$, не лежащих на одной прямой, есть прямая, перпендикулярная к плоскости треугольника $ABC$ и проходящая черз центр окружности, описанной около треугольника $ABC$.

4. Г. м. т., равноудаленных от четырех данных точек, не лежащих в одной плоскости, есть центр шара, поверхность которого проходит через эти точки.

5. Г. м. т., равноудаленных от одной прямой, есть поверхность прямого кругового цилиндра, осью которого является данная прямая.

6. Г. м. т., равноудаленных от двух параллельных прямых, есть плоскость, перпендикулярная к отрезку, определяющему кратчайшее расстояние между данными прямыми и проходящая через его середину.

7. Г. м. т., равноудаленных от двух пересекающихся прямых, есть пара плоскостей, перпендикулярных к плоскости, определяемой данными прямыми и проходящих через биссектрисы углов между ними.

8. Г. м. т., равноудаленных от трех параллельных прямых, не лежащих в одной плоскости, есть ось цилиндра, поверхность которого проходит через данные прямые.

9. Г. м. т., равноудаленных от трех прямых, проходящих через одну точку, есть ось конуса, поверхность которого проходит через данные прямые.

(Если учитывать направления заданных прямых, то получим четыре прямые, отвечающие данному геометрическому месту. Примером может служить геометрическое место точек, равноудаленных от осей координат. Данному геометрическому месту будут отвечать четыре оси конусов, проходящие через следующие октанты: I—VII; II—VIII; III—V; IV—VI).

10. Г. м. т., равноудаленных от одной плоскости, есть пара плоскостей, параллельных данной плоскости и расположенных по разные от нее стороны на данном расстоянии.

11. Г. м. т., равноудаленных от двух пересекающихся плоскостей, есть две биссекторные плоскости двугранных углов, образованных этими плоскостями.

12. Г. м. т., равноудаленных от двух параллельных плоскостей, есть плоскость, параллельная данным и расположенная посредине между ними.

13. Г. м. т., равноудаленных от трех плоскостей, проходящих через одну точку, есть ось конуса, вписанного в трехгранный угол, образованный данными плоскостями (если учесть направление плоскостей, то получим четыре прямые).

14. Г. м. т., равноудаленных от трех плоскостей, образующих призму (имеющих общую не собственную точку) есть ось цилиндра, вписанного в данную призму (если плоскости продолжить за границу призмы, то получим четыре прямые).

15. Геометрическое место прямых, проходящих через данную точку и наклоненных под углом $\alpha$ к данной плоскости, есть поверхность (прямого кругового) конуса, вершина которого лежит в данной точке, а образующие наклонены под углом $\alpha$ к данной плоскости.

16. Г. м. т., из которых данный отрезок виден под данным углом, есть поверхность, полученная от вращения сегмента, опирающегося на данный отрезок и вмещающего данный угол (при $\alpha = 90^\circ$ получим поверхность шара).

17. Г. м. т., равноудаленных от окружности, есть поверхность тора, осью которого является данная окружность.

18. Г. м. т., равноудаленных от двух скрещивающихся прямых, есть поверхность гиперболического параболоида. Доказательство данного положения рассматривается в работе отдельно.

## Классификация геометрических мест

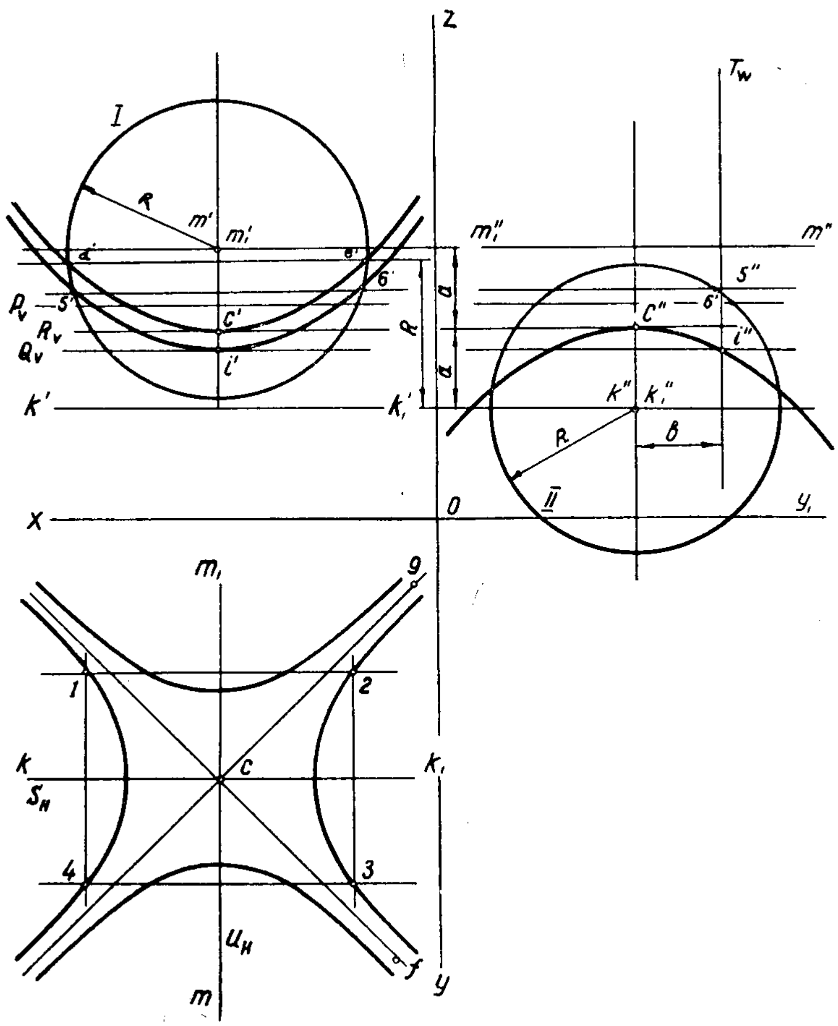
Все указанные выше геометрические места можно разбить на три вида. К первому виду можно отнести такие геометрические места, которые имеют смысл только при значении аргумента, единственного для каждого отдельного случая.

Примером такого геометрического места может служить геометрическое место точек равноудаленных от одной точки. В данном случае определяющим аргументом будет расстояние от данной точки. Это геометрическое место имеет смысл только при вполне определенном значении расстояния. Если расстояние считать изменяющимся от нуля до бесконечности, то данное геометрическое место теряет свой смысл.

К геометрическим местам первого вида можно отнести следующие: 1, 5, 10, 15, 16, 17.

Ко второму виду можно отнести такие геометрические места, для которых аргумент, их определяющий, может изменяться в известных пределах. Примером такого геометрического места может служить геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек. Определяющим аргументом в этом случае будет расстояние от двух точек. Подразумевается, что расстояние в данном случае может принимать значения от величины, равной половине расстояния между двумя данными точками до бесконечности. К геометрическим местам второго вида можно отнести следующие: 2, 3, 6, 7, 9, 11, 13, 18.

К геометрическим местам третьего вида можно отнести такие геометрические места, которые не принадлежат к первым двум. Аргумент, определяющий данное геометрическое место, будет постоянным, и вели-




Фиг. 1

чина его вполне определяется заданием данных геометрических форм. Примером такого геометрического места может служить геометрическое место точек, равноудаленных от четырех данных точек. Аргументом, определяющим данное геометрическое место, будет расстояние, в данном случае радиус сферы. Величина радиуса сферы вполне определяется заданием данных точек. К геометрическим местам третьего вида можно отнести следующие: 4, 8, 12, 14. Легко заметить, что кроме четвертого геометрического места, остальные являются частными случаями соответствующих геометрических мест второго вида. Например, геометрическое место точек, равноудаленных от трех параллельных прямых

(ГМТ № 8), можно рассматривать как частный случай геометрического места точек, равноудаленных от трех пересекающихся прямых (ГМТ № 9), когда точка их пересечения становится не собственной.

Аналогично, геометрические места № 12 и 14 можно рассматривать как частные случаи соответственно № 11 и 13 геометрических мест.

### О геометрическом месте точек, равноудаленных от двух скрещивающихся прямых

Рассмотрим скрещивающиеся прямые $MM$ и $KK$, расположенные под прямым углом, прямая $KK$ параллельна плоскости $V$ (фиг. 1). Расстояние между прямыми обозначим через $2a$. Геометрическим местом точек, равноудаленных от одной прямой, является поверхность цилиндра. Очевидно, что для заданного расстояния (по величине большего $a$) искомым геометрическим местом будет линия пересечения поверхностей цилиндров. Изменяя величину расстояния от $a$ до бесконечности, получим искомое геометрическое место.

Для исследования полученного геометрического места исследуем сечение его плоскостями. Чтобы упростить исследования, построим два круговых цилиндра I и II с данным радиусом $R$, осями которых соответственно являются прямые $MM_1$ и $KK_1$.

### Сечение плоскостью $R$, проходящей через точку $C$ и параллельной плоскости $H$

Сечение цилиндров I и II плоскостью $R$ даст две пары параллельных прямых, отстоящих на одинаковом расстоянии от прямых $KK_1$ и $MM_1$. Очевидно, что полученные прямые будут пересекаться на биссектрисах углов между прямыми $KK_1$ и $MM_1$, т. е. на прямых $CF$ и $CG$. Таким образом, сечение плоскостью полученного геометрического места даст две прямые, которые являются биссектрисами углов между $KK_1$ и $MM_1$, т. е. прямые $CF$ и $CG$.

### Сечение плоскостью $S$, проходящей через точку $C$ и параллельной плоскости $V$

Сечение I цилиндра плоскостью $S$ на вертикальной проекции даст окружность радиуса $R$, а от II цилиндра получим две прямые, удаленные от $KK_1$ на расстояние $R$. На чертеже изображена одна прямая $DE$. Точки пересечения окружности и прямой обозначим через $D$ и $E$. Эти точки будут находиться на одинаковом расстоянии от центра $(m'm_1')$ и от прямой $\kappa'\kappa_1'$. Очевидно, что при изменении величины $R$ это свойство сохраняется для всех точек. Поэтому сечение рассматриваемого геометрического места плоскостью $S$ даст параболу с фокусом в точке $(m'm_1')$ и директрисой $\kappa'\kappa_1'$). Ветви параболы направлены вверх.

### Сечение плоскостью $U$, проходящей через точку $C$ и параллельной плоскости $W$

Рассуждая аналогично, как и в предыдущем случае, на профильной плоскости проекции получим параболу с фокусом в точке $(\kappa''\kappa_1'')$ и директрисой $m_1''m''$. Ветви этой параболы будут направлены вниз.

### Сечение плоскостью $P$ параллельной плоскости $H$

Сечение двух цилиндров I и II плоскостью $P$ даст две пары параллельных прямых, которые пересекаются в точках 1, 2, 3 и 4. При изменении величины радиуса $R$ эти точки опишут кривую. При увеличении радиуса $R$, расстояние между точками 1 и 3 увеличивается, а точки приближаются к прямой $CF$. Поэтому при радиусе, равном бесконечности, получим на кривой одну несобственную точку. Рассуждая аналогично про точки 2 и 4, получим вторую несобственную точку на кривой.

Таким образом, полученная кривая второго порядка имеет две несобственные точки и потому является гиперболой, ассимптотами которой являются прямые $CF$ и $CG$.

Аналогично можно доказать, что любое сечение плоскостью, параллельной плоскости $H$ и расположенной выше точки $C$, даст гиперболу с ассимптотами $CF$ и $CG$.

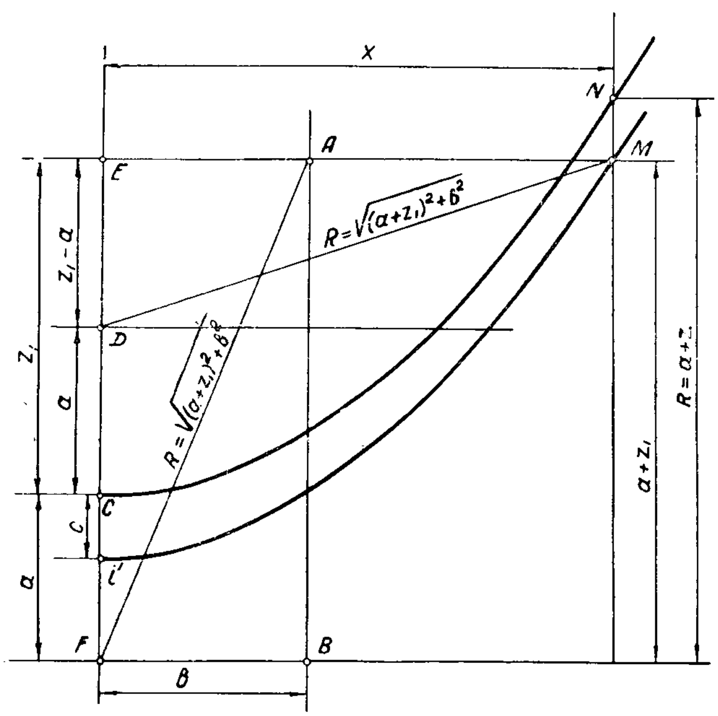
### Сечение плоскостью $Q$, параллельной плоскости $H$ и расположенной ниже точки $C$

Рассуждая точно так же, как и в предыдущем случае, докажем, что сечение плоскостью $Q$ даст гиперболу с ассимптотами $CF$ и $CG$, только оси этой гиперболы будут повернуты на 90°.

Любое сечение плоскостью, параллельной плоскости $H$ и расположенной ниже точки $C$, даст гиперболу того же вида.

### Сечение плоскостью $T$, параллельной плоскости $V$ и отстоящей на расстояние $b$ от точки $C$

Сечение плоскостью $T$ на вертикальной проекции от I цилиндра даст окружность радиуса $R$ с центром в точке $(m'm_1')$, а от другого — две прямые, параллельные $k'k_1'$, одна из них пересечет окружность




Фиг. 2

в точках 5 и 6. Если изменять величину радиуса $R$, то точки 5 и 6 опишут кривую. Исследуем эту кривую.

Для удобства анализа фронтальную и профильную проекции совместим на одном чертеже (фиг. 2). Фокус параболы обозначим точкой $D$, начало координат перенесем в вершину параболы $C$; профильный след плоскости $T$ займет положение прямой $AB$. $FB$ — директриса параболы. Докажем, что сечение плоскостью $T$ дает параболу такую же, как и сечение плоскостью $S$, только опущенную вниз.

Возьмем точку $N(xz)$ на параболе, полученной от сечения плоскости $S$. Уравнение этой параболы будет иметь вид

$$x^2 = 4az.$$

или

$$z = \frac{x^2}{4a}. \qquad (1)$$

На второй параболе возьмем точку $M(xz_1)$, имеющую одинаковую абсциссу с точкой $N$.

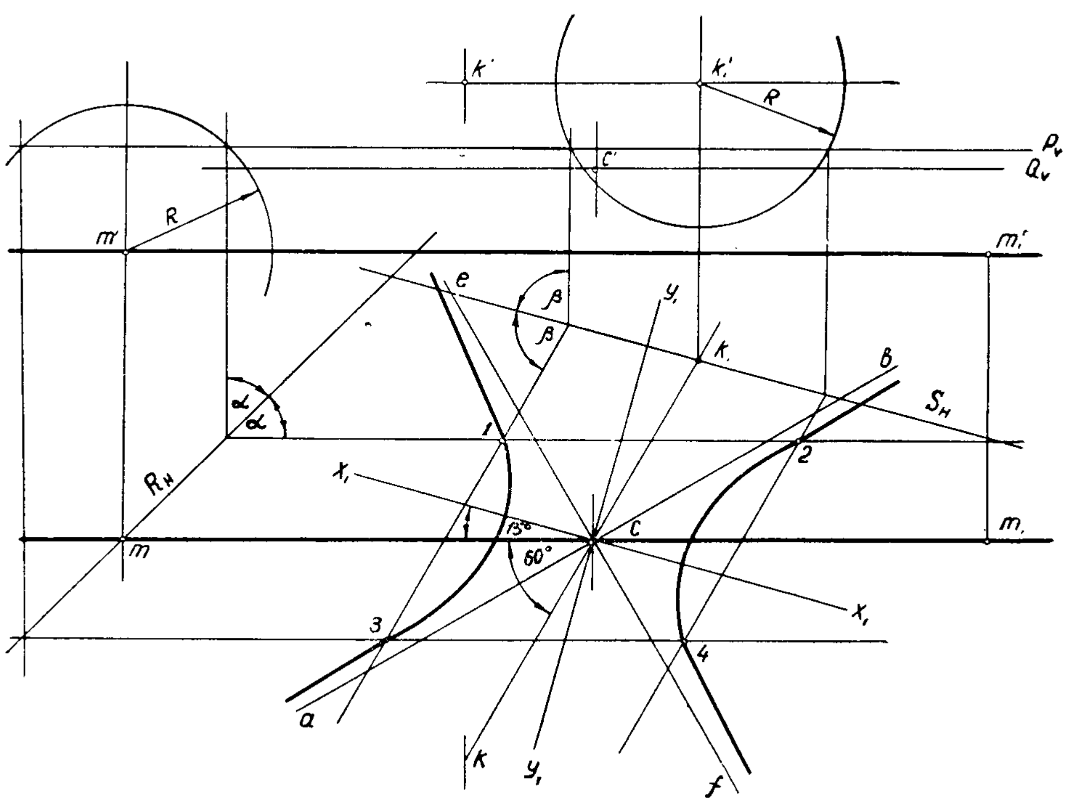
По построению $EF = AB = a + z_1$.

Из прямоугольного $\Delta FAB$ имеем

$$FA = R = \sqrt{(a+z_1)^2 + b^2}.$$

По построению

$$DM = FA = \sqrt{(a+z_1)^2 + b^2}.$$




Фиг. 3

Из прямоугольного $\Delta DEM$ имеем:

$$x^2 = (a+z_1)^2 + b^2 - (z_1 - a)^2,$$

$$x^2 = a^2 + 2az_1 + z_1^2 + b^2 - z_1^2 + 2az_1 - a^2,$$

$$x^2 = 4az_1 + b^2$$

или

$$z_1 = \frac{x^2 - b^2}{4a}. \qquad (2)$$

Вычитая из первого второе, получим

$$z - z_1 = \frac{x^2}{4a} - \frac{x^2 - b^2}{4a} = \frac{b^2}{4a}.$$

Таким образом, для любых двух точек, взятых на полученных кривых, абсциссы которых равны, разность аппликат равна постоянной величине $\frac{b^2}{4a}$.

Следовательно, если первая кривая — парабола, то и вторая тоже будет парабола, только опущенная вниз на величину $\frac{b^2}{4a}$.

Рассматривая сечение плоскостью $T$, можно заключить, что исследуемое геометрическое место может быть получено от движения параболы, которая перемещается параллельно сама себе и вершина которой скользит по другой параболе.

Ветви последней параболы направлены в противоположную сторону. Из аналитической геометрии известно, что такая поверхность называется гиперболический параболоид.

Рассмотрим случай, когда угол между скрещивающимися прямыми неравен прямому углу (фиг. 3).

На чертеже $MM_1$ параллельна плоскости $V$, а угол между $MM_1$ и $KK_1$ равен 60°. Опишем около каждой прямой цилиндрическую поверхность радиуса $R$ и рассмотрим сечения этих поверхностей различными плоскостями.

### Сечение плоскостями, параллельными плоскости $H$

Сечение плоскостью проекций $V$ поверхности цилиндра, описанного около прямой $KK_1$ дает эллипс. Чтобы избежать построения эллипсов, применим метод вспомогательного проектирования на две плоскости. В качестве вспомогательных плоскостей возьмем две горизонтально-проектирующие плоскости $R$ и $S$, равнонаклоненные к образующим цилиндров и глубинным проектирующим линиям.

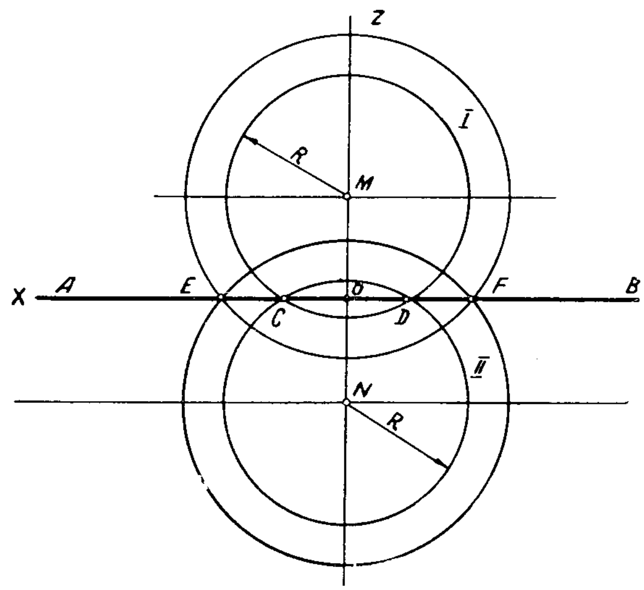
Плоскости $R$ и $S$ пересекают цилиндры по эллипсам, которые спроектируются на плоскость $V$ в виде окружностей. В дальнейшем, рассуждая так же, как и в первом случае, докажем, что сечения плоскостью $Q$, проходящей через точку $C$, даст на горизонтальной плоскости проекции две прямые $ab$ и $ef$, которые являются биссектрисами углов, образованных прямыми $kk_1$ и $mm_1$. Аналогично докажем, что сечение плоскостью $P$ на горизонтальной проекции даст гиперболу, ассимптотами которой будут прямые $ab$ и $ef$.

Оси полученной гиперболы будут повернуты в данном случае на 15° по часовой стрелке. Очевидно, что при любом угле между прямыми $MM_1$ и $KK_1$ сечение плоскостью параллельной плоскости $H$ исследуемого геометрического места дает гиперболу, ассимптоты которой взаимно перпендикулярны.

### Сечение вертикальными плоскостями

Прежде чем строить сечение вертикальными плоскостями, рассмотрим геометрические места точек, получаемые от пересечения окружностей и эллипсов.

Рассмотрим геометрическое место точек, которое получается от пересечения пар концентрических окружностей равных радиусов, центры которых находятся в точках $M$ и $N$ (фиг. 4). Очевидно, что точки искомого геометрического места $E$, $C$, $D$, $F$ принадлежат прямой $AB$. Прямая $AB$ перпендикулярна $MN$ и проходит через точку $O$,




Фиг. 4

середину отрезка $MN$. Докажем это математически. Для этого поместим начало координат в точку $O$, а ось $OX$ направим по прямой $AB$ Уравнения окружностей с центрами в точках $M$, $N$ и радиусом $R$ будут иметь вид:

$$x^2 + (z - a)^2 = R^2, \quad \mathrm{I}$$

$$x^2 + (z + a)^2 = R^2. \quad \mathrm{II}$$

Чтобы получить искомое геометрическое место, исключим радиус $R$ из полученных уравнений, тогда получим:

$$x^2 + (z - a)^2 = x^2 + (z + a)^2,$$

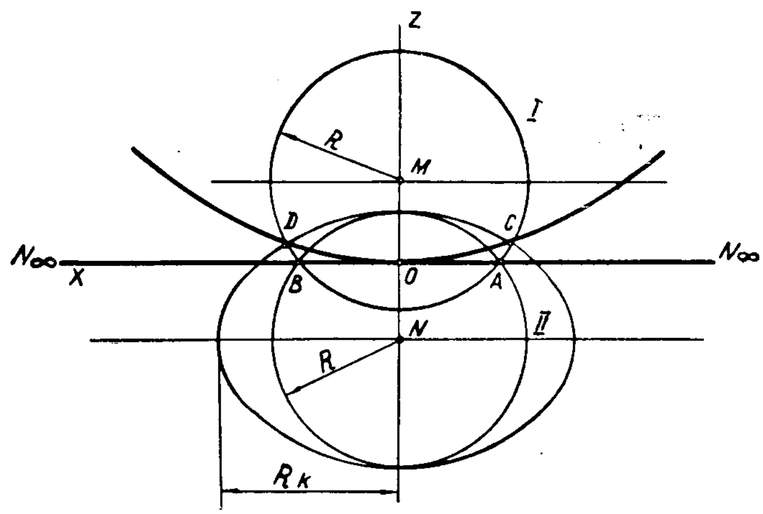
$$z^2 - 2\,az + a^2 = z^2 + 2az + a^2,$$

$$4az = 0,$$

$$z = 0.$$

Получили уравнение прямой $AB$.

Рассмотрим геометрическое место точек, полученное от пересечения окружности с центром в точке $M$ и подобных эллипсов с центром в точке $N$. Малые оси эллипсов равны соответствующим диаметрам окружностей (фиг. 5). Если эллипс заменить окружностью с центром в точке $N$ и радиусом $R$, то окружности I и II пересекутся в точках $A$ и $B$. Заменяя окружность II эллипсом, получим точки пересечения окружности I и эллипса $C$ и $D$. Очевидно, что точки $C$ и $D$ расположены выше прямой $AB$ и расстояние между ними увеличилось. При увеличении радиуса $R$ точки $A$ и $B$ опишут прямую, а точки $C$ и $D$ опишут кривую. Докажем, что полученная кривая будет парабола. Заменяя окружность эллипсом, устанавливаем такое взаимно однозначное соответствие точек прямой и кривой, что каждой точке прямой будет соответствовать единственная точка кривой. С увеличением радиуса $R$ увеличивается расстояние точки $A$ от точки $O$ и увеличивается аппликата точки $C$. При радиусе, равном бесконечности, получим несобственную точку $N\infty$ прямой $AB$, которой будет соответствовать единственная несобственная точка кривой. Исследуемая кривая есть кривая второго порядка и имеет одну несобственную точку, следовательно, является параболой. Ветви параболы направлены вверх, в сторону ок-




Фиг. 5

ружности. Докажем это математически. Начало координат поместим в точку $O$, а ось абсцисс направим по прямой $AB$. Малая полуось эллипса равна радиусу $R$, а большую обозначим $R\kappa$, где $\kappa > 1$. Тогда уравнения окружности или эллипса будут иметь вид:

$$x^2 + (z - a)^2 = R^2 \text{ уравнение окружности,}$$

$$\frac{x^2}{\kappa^2 R^2} + \frac{(z + a)^2}{R^2} = 1 \text{ уравнение эллипса.}$$

Исключив из этих уравнений радиус, получим:

$$x^2 + (z - a)^2 = \frac{x^2}{\kappa^2} + (z + a)^2,$$

$$x^2 + z^2 - 2az + a^2 = \frac{x^2}{\kappa^2} + z^2 + 2az + a^2,$$

$$x^2 - \frac{x^2}{\kappa^2} = 4az,$$

$$x^2 \left( 1 - \frac{1}{\kappa^2} \right) = 4az.$$

Получили уравнение параболы.

При $\kappa > 1; \qquad 1 - \frac{1}{\kappa^2} < 1,$

следовательно, ветви параболы более пологи, чем у параболы

$$x^2 = 4az.$$

Рассмотрим геометрическое место точек, полученное от пересечения эллипсов, центры которых находятся в точках $M$ и $N$.

Для этого верхнюю окружность заменим эллипсом, малая полуось которого равна радиусу $R$, а большая равна $R\kappa_1$. Тогда уравнения эллипсов будут иметь вид:

$$\frac{x^2}{R^2\kappa_1^2} = \frac{(z-a)^2}{R^2} = 1$$ уравнение эллипса с центром в точке $M$.

$$\frac{x^2}{R^2\kappa^2} + \frac{(z+a)^2}{R^2} = 1$$ уравнение эллипса с центром в точке $N$.

Исключив радиус $R$ из уравнений, получим:

$$\frac{x^2}{\kappa_1^2} + (z-a)^2 = \frac{x^2}{\kappa^2} + (z+a)^2,$$

$$\frac{x^2}{\kappa_1^2} + z^2 - 2az + a^2 = \frac{x^2}{\kappa^2} + z^2 + 2az + a^2,$$

$$x^2\left(\frac{1}{\kappa_1^2} - \frac{1}{\kappa^2}\right) = 4az$$

получили уравнение параболы.

При $\kappa > \kappa_1$; $\left(\frac{1}{\kappa_1^2} - \frac{1}{\kappa^2}\right) > 0$, следовательно, ветви параболы направлены вверх.

При $\kappa < \kappa_1$; $\left(\frac{1}{\kappa_1} - \frac{1}{\kappa^2}\right) < 0$ тогда ветви параболы направлены вниз.

Обратимся вновь к фиг. 3. Повернем ось гиперболы $X_1X_1$ на 15° против часовой стрелки, тогда она займет горизонтальное положение. Пересечем поверхности цилиндра горизонтально-проектирующей плоскостью, проходящей через ось $X_1X_1$, тогда на вертикальной плоскости проекций получим два эллипса, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Малые полуоси эллипсов равны радиусу поверхностей цилиндров, а большая полуось нижнего эллипса больше большой полуоси верхнего эллипса. Увеличивая величину радиуса цилиндров, получим два семейства подобных эллипсов. Как было доказано выше, геометрическое место точек пересечения соответственных эллипсов есть парабола, ветви которой направлены вверх.

Аналогично докажем, что сечение горизонтально-проектирующей плоскостью, проходящей через ось $Y_1Y_1$, даст параболу, ветви которой направлены вниз.

В заключение можно сказать, что и в этом случае, когда угол между скрещивающимися прямыми не равен 90°, геометрическим местом равноудаленных от них точек будет гиперболический параболоид.

В дальнейшем докажем все выведенные положения методом аналитической геометрии.

## Аналитическое доказательство рассматриваемого геометрического места точек

Рассмотрим случай, когда угол между скрещивающимися прямыми равен прямому и одна из прямых $MM_1$ перпендикулярна плоскости $V$, а другая $KK_1$ ей параллельна (фиг. 6).

Для удобства на чертеже даны только вертикальные проекции прямых $MM_1$ и $KK_1$. Расстояние между прямыми равно $2a$.

Геометрическое место точек, равноудаленных от одной прямой, есть поверхность цилиндра, осью которого является данная прямая. Напишем уравнения цилиндров, осями которых являются данные прямые:

1. $x^2 + (z - a)^2 = R^2$ уравнение цилиндра с осью $MM_1$.
2. $y^2 + (z + a)^2 = R^2$ уравнение цилиндра с осью $KK_1$.

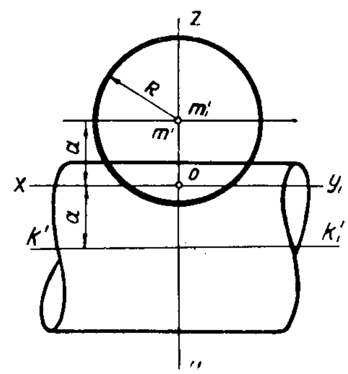
Точки, равноудаленные от прямых $MM_1$ и $KK_1$ на расстояние $R$, должны удовлетворять первому и второму уравнениям. Чтобы получить геометрическое место точек, равноудаленных от данных прямых, необходимо, чтобы радиус принимал все значения от $a$ до бесконечности. Для этого необходимо из уравнений 1 и 2 исключить радиус, тогда получим:

$$x^2 + z^2 - 2az + a^2 = y^2 + z^2 + 2az + a^2,$$

$$x^2 - y^2 = 4az$$

или

$$\frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{2a} = 2z.$$



Фиг. 6.

Получили уравнение поверхности равностороннего гиперболического параболоида.

Выведем уравнение поверхности искомого геометрического места для любого угла между скрещивающимися прямыми. Для этого вначале выведем уравнение поверхности цилиндра, ось которого параллельна плоскости $H$ и составляет угол $\alpha$ с плоскостью $V$.

Нормальные уравнения прямой, проходящей через точку $K(x_1, y_1, z_1)$ и точку $M(x, y, z)$ с текущими координатами, имеют вид

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}.$$

Обозначим точку, принадлежащую направляющей цилиндра, через $m(x, y, z)$ (фиг. 7), а точку с текущими координатами, принадлежащую соответствующей образующей, через $M(X, Y, Z)$ и учитывая, что $\cos\beta = \sin\alpha$, а $\cos\gamma = 0$, то уравнения образующих будут иметь вид:

$$\frac{X - x}{\cos\alpha} = \frac{Y - y}{\sin\alpha} = \frac{Z - z}{0}. \qquad (1)$$

Для получения уравнения направляющей возьмем уравнение сферы в точке $B$

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = R^2 \qquad (2)$$

и пересечем его плоскостью, проходящей через точку $B$ и перпендикулярной прямой $AB$.

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = 0 \qquad (3)$$

Исключив из системы уравнений (1, 2, 3) $x, y, z$ и заменив $X, Y, Z$ на $x, y, z$, получим уравнение искомого цилиндра

$$(x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2 + (z - a)^2 = R^2. \qquad (4)$$

Выведем уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух скрещивающихся прямых $AB$ и $CD$, расположенных под углом $\alpha$. Прямая $AB$ расположена так, как показано на фиг. 7, а прямая $CD$ параллельна оси $OX$ и точка $D$ лежит на оси $OZ$ ниже точки $O$ на величину $a$.

Тогда уравнения цилиндров, выражающих геометрические места точек, равноудаленных от заданных прямых, соответственно будут:

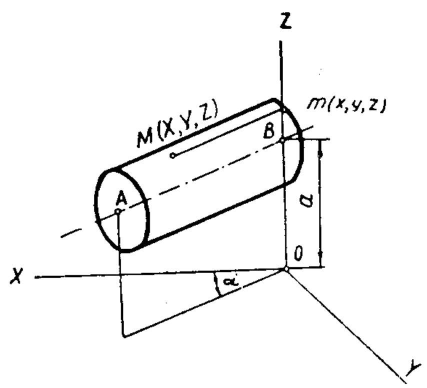
$$\text{для } AB \ldots (x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2 + (z-a)^2 = R^2, \tag{1}$$

$$\text{для } CD \ldots y^2 + (z+a)^2 = R^2. \tag{2}$$

Как и в выше рассматриваемом случае исключим из данных уравнений $R$, тогда получим

$$x^2\sin^2\alpha - y\sin^2\alpha - 2xy\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 4az. \tag{3}$$

Получили уравнение гиперболического параболоида.




Фиг. 7

При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ уравнение (3) принимает вид выведенного выше уравнения, т. е. $\frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{2a} = 2z$.

Приведем уравнение (3) к каноническому виду. Для этого повернем всю систему вокруг оси $OZ$ на угол $\beta$.

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\beta - y'\sin\beta \\ y &= x'\sin\beta + y'\cos\beta \\ z &= z' \end{aligned}\right\} \text{Формула поворота} \tag{4}$$

Подставив формулы (4) в уравнение (3) и приведя необходимые преобразования, получим:

$$x'^2(\sin^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta) -$$

$$- y'^2(\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta - \sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta) -$$

$$- 2(2\sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta + \cos^2\beta\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\beta\sin\alpha\cos\alpha)\,x'y' = 4az. \tag{5}$$

Чтобы привести уравнение (5) к каноническому виду, найдем те значения угла $\beta$, при которых коэффициент при $x'y'$ превращается в нуль. Приравнивая к нулю этот коэффициент, получим два значения для угла $\beta$

$$\beta = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}. \tag{6}$$

При этих значениях угла $\beta$ уравнение (5) примет вид

$$Ax^2 - Ay^2 = az, \tag{7}$$

где $A = \sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta - \sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta - 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\sin\beta\cos\beta$.

Уравнение (7) есть уравнение равностороннего гиперболического параболоида.

При $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $A = 1$. Это будет наибольшее значение коэффициента.

При $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $A < 1$.

В этом случае образующая и направляющая параболы будут более пологи. Чем меньше угол $\alpha$, тем ветви парабол, образующей и направляющей, будут больше приближаться к плоскости $XOY$.

При $\alpha = 0$ уравнение (5) примет вид: $4\,\alpha z = 0$ или $z = 0$.

Получили уравнение плоскости, определяемой осями координат $OX$ и $OY$.

Рассмотрев геометрическое место точек, равноудаленных от двух скрещивающихся прямых, можно говорить о геометрических местах точек, равноудаленных от трех и четырех скрещивающихся прямых. Геометрическим местом точек, равноудаленных от трех скрещивающихся прямых, будет линия, полученная от пересечения поверхностей двух соответствующих гиперболических параболоидов. Линия эта может существовать, но может и не существовать, в зависимости от положения заданных прямых.

Для четырех скрещивающихся прямых можно говорить о наличии точек, равноудаленных от четырех данных прямых. Точки эти могут существовать, но могут и не существовать, в зависимости от положения заданных прямых в пространстве.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Н. А. Попов. Курс начертательной геометрии. 1947.
2. С. М. Колотов. Вспомогательное проектирование. 1956.
3. А. К. Рудаев. Сборник задач по начертательной геометрии. 1948.
4. Н. Ф. Четверухин, В. С. Левицкий, З. И. Прянишникова, А. М. Тевлин, Г. И. Федоров. Курс начертательной геометрии. 1956.
5. О. Н. Цубербиллер. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. 1934.
6. Н. А. Хоменко. Поверхности и линии в пространстве. 1959.

## ИСПРАВЛЕНИЯ И ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

| Стр. | Строки сверху | Строки снизу | Фиг. | Напечатано | Следует читать |
|---|---|---|---|---|---|
| 21 | | | 1 нижн. угол слева | $\varphi_3$ | $\varphi_0$ |
| 23 | | 14 | — | $-48°35'$ (9) | $-48°35'$ |
| 36 | | 1 | — | $f > n$ | $f > h$ |
| 36 | | 15 | — | фиг. 2 | фиг. 1 |
| 42 | | 1 | — | $PACD$ | $PASD$ |
| 42 | | 2 | — | $GL$ | $GT$ |
| 56 | | 19 | — | ТПИ | ГПИ |
| 58 | 24 | — | — | не собственную точку. | несобственную точку. |
| 58 | 28—29 | — | — | (прямого кругового) | прямого кругового |
| 60 | 8 | — | — | $MM$ и $KK$, | $MM_1$ и $KK_1$ |
| 60 | 9 | — | — | $KK$ | $KK_1$ |
| 60 | | 10 | — | $\kappa'\kappa_1'$). | $\kappa'\kappa'_1$. |
| 60 | | 18 | — | вертикальной | фронтальной |
| 61 | | 7 | — | вертикальной | фронтальной |
| 66 | | 6 | — | $\frac{x^2}{R^2\kappa_1^2} =$ | $\frac{x^2}{R^2\kappa_1^2} +$ |
| 68 | 19 | — | — | Формула | Формулы |
| 68 | | 6 | — | $= az$ | $= 4\,az$ |
| 73 | 6 | — | — | $b^{\kappa}(0)$ | $b_{\kappa}(0)$ |
| 76 | — | 7 | — | 2,0 | 1,0 |