ИЗВЕСТИЯ ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 147

1966

СИНТЕЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Г. Д. ДЕЛЬ

(Представлена научным семинаром кафедры сопротивления материалов)

Под экспериментальным определением напряженно-деформированного состояния понимают такое его определение, когда в результате эксперимента устанавливается распределение по объему тела одной или нескольких функций неизвестных напряжений σ_x , τ_{xy} ,... и деформаций ε_x , γ_{xy} ,...:

$$f_n(\sigma_x, \tau_{xy}, ..., \varepsilon_x, \gamma_{xy}, ...) = \psi_n(x, y, z), n = 1, 2, 3...$$
(1)

Для определения напряженно-деформированного состояния, т. е. для расшифровки результатов эксперимента, уравнения (1) решаются совместно с дифференциальными уравнениями равновесия и уравнениями состояния, причем использование последних является менее желательным, так как они получены в предположениях, не всегда подтверждающихся экспериментом.

Наибольшее распространение получили методы, позволяющие определить деформированное, а по нему и напряженное состояние тела (это, прежде всего, метод делительных сеток, метод оптически чувствительных покрытий), и методы, позволяющие экспериментально установить распределение повышенного за счет наклепа предела текучести (метод измерения твердости, метод измерения магнитной проницаемости и т. д.).

При оценке различных методов экспериментального определения напряженного состояния в пластической области, на наш взгляд, следует руководствоваться следующими критериями:

1. Возможность определения в результате эксперимента всех компонент напряженного состояния.

2. Необходимый для расшифровки набор граничных условий.

3. Строгость метода. Имеются в виду допущения, в которых определяется напряженное состояние.

4. Область применения метода.

5. Трудоемкость эксперимента. Сложность и трудоемкость расшифровки.

Метод делительных сеток (как и метод оптически активных покрытий) позволяет определить деформированное состояние; по деформациям определяется интенсивность деформаций ε_i , а по последней в предположении о единой кривой течения—и интенсивность напряжений σ_i . Затем определяются компоненты девиатора напряжений:

$$s_{x} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_{i}}{\varepsilon_{i}} \varepsilon_{x}, \dots$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_{i}}{3\varepsilon_{i}} \gamma_{xy}, \dots$$
(2)

Здесь

$$\boldsymbol{s}_{x} = \boldsymbol{\sigma}_{x} - \boldsymbol{\sigma}, \tag{3}$$

где о — гидростатическое давление. Нормальные напряжения получают, интегрируя дифференциальные уравнения равновесия [1]. Например,

$$\sigma_x = \int \left(-\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dx + \varphi(y, z).$$
(4)

Для определения постоянных интегрирования достаточно знать положение свободного контура. Напряжения σ_y и σ_z определяются из соотношений (3).

При исследовании двухосного напряженного состояния расшифровка значительно упрощается. Определив по (2) компоненты девиатора напряжений, а из уравнения

$$\sigma_z = \sigma + s_z = 0 \tag{5}$$

гидростатическое давление, можно в этом случае определить напряжения σ_x , σ_y непосредственно из (3).

Методом делительных сеток напряженное состояние определяется в следующих предположениях:

1. Кривая течения считается единой.

2. Направления главных напряжений считаются совпадающими с направлениями главных деформаций.

3. Компоненты девиаторов напряжений и деформаций считаются пропорциональными.

4. Материал считается сплошным, однородным и изотропным.

Расшифровку можно выполнить в общем случае.

Значительно ограничивает область применения метода сложность определения деформаций во внутренних областях. Для этой цели часто испытывают составные образцы. Сетку наносят на внутреннюю поверхность. Для того, чтобы связанное с этим нарушение сплошности образца не влияло на напряженное состояние, должны выполняться следующие условия: $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, $\sigma_z \leq 0$ (ось *z* направлена по нормали к поверхности с делительной сеткой). Напряжения σ_z должны уравновешиваться внешними силами.

Расшифровку можно выполнить, не используя соотношения (2). Так, в статьях [2, 3] описан метод определения напряжений на поверхности деформируемого тела и при плоской деформации по известной сетке траекторий главных деформаций (предполагается, что направления главных деформаций и главных напряжений совпадают). При этом отказываются от предположений 1 и 3. Материал может быть неоднородным. Трудоемкость расшифровки при этом увеличивается, необходимый набор граничных условий расширяется.

Ниже речь будет идти о методе делительных сеток. Однако все результаты исследования будут в равной степени относиться и к методу оптически активных покрытий, так как информация о напряженно-деформированном состоянии, получаемая этими методами, является одинаковой.

Метод измерения твердости [4] позволяет определить распределение интенсивности напряжений. Следовательно, уравнения (1) в этом случае имеют вид:

$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) = 2\sigma_l^2(x, y, z).$ (6)

В том, что твердость связана непосредственно с интенсивностью напряжений и уже с точностью предположения о единой кривой течения с интенсивностью деформаций (на что уже указывалось [5]), убеждают результаты, полученные нами в условиях, когда единая связь между σ_i и e_i не наблюдается.

Метод расшифровки результатов измерения твердости разработан применительно к кручению некруглых стержней, плоской и осесимметричной деформации [6]. При исследовании осесимметричной деформации расшифровка выполняется в предложении о равенстве окружного напряжения одному из главных в меридиональных плоскостях.

Расшифровка является трудоемкой и требует знания граничных условий вдоль всего контура. Напряженное состояние определяется в предложениях о сплошности и изотропности материала.

Рассмотрим возможности, возникающие в результате синтеза метода делительных сеток с методом измерения твердости (или любым другим методом, позволяющим определить распределение интенсивности напряжений).

Уже простое сочетание этих методов, когда методом делительных сеток определяется деформированное состояние, а измерением твердости — интенсивность напряжений, позволяет отказаться от предположения о единой кривой течения и однородности материала. Усложнение эксперимента является незначительным — путем испытания на кручение, сжатие или растяжение и параллельного измерения твердости строится тарировочный график "твердость — интенсивность напряжений". Затем в ячейках деформированной сетки измеряется твердость, и из тарировочного графика определяется соответствующая ей интенсивность напряжений. Расшифровка выполняется так же, как и в случае исследования напряженного состояния, методом сеток. Ниже будет приведен пример такого исследования.

Рассмотрим методику определения напряженного состояния при известном поле главных направлений (определяемом методом сеток) и известном распределении интенсивности напряжений, устанавливаемом измерением твердости.

Напряженное состояние при этом определяется в следующих предположениях:

1. Направления главных напряжений считаются совпадающими с направлениями главных деформаций.

2. Материал считается сплошным и изотропным. Как будет показано, в ряде практически важных случаев расшифровка упрощается. Для ее выполнения достаточно знать положение свободного контура.

Таким образом, синтез указанных методов делает расшифровку более строгой по сравнению с методом делительных сеток при ис-

пользовании соотношений (2) и менее трудоемкой по сравнению с тем же методом без использования соотношений (2) и методом измерения твердости.

Плоское напряженное состояние. Уравнение (6) в этом случае принимает вид:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 6\tau_{xy}^2 = 2\sigma_i^2 (x, y).$$
(7)

Методом сеток получаем главные направления:

$$\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x} = \operatorname{tg} 2\vartheta (x, y), \tag{8}$$

где ϑ — угол наклона касательной к траектории главного из напряжений σ_1 , отсчитываемый в положительном направлении от оси *х*.

Для расшифровки привлекаем дифференциальные уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$
 (9)

По соотношениям, справедливым для любого симметричного тензора:

$$\sigma_{x} = \frac{\sigma_{1} + \sigma_{2}}{2} + \frac{\sigma_{1} - \sigma_{2}}{2} \cos 2\vartheta,$$

$$\sigma_{y} = \frac{\sigma_{1} + \sigma_{2}}{2} - \frac{\sigma_{1} - \sigma_{2}}{2} \cos 2\vartheta,$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_{1} - \sigma_{2}}{2} \sin 2\vartheta,$$
(10)

перейдем к новым переменным — главным напряжениям σ_1 и σ_2 . Затем, положив $\vartheta = 0$, перейдем к локальной системе координат, образованной касательными к траекториям главных напряжений. Направление траекторий σ_1 , σ_2 фиксируется таким образом, чтобы они образовывали правую систему координат. Через σ_1 может быть обозначено любое из главных напряжений.

Уравнение (8) отождествляется, а (7) и (9) принимает следующую форму:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_i^2, \tag{11}$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} + (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\partial \vartheta}{\partial s_2} = 0, \qquad (12)$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} + (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\partial \vartheta}{\partial s_1} = 0.$$
(13)

 ∂s_2 ∂s_1 Здесь $\frac{\partial}{\partial s_1}$, $\frac{\partial}{\partial s_2}$ — производные вдоль траекторий σ_1 , σ_2 .

Рассмотрим методику определения главных напряжений вдоль траектории σ_1 . Пусть на границе L (рис. 1) заданы σ_1 и σ_2 (если L — свободная граница, главное напряжение, нормальное к контуру, равно нулю, второе напряжение равно $\pm \sigma_i$). Разобьем траекторию σ_1 на ряд достаточно малых отрезков длиной Δs_1 . Через концы этих отрезков проведем траектории σ_2 и отложим вдоль них по обе стороны от траектории σ_1 отрезки длиной Δs_2 .

26

В точке 1 согласно (12)

$$\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1}\right)_1 = -\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)_1 \frac{\vartheta_{11} - \vartheta_{21}}{2\Delta s_2}.$$
 (14)

В точке 2

$$(\sigma_1)_2 = (\sigma_1)_1 + \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1}\right)_1 \Delta s_1, \tag{15}$$

$$(\sigma_2)_2 = \frac{(\sigma_1)_2 \pm (\sigma_1)_2 \pm \sqrt{4(\sigma_i)_2^2 - 3(\sigma_1)_2^2}}{2}.$$
 (16)

Запишем уравнение (12) для точки 2 в конечных разностях:

$$\frac{(\sigma_1)_3 - (\sigma_1)_1}{2\Delta s_1} + (\sigma_1 - \sigma_2)_2 \frac{\vartheta_{12} - \vartheta_{22}}{2\Delta s_2} = 0.$$
(17)

Отсюда имеем

$$(\sigma_1)_3 = (\sigma_1)_1 - (\sigma_1 - \sigma_2)_2 (k_1)_2,$$
 (18)

где

$$(k_1)_2 = (\vartheta_{12} - \vartheta_{22}) \frac{\Delta s_1}{\Delta s_2} . \tag{19}$$

Напряжение σ₂ в точке 3 находим по формуле, аналогичной (16). Главные напряжения для последую-



щих точек определяем так же, как и для точки 3, т. е. по формулам

$$\sigma_{1})_{n+1} = (\sigma_{1})_{n-1} - (\sigma_{1} - \sigma_{2})_{n} (k_{1})_{n},$$

$$(\sigma_{2})_{n+1} = \frac{(\sigma_{1})_{n+1} \pm \sqrt{4 (\sigma_{i})_{n+1}^{2} - 3 (\sigma_{1})_{n+1}^{2}}}{2},$$
(20)

где

$$(k_1)_n = \left(\vartheta_{1n} - \vartheta_{2n}\right) \frac{\Delta s_1}{\Delta s_2} \,. \tag{21}$$

Знак перед радикалом следует выбирать таким образом, чтобы не возникал разрыв напряжений. Если это условие выполняется при различных знаках (когда $\sigma_2 \approx \frac{\sigma_1}{2}$), то для выбора решения требует-

ся знание дополнительных условий.

(o1

Вдоль траектории σ₂ главные напряжения определяются аналогично:

$$(\sigma_{2})_{l+1} = (\sigma_{2})_{l-1} - (\sigma_{1} - \sigma_{2})_{l} (k_{2})_{l},$$

$$(22)$$

$$)_{l+1} = \frac{(\sigma_{2})_{l+1} \pm \sqrt{4(\sigma_{i})_{l+1} - 3(\sigma_{2})_{l+1}^{2}}}{2},$$

где

$$(k_2)_l = (\vartheta_{3l} - \vartheta_{4l}) \frac{\Delta s_2}{\Delta s_1}, \qquad (23)$$

Зная величину σ_1 и σ_2 , можно определить по (10) напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} .

Для уменьшения погрешности определения k_1 и k_2 расшифровку следует начинать с построения графика изменения этих величин вдоль траекторий главных напряжений.

Так как оси симметрии являются траекториями главных напряжений, предлагаемая методика особенно удобна для определения напряженного состояния вдоль этих осей.

Плоская деформация. Напряженное состояние при плоской деформации характеризуется напряжениями σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} (ось *z* совпадает с направлением, в котором деформация равна нулю). Из условия несжимаемости следует [7]

$$\sigma_z = \frac{1}{2} \left(\sigma_x + \sigma_y \right). \tag{24}$$

При плоской деформации максимальное касательное напряжение пропорционально интенсивности напряжений:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_i \tag{25}$$

и поэтому может быть установлено измерением твердости. Кроме того, известны направления главных напряжений, устанавливаемые методом делительных сеток. Следовательно, для определения напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} располагаем такой же информацией, как и при исследовании плоского напряженного состояния в упругой области поляризационно-оптическим методом. Уравнения равновесия в этих двух случаях совпадают. Поэтому при расшифровке результатов эксперимента в рассматриваемом случае можно воспользоваться всеми приемами, разработанными применительно к методу фотоупругости.

Рассмотрим методику определения напряженного состояния вдоль осей симметрии. При плоской деформации

$$\tau_{\max} = \sigma_1 - \sigma_2, \tag{26}$$

где σ_1 и σ_2 — главные напряжения в плоскости деформации, причем $\sigma_1 > \sigma_2$. Поэтому из уравнений (12) и (13), справедливых и для плоской деформации, следуют соотношения вдоль траектории σ_1 :

$$\sigma_{1} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \int \sigma_{i} \frac{\partial \vartheta}{\partial s_{2}} ds_{1} + \varphi_{1} (s_{2}),$$

$$\sigma_{2} = \sigma_{1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{i},$$
(27)

и вдоль траектории o2:

$$\sigma_{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \int \sigma_{i} \frac{\partial \vartheta}{\partial s_{1}} ds_{2} + \varphi_{2}(s_{1}),$$

$$\sigma_{1} = \sigma_{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{i}.$$
(28)

Постоянные интегрирования определяются по граничным условиям. Используя соотношения (27) и (28), можно определить напряженное состояние в исследуемой области, но более всего они удобны для определения напряжений вдоль осей симметрии. Пусть АВ (рис. 2) является отрезком оси симметрии, по которой действует напряжение σ_1 . Построим вдоль него кривую

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial s_2}\right)_n = \frac{\vartheta_{1n} - \vartheta_{2n}}{2\Delta s_2},\tag{29}$$

затем построим график $\sigma_i \frac{\partial \vartheta}{\partial s_2}$. Напряжения в точке *B* определятся по соотношениям

$$(\sigma_1)_B = (\sigma_1)_A - \frac{1}{\sqrt{3}} \int_A^B \sigma_i \frac{\partial \vartheta}{\partial s_2} ds_1,$$

$$(\sigma_2)_B = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_i)_B - (\sigma_1)_B.$$

Величину интеграла можно определить графически, как площадь, заключенную под кривой $\sigma_i \frac{\partial \vartheta}{\partial s_2}$ между точками А и В.

Пример. По разработанной методике определено напряженное состояние при растяжении полосы с круговыми надрезами (рис. 3). На поверхность пластины, изготовленной из стали X13, до деформации была накатана делительная сетка из системы окружностей с ба-

зой в 1 мм. Затем полоса была растянута до интенсивности деформации в сечении $y = 0 \varepsilon_i \approx$ $\approx 0,35$. После деформации на инструментальном микроскопе был измерен угол наклона больших осей эллипсов в сечениях $y = \pm 2,5$ мм. Результаты измерения были графически усреднены. Затем вдоль оси *х* была измерена твердость. Она оказалась постоянной, что свидетельствует о

12

DS1



Рис. 2

22



8

60

30

18

30

Gu

G. KZ/MM2

постоянстве σ_i вдоль этой оси. Напряжения определялись по формулам (20).

Параллельно выполнялась расшифровка с использованием соотношений (2). Для этого вдоль линий $y = \pm 2,5$ мм были построены эпюры касательных напряжений, определяемых по формулам (2), в которых

$$\gamma_{xy} = \operatorname{tg} \vartheta. \tag{30}$$

Затем вдоль оси x был построен график изменения $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$. Напряже-

x

ния о, определялись графическим интегрированием по формулам

$$(\sigma_x)_B = (\sigma_x)_A - \int_A^B \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dx.$$

Напряжения σ_v определялись по известной σ_i . Эпюры напряжений, полученные этими методами, практически совпали.

Как уже указывалось, вдоль оси х о; была постоянной. Однако это еще не является достаточным условием для применения в рассматриваемом случае аппарата теории идеально пластических тел, так как вдоль оси у наблюдалось интенсивное изменение о;. Тем не менее, полученные результаты находятся в хорошем соответствии с результатами, полученными аналитически для неупрочняющегося материала [7].

В заключение укажем на следующее обстоятельство. Часто исследования методом делительных сеток и оптическим методом выполняются на малоупрочняющихся материалах (например, на свинце). В этом случае можно положить $\sigma_i = \text{const}$ во всей пластической области. Это дает возможность применять предлагаемую методику расшифровки без измерения твердости. Значительно упрощается методика и при исследовании плоского напряженного состояния с осевой симметрией. В этом случае известны направления главных напряжений одно из них совпадает с радиальным, другое — с окружным направлением.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Поздеев, В. И. Тарновский. Известия высших учебных заведений, Черная металлургия, № 11, 1962.

2. А. Е. Александров, М. Х. Ахметзянов, ПМТФ, № 6, 1961. 3. П. И. Полухин, В. К. Воронцов. Известия высших учебных заведений. Черная металлургия, № 11, 1962. 4. Г. А. Смирнов-Аляев. Сопротивление материалов пластическому дефор-

мированию, Машгиз, 1961.

5. А. М. Розенберг, А. Н. Еремин. Элементы теории процесса резания металлов, Машгиз, 1956. 6. Г. Д. Дель. Известия ТПИ, т. 138, № 1, 1965.

7. Л. М. Качанов. Основы теории пластичности, ГИТТЛ, 1956.