УДК 621.372.4:537.52

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ВОЗДЕЙСТВУЮЩЕГО ИМПУЛЬСА ОЗОНАТОРА

Ю.Н. Исаев, В.А. Колчанова, О.П. Шпильная, Е.О. Кулешова

Томский политехнический университет
E-mail: Isaev_Yusup@mail.ru

Показана возможность определения оптимального вида входного напряжения для электротехнических схем замещения первого и второго порядков барьерного разряда. Представлен алгоритм определения оптимальной формы воздействующего импульса напряжения, обуславливающего потребление минимальной энергии электротехническими элементами схемы замещения озонатора.

В системах газо- и водоочистки большой интерес представляет использование импульсного барьерного разряда. Успешно осуществляемая в данном разряде реакция образования озона является одним из немногих плазмохимических процессов, реализованных в промышленном масштабе, причем мощности озонаторных установок непрерывно растут. Этот тип разряда характеризуется, с одной стороны, сравнительно высокой средней энергией электронов 4...5 эВ и с другой – низкой температурой газа, которая близка к температуре электродов. При этом энергия, вложенная в разряд, выделяется в короткоживущих малоинтенсивных искрах – микроразрядах. Сочетание всех этих условий делает барьерный разряд эффективным для осуществления реакций конденсации: и действительно, кроме уже упомянутого процесса образования озона в нем можно проводить многие десятки органических и неорганических синтезов.

При феноменологическом описании электрических разрядов наибольшим успехом пользуется их описание как объектов электрической цепи [1–4]. В основе таких подходов лежит замена электрического разряда некой эквивалентной схемой замещения, состоящей из стандартных электротехнических элементов. Особенности протекания физических процессов определяются формой воздействующего напряжения. В ряде случаев эффективнее оказывается использование импульсного напряжения питания.

На рис. 1 приведена электротехническая схема замещения первого порядка для барьерного разряда, предложенная авторами [2]. Суть данной работы заключается в том, что бы выбрать такую форму воздействующего напряжения, при котором входной генератор выделял (затрачивал) бы наименьшую энергию для достижения заданного значения напряжения на конденсаторе в фиксированный момент времени. Рассмотрим решение такой задачи для схемы, представленной на рис. 1.

Для решения поставленной вариационной задачи [5, 6] необходимо определить переходную функцию по напряжению – $h(t)$, связывающую входное напряжение $u(t)$ с напряжением на конденсаторе $u_c(t)$.

Переходная функция – реакция цепи на единичное воздействие, поэтому, считая, что входное напряжение равняется единице, получаем:

$$h(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}. \qquad (1)$$

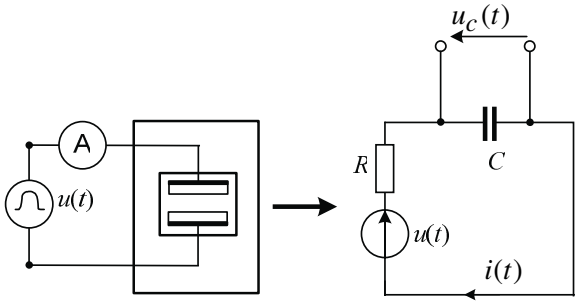

Рис. 1. *Электротехническая схема замещения первого порядка разрядного промежутка озонатора*

Используя интеграл Дюамеля, можно записать напряжение на конденсаторе с учетом импульса воздействующего напряжения и полученной переходной функции (1):

$$u_c(t) = \int_0^t \frac{dh(t-\tau)}{d\tau} u(\tau) d\tau = \frac{1}{RC}\int_0^t u(\tau) e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} d\tau. \qquad (2)$$

По условию задачи необходимо минимизировать функционал энергии генератора:

$$u_c(t) = \int_0^t \frac{dh(t-\tau)}{d\tau} u(\tau) d\tau = \frac{1}{RC}\int_0^t u(\tau) e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} d\tau. \qquad (3)$$

при $t=T$ и дополнительном условии выполнения (2).

Для вариации функционала необходимо выразить ток в цепи $i(t)$, через входное напряжения $u(t)$ и напряжение на конденсаторе $u_c(t)$:

$$i(t) = \frac{u(t) - u_c(t)}{R} \qquad (4)$$

и, подставляя полученное соотношение (4) в выражение (3), с учетом(2) получаем:

$$W = \int_0^T i(t)u(t)dt = \frac{1}{R}\int_0^T (u(t) - u_c(t))u(t)dt =$$

$$= \frac{1}{R}\int_0^T \left(u(t) - \frac{1}{RC}\int_0^t u(\tau) e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} d\tau \right) u(t)dt =$$

$$= \frac{1}{R}\int_0^T u^2(t)dt - \frac{1}{R^2C}\int_0^T \int_0^t u(\tau) e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} d\tau u(t)dt. \qquad (5)$$

Теперь можно осуществить условную минимизацию функционала (5) с дополнительным условием (2), которую формально можно записать так [5]:

$$L = W + \lambda \cdot u_c, \quad \delta L = 0,$$

или с учётом фильтрующих свойств дельта-функции

$$\delta(x-t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq x; \\ \infty & \text{при } t = x \end{cases}$$

и свойств функциональных производных [5]:

$$\frac{\delta f(\varphi(x))}{\delta\varphi(t)} = \frac{\partial f(\varphi(x))}{\partial\varphi}\frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(t)}; \quad \frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(t)} = \delta(x-t),$$

можно записать в развёрнутом виде:

$$\delta L = \frac{1}{R}\int_0^T \frac{\partial u^2(t)}{\partial u}\delta(t-\tau)dt -$$

$$-\frac{1}{R^2C}\int_0^T dt\int_0^t \frac{\partial u(t)}{\partial u}u(\tau)\delta(t-\tau)e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)}d\tau +$$

$$-\frac{1}{R^2C}\int_0^T dt\int_0^t \frac{\partial u(\tau)}{\partial u}u(t)\delta(t-\tau)e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)}d\tau +$$

$$+\frac{\lambda}{RC}\int_0^T \frac{\partial u(\tau)}{\partial u}\delta(t-\tau)e^{-\frac{1}{RC}(T-\tau)}d\tau = 0. \qquad (6)$$

После простых преобразований получаем, (пояснения приводятся на рис. 2):

$$\int_0^T dt\int_0^t d\tau \to \int_0^T d\tau\int_\tau^T dt = \int_0^T dt\int_t^T d\tau$$

$$\delta L = \frac{2u(t)}{R} - \frac{1}{R^2C}\int_0^t d\tau\, u(\tau)e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} -$$

$$-\frac{1}{R^2C}\int_t^T d\tau\, u(\tau)e^{\frac{1}{RC}(t-\tau)} + \frac{\lambda}{RC}e^{-\frac{1}{RC}(T-t)} =$$

$$= \frac{2u(t)}{R} - \frac{1}{R^2C}\int_0^T d\tau\, u(\tau)e^{-\frac{1}{RC}|t-\tau|} +$$

$$+\frac{\lambda}{RC}e^{-\frac{1}{RC}(T-t)} = 0. \qquad (7)$$

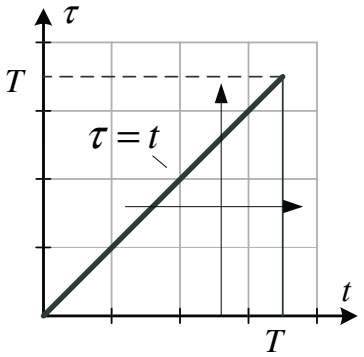

Рис. 2. *Расстановка пределов интегрирования в кратном интеграле*

Таким образом, мы получили интегральное уравнение Фредгольма второго рода, относительно неизвестной функции $u(t)$ – входного напряжения:

$$u(t) - \frac{1}{2RC}\int_0^T d\tau\, u(\tau)e^{-\frac{1}{RC}|t-\tau|} = -\frac{\lambda}{2C}e^{-\frac{1}{RC}(T-t)}. \qquad (8)$$

Осуществляя алгебраизацию ур. (8), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно искомой функции входного напряжения $u(t)$

$$\Delta t\sum_{s=0}^{N} g_{k,s}\cdot u_s + u_k = -\lambda\cdot h_k, \qquad (9)$$

где

$$h_k = \frac{1}{2C}e^{-\frac{1}{RC}(T-t_k)}; \quad g_k = \frac{-1}{2RC}e^{-\frac{1}{RC}|t_k|};$$

$$g_{k,s} = g(|t_k - t_s|); \quad \Delta t = \frac{T}{N}$$

– шаг дискретизации; $s, p \in 0..N$; N – число точек дискретизации временного интервала. Запишем решение уравнения (9) в матричной форме, введя обозначения, $\mathbf{E}=\{1\}$ – единичная матрица, $\mathbf{G}=\{g_{k,s}\}$ – матрица проводимости, $\mathbf{L}=\{-\lambda\cdot h_k\}$ – матрица, образованная правой частью уравнения (9):

$$\mathbf{K} = \mathbf{G} + \frac{\mathbf{E}}{\Delta t}, \quad \to \quad \mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1}\cdot\mathbf{L}.$$

На рис. 3 приведён результат восстановления фронта импульса входного напряжения для модельных параметров схемы R=10 Ом; C=40 мкФ и длительности импульса T=1 мкс.

На рис. 4 представлены расчетные графики энергий для трёх разных форм импульсов входного напряжения (рис. 4, *а*, *б*). Сплошной линией показано входное напряжение – оптимальной расчётной формы и соответствующая ему затраченная энергия генератора, пунктиром и штрих-пунктиром изображены неоптимальные импульсы входного напряжения и соответствующие им энергии. На графике видно, что энергия, выделяемая при оптимальной форме воздействующего напряжения, имеет меньшее значение по сравнению с энергиями, полученными в результате воздействия других импульсов.

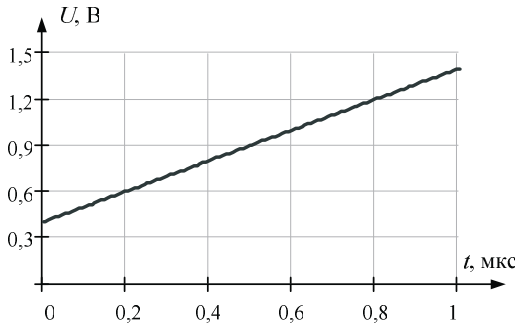

Рис. 3. *Оптимальная форма импульса входного напряжения, полученная в результате расчёта*

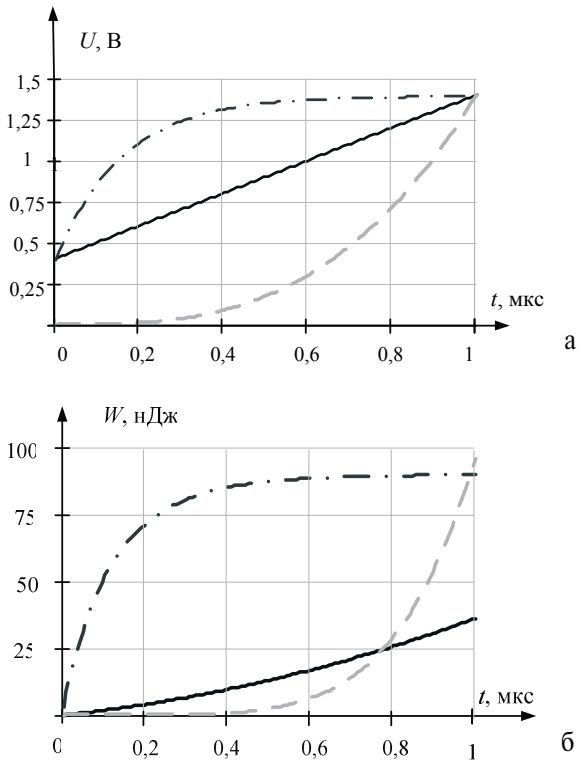

Рис. 4. *Различные формы модельных импульсов входного напряжения и соответствующее им распределение энергии*

В ряде случаев необходимо учесть влияние проводимости межэлектродной субстанции (1/R2 на рис. 5), например, в цепи второго порядка. Рассмотрим алгоритм определения оптимальной формы воздействующего импульса, обуславливающей потребление минимальной энергии электротехническими элементами схемы замещения озонатора – цепи второго порядка на примере модельной задачи. Выберем в качестве величин цепи параметры: $C1=5\cdot10^{-11}$ Ф, $C2=4\cdot10^{-10}$ Ф, $R1=15$ Ом, $R2=15$ Ом.

Схема замещения барьерного разряда представлена на рис. 5, где $C1$ – ёмкость барьеров, ёмкость воздушной среды с вкрапленными каплями воды – $C2$, сопротивление схемы – $R1$, сопротивление межэлектродной субстанции – $R2$.

Для решения поставленной вариационной задачи, как было показано выше, определим переходную функцию по напряжению – $h(t)$, связывающую входное напряжение $u(t)$ с напряжением на конденсаторе $u_{C2}(t)$ для схемы, изображённой на рис. 5.

Считая, что входное напряжение равняется единице, получаем:

$$h(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \qquad (10)$$

где

$$p_{1,2} = \frac{1}{2\cdot R1\cdot C1\cdot R2\cdot C2}\times$$

$$\times\left[\begin{array}{l} -R2\cdot(C2+C1) - R1\times \\ \times C1 \pm \sqrt{\begin{array}{l} R2^2 C2(C2+2C1+C1^2)+ \\ +R1\cdot C1(C1\cdot R1 - 2\cdot R2\cdot C2 + 2\cdot C1\cdot R2 \end{array}} \end{array}\right]$$

– корни характеристического уравнения, A_1, A_2 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий по системе уравнений

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0; \\ A_1 p_1 + A_2 p_2 = \dfrac{1}{R1\cdot C2}; \end{cases} \quad A_1 = -A_2 = \frac{1}{(p_1 - p_2)R1\cdot C2}.$$

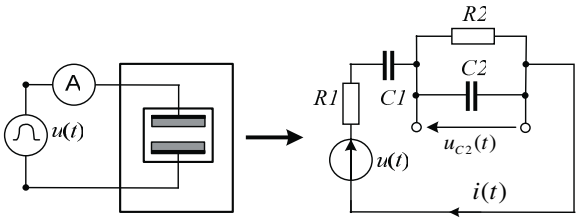

Рис. 5. *Схема замещения барьерного разряда – цепь второго порядка*

Используя интеграл Дюамеля, можно записать напряжение на конденсаторе с учетом импульса воздействующего напряжения и полученной переходной функции (10):

$$u_{C2}(t) = \int_0^t \frac{dh(t-\tau)}{d\tau} u(\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^t u(\tau)(p_1 A_1 e^{p_1(t-\tau)} + p_2 A_2 e^{p_2(t-\tau)})d\tau,$$

$$H(t-\tau) = p_1 A_1 e^{p_1(t-\tau)} + p_2 A_2 e^{p_2(t-\tau)}, \qquad (11)$$

$$u_{C2}(t) = \int_0^t u(\tau)H(t-\tau)d\tau.$$

По условию задачи необходимо минимизировать функционал энергии генератора:

$$W(t) = \int_0^t i(t)u(t)dt, \qquad (12)$$

при $t=T$ и дополнительном условии выполнения (11).

Для вариации функционала необходимо выразить ток в цепи $i(t)$ через входное напряжение $u(t)$ и напряжение на конденсаторе $u_{C2}(t)$:

$$i(t) = i_{R2}(t) + i_{C2}(t) = \frac{u_{C2}(t)}{R_2} + C2\frac{du_{C2}(t)}{dt}.$$

Подставляя полученное соотношение в выражение (12), с учетом (11) получаем:

$$W = \int_0^T i(t)u(t)dt = \int_0^T \left(\frac{u_{C2}(t)}{R_2} + C2\frac{du_{C2}(t)}{dt}\right)u(t)dt =$$

$$= \frac{1}{R_2}\int_0^T u_{C2}(t)u(t)dt + C2\int_0^T \frac{du_{C2}(t)}{dt}u(t)dt =$$

$$= \frac{1}{R_2}\int_0^T u(t)dt\int_0^t u(\tau)H(t-\tau)d\tau +$$

$$+C2\int_0^T u(t)dt\frac{d}{dt}\left(\int_0^t u(\tau)H(t-\tau)d\tau\right). \qquad (13)$$

Теперь можно осуществить условную минимизацию функционала (13) с дополнительным условием (11), которую формально можно записать так:

$$L = W + \lambda \cdot u_c, \quad \delta L = 0,$$

$$L = \frac{1}{R_2}\int_0^T u(t)dt\int_0^t u(\tau)H(t-\tau)d\tau +$$

$$+C2\int_0^T u(t)dt\frac{d}{dt}\left(\int_0^t u(\tau)H(t-\tau)d\tau\right) +$$

$$+\lambda\int_0^t u(\tau)H(t-\tau)d\tau = 0.$$

С учётом изложенного ранее, можно записать:

$$\frac{\delta}{\delta u}\left[\frac{1}{R_2}\int_0^T dt\,u(t)\int_0^t u(\tau)H(t-\tau)d\tau\right] =$$

$$= \frac{1}{R_2}\int_0^T d\tau\; u(\tau)H(|t-\tau|); \qquad (14)$$

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(\lambda\int_0^t u(\tau)H(t-\tau)d\tau\right) = \lambda \cdot H(T-t). \qquad (15)$$

Выразим в виде суммы двух слагаемых:

$$H_1(t-\tau) = p_1 A_1 e^{p_1(t-\tau)} + p_2 A_2 e^{p_2(t-\tau)} =$$

$$= H_1(t-\tau) + H_2(t-\tau);$$

$$H_1(t-\tau) = e^{p_1 t}H_1(-\tau);\; H_2(t-\tau) = e^{p_2 t}H_2(-\tau),$$

тогда

$$C2\int_0^T u(t)dt\frac{d}{dt}\left(\int_0^t u(\tau)H(t-\tau)d\tau\right) = C2A_1p_1\int_0^T u^2(t)dt +$$

$$+C2p_1\int_0^T u(t)dt\int_0^t u(\tau)d\tau\, H_1(t-\tau) +$$

$$+C2A_2p_2\int_0^T u^2(t)dt + C2p_2\int_0^T u(t)dt\int_0^t u(\tau)d\tau\, H_2(t-\tau).$$

Как было показано выше в (6–8)

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(C2A_1p_1\int_0^T u^2(t)dt\right) = C2A_1p_1 2u(t); \qquad (16)$$

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(C2A_2p_2\int_0^T u^2(t)dt\right) = C2A_2p_2 2u(t). \qquad (17)$$

По аналогии с (14):

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(C2p_1\int_0^T u(t)dt\int_0^t u(\tau)d\tau\, H_1(t-\tau)\right) =$$

$$= C2p_1\int_0^T d\tau\; u(\tau)H_1(|t-\tau|); \qquad (18)$$

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(C2p_2\int_0^T u(t)dt\int_0^t u(\tau)d\tau\, H_2(t-\tau)\right) =$$

$$= C2p_2\int_0^T d\tau\; u(\tau)H_2(|t-\tau|). \qquad (19)$$

Тогда результирующее выражение для минимизируемого функционала с учётом (14–19)

$$\delta L = \frac{1}{R_2}\int_0^T d\tau\; u(\tau)H(|t-\tau|) + 2\cdot C2(A_1p_1 + A_2p_2)u(t) +$$

$$+C2p_1\int_0^T d\tau\; u(\tau)H_1(|t-\tau|) +$$

$$+C2p_2\int_0^T d\tau\; u(\tau)H_2(|t-\tau|) + \lambda \cdot H(T-t) = 0.$$

Это интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно переходной проводимости неизвестной функции входного напряжения $u(t)$:

$$2\cdot C2\cdot(A_1p_1 + A_2p_2)\cdot u(t) + \frac{1}{R_2}\int_0^T d\tau\; u(\tau)H(|t-\tau|) +$$

$$+C2\cdot p_1\int_0^T d\tau\; u(\tau)H_1(|t-\tau|) +$$

$$+C2\cdot p_2\int_0^T d\tau\; u(\tau)H_2(|t-\tau|) = -\lambda \cdot H(T-t). \qquad (20)$$

Осуществляя алгебраизацию уравнения (20), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно $u(t)$

$$\Delta t\sum_{s=0}^{N} g_{k,s}\cdot u_s + M\cdot u_k = -\lambda\cdot h_k, \qquad (21)$$

где

$$M = 2\cdot C2(A_1p_1 + A_2p_2); \quad h_k = H(T-t_k);$$

$$g_k = \frac{1}{R2}H(|t_k|) + C2p_1H1(|t_k|) + C2p_2H2(|t_k|);$$

$$g_{k,s} = g(t_k - t_s); \quad \Delta t = T/N$$

– шаг дискретизации; $s,p\in 0..N$; N – число точек дискретизации временного интервала. Запишем решение уравнение (20) в матричной форме, введя обозначения, $\mathbf{E}=\{1\}$ – единичная матрица, $\mathbf{G}=\{g_{k,s}\}$ – матрица проводимости, $\mathbf{L}=\{-\lambda\cdot h_k\}$ – матрица, образованная правой частью уравнения (21):

$$\mathbf{K} = \mathbf{G} + \frac{M}{\Delta t}\mathbf{E}, \;\rightarrow\; \mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1}\cdot\mathbf{L}.$$

Таким образом, представленный авторами алгоритм может быть использован для оптимизации работы озонатора. Энергия, выделяемая генератором озонатора при оптимальной форме воздействующего напряжения, имеет меньшее значение по сравнению с энергией, полученной в результате воздействия импульса неоптимальной формы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самойлович В.И., Гибалов К.В., Козлов В.К. Физическая химия барьерного разряда. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1989. – 176 с.
2. Исаев Ю.Н., Колчанова В.А., Хохлова Т.Е. Определение параметров двухполюсника при воздействии импульсного напряжения // Электричество. – 2003. – № 11. – С. 64–67.
3. Лунин В.В., Попович М.П., Ткаченко С.Н. Физическая химия озона. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1998. – 198 с.
4. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. – М.: Наука, 1992. – 535 с.
5. Райзер Ю.П. Высокочастотный емкостный разряд. Физика. Техника эксперимента. Приложения. – М.: Изд-во МФТИ: Наука: Физматлит, 1995. – 320 с.
6. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
7. Карташев А.П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. – М.: Наука, 1976. – 255 с.

УДК 621.372.4:537.52

ТОМОГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДА И ЕМКОСТЕЙ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОДОВ НЕКАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Ю.Н. Исаев, О.П. Шпильная, Е.О. Кулешова

Томский политехнический университет
E-mail: Isaev_Yusup@mail.ru

Предлагается использовать метод реконструктивной томографии для расчета распределения зарядов и емкостей плоских проводников неканонической формы. Приводятся примеры восстановления распределения зарядов и ёмкостей на модельных задачах. Сравниваются результаты известных расчетов ёмкостей с томографическим подходом.

В реальных электротехнических устройствах происходят сложные процессы, связанные с накоплением, перераспределением энергии, протеканием токов смещения, проводимости. Поэтому при проектировании линий электропередач, кабелей, различных электрических и радиотехнических устройств возникает необходимость расчета электрической емкости.

Известно, что емкость зависит только от геометрических параметров проводников и диэлектрической проницаемости окружающей среды. В научно-технической литературе достаточно подробно рассмотрены основные методы расчета емкости для проводников канонической формы, существует справочная литература по расчету емкостей [1], содержащая примеры расчета, готовые формулы, таблицы, численные результаты для проводников канонической формы. Для проводников более сложной формы в работах [1–3] применяют специальные методы, дающие приближенные результаты.

Как альтернативу существующим методам расчета емкостей плоских проводников авторы предлагают метод компьютерной томографии, претендующий на высокую точность расчетов даже для проводников сколь угодно сложной конфигурации.

Идея компьютерной томографии состоит в восстановлении (реконструкции) функции двух переменных $\sigma(x,y)$ (распределения заряда) по их интегральным характеристикам – проекциям $P(x,y)$, полученным в результате измерений вне объекта [4–6].

$$P(p,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x,y)\cdot\delta(p-y\cdot\cos(\theta)+x\cdot\sin(\theta))\,dxdy, \quad (1)$$

где $\delta(x,y)$ – фильтрующая дельта-функция Дирака.

Решив ур. (1) относительно $\sigma(x,y)$, получаем формулу, позволяющую восстанавливать распределения зарядов по проекциям:

$$\sigma(x,y) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dp\cdot\frac{\partial P(\theta,p)/\partial p}{p-y\cdot\cos(\theta)+x\cdot\sin(\theta)}. \quad (2)$$

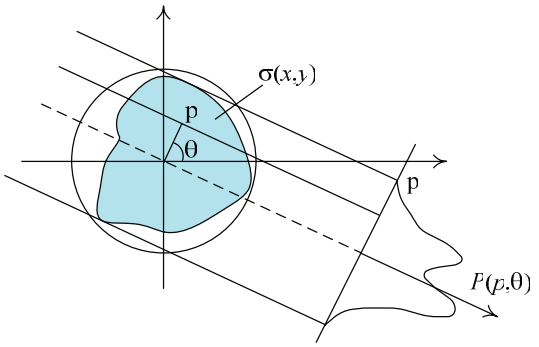

Рис. 1. *Получение проекции $P(p,\theta)$ при фиксированных значениях p и θ для распределения зарядов $\sigma(x,y)$ на поверхности проводника*

Интеграл (2) существует в смысле главного значения [4, 6]. Смысл переменных в формулах (1) и (2) ясен из рис. 1. В электростатическом поле потенциал $U(x,y)$ проводника в любой его точке одинаков, заряд же распределен по поверхности неравномерно $\sigma(x,y)$. Поэтому основной задачей при определении емкости является определение распределения зарядов по поверхности проводника при заданном потенциале проводника. Чтобы получить связь между зарядом проводника и потенциалом на его поверхности необходимо осуществить обратное проецирование. Суть обратного проецирования в следующем. Проекция $P(p,\theta)$ двумерной функции