ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 152 1966

ТЕМПЕРАТУРНЫЙ РЕЖИМ ЛУЧЕИСПУСКАЮЩЕЙ ПЛАСТИНЫ С ВНУТРЕННИМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

В. В. ИВАНОВ, А. В. ФУРМАН

Представлено профессором Г. И. Фуксом

Математическая постановка рассматриваемой задачи имеет следующий вид:

$$\frac{\partial\Theta(X,F_0)}{\partial F_0}=\frac{\partial^2\Theta(X,F_0)}{\partial X^2}+P_0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\Theta(1,F_0)}{\partial X}=S_{K_*}[1-\Theta^4(1,F_0)], \tag{2}$$

$$\frac{\partial\Theta(0,F)}{\partial X}=0, \tag{3}$$

$$\Theta(X,0)=\Theta_н\ , \tag{4}$$

$$\text{где}\ :-1\leqslant X=\frac{x}{R}\leqslant 1,\ 0\leqslant F_0=\frac{a\tau}{R^2}<\infty,$$

$$\Theta(X,F_0)=\frac{T(X,F_0)}{T_C}\ ,\quad S_{K_*}=\frac{\sigma_B\ T^3{}_C}{\lambda}\cdot R,$$

$$P_0=\frac{q_V\ \cdot R^2}{\lambda\cdot T_C}\ .$$

Представим искомое распределение температуры $\Theta(X, F_0)$ в виде суммы

$$\Theta(X,F_0)=\vartheta(X,F_0)+t\ X)-D, \tag{5}$$

в которой функция $t\,(x)$ является решением системы $(1)\div(4)$ при $F_0\to\infty$, т. е. стационарной температурой

$$t(X)=P_0/2(1-X^2)+D,$$

$$D=\sqrt[4]{1+P_0/S_{K_*}}\,.$$

Для определения нестационарной температуры $\vartheta(X, F_0)$ необходимо проинтегрировать уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial\vartheta(X,F_0)}{\partial F_0}=\frac{\partial^2\vartheta(X,F_0)}{\partial X^2}, \tag{6}$$

с краевыми условиями

$$\frac{\partial\vartheta(1,F_0)}{\vartheta X}=S_{\text{к}*}[D^4-\vartheta^4(1,F_0)], \tag{7}$$

$$\frac{\partial\vartheta(0,F_0)}{\partial X}=0, \tag{8}$$

$$\vartheta(X,0)=\Theta_{\text{н}}+P_0/2(X^2-1). \tag{9}$$

Нахождение точного аналитического решения системы (6)÷(9) затруднительно из-за нелинейности граничного условия (7). Линеаризация условия (7) может быть выполнена при помощи новой переменной $W(X, F_0)$, определяемой соотношением

$$W(X,F_0)=\frac{1}{2D^3}\left[\operatorname{Arth}\frac{\vartheta(X,F_0)}{D}+\operatorname{arctg}\frac{\vartheta(X,F_0)}{D}\right]. \tag{10}$$

Для новой переменной $W(X, F_0)$ система (6)÷(9) запишется в виде:

$$\frac{\partial W(X,F_0)}{\partial F_0}=\frac{\partial^2 W(X,F_0)}{\sigma X^2}-\varphi(X,F_0), \tag{11}$$

$$\varphi(X,F_0)=4\frac{\vartheta^3(X,F_0)\left[\frac{\partial\vartheta(X,F_0)}{\partial X}\right]^2}{[D^4-\vartheta^4(X,F_0)]^2},$$

$$\frac{\partial W(1,F_0)}{\partial X}=S_{\text{к}*}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial W(0,F_0)}{\partial X}=0, \tag{13}$$

$$W(X,0)=\frac{1}{2D^3}\left[\operatorname{Arth}\frac{\Theta_{\text{н}}+P_0/2(X^2-1)}{D}+\right.$$

$$\left.+\operatorname{arctg}\frac{\Theta_{\text{н}}+P_0/2(X^2-1)}{D}\right]=f(X)^{1)}. \tag{14}$$

Входящая в уравнение (11) величина $\varphi(X, F_0)$ всегда положительна, при этом $\varphi(0, F_0)=0$ (условие 7), $\varphi(1,F_0)=4\vartheta^3(1,F_0)\,S^2_{\text{к}*}$ (условие 8). Оценим $\varphi(X,F_0)$ выражением[2]

$$\varphi(X,F_0)\approx\frac{1}{2}[\varphi(0,F_0)+\varphi(0,0)]=2\Theta^3_{\text{н}}\,S^2_{\text{к}*}.$$

[1] Отметим, что поскольку $\operatorname{Arth}{}^1/_D\,[\Theta_{\text{н}}+P_0/2\,(X^2-1)]$ существует при $\left|\frac{\Theta_{\text{н}}+P_0/2(X^2-1)}{D}\right|<1$, то подстановкой (10) можно пользоваться в случае, если

$$|\Theta_{\text{н}}-P_0/2|<D.$$

[2] Погрешность, вызываемая таким допущением, будет указана ниже.

Тогда решение системы (11)÷(14) примет вид [1]:

$$W(X,F_0) = S_{к_*}\Bigg\{F_0 - \frac{1-3X^2}{6} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{m+1}}{\mu^2_m} \cdot \cos\mu_m X \cdot \exp[-\mu^2_m F_0]\Bigg\} -$$

$$- 2\Theta^3_н S^2_{к_*} \cdot F_0 + \int_0^1 f(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} 2\cos\mu_m X \cdot \exp[-\mu^2_m F_0] \int_0^1 f(\xi) \cdot \cos\mu_m\xi \cdot d\xi. \qquad (15)$$

Вычисление интегралов, входящих в уравнение (15), можно произвести следующим образом.

В области $W(X,F_0) \cdot D^3 \leqslant 0{,}6$ зависимость (10) имеет линейный характер (табл. 1), т. е.

$$f(X) \cong 1/D^4[\Theta_н\ P_0/2(X^2-1)].$$

Зависимость $W(X,\ F_0)D^3 = \frac{1}{2}\left[\operatorname{Arth}\frac{\vartheta(X,F_0)}{D} + \operatorname{arctq}\frac{\vartheta(X,\ F_0)}{D}\right]$,

Таблица 1

$\frac{\vartheta}{D}$	$W \cdot D^3$	$\frac{\vartheta}{D}$	$W \cdot D^3$	$\frac{\vartheta}{D}$	$W \cdot D^3$	$\frac{\vartheta}{D}$	$W \cdot D^3$
0,00	0,000	0,25	0,250	0,50	0,506	0,75	0,808
0,01	0,010	0,26	0,260	0,51	0,517	0,76	0,823
0,02	0,020	0,27	0,270	0,52	0,528	0,77	0,838
0,03	0,030	0,28	0,280	0,53	0,539	0,78	0,854
0,04	0,040	0,29	0,290	0,54	0,550	0,79	0,870
0,05	0,050	0,30	0,300	0,55	0,561	0,80	0,887
0,06	0,060	0,31	0,311	0,56	0,572	0,81	0,904
0,07	0,070	0,32	0,321	0,57	0,583	0,82	0,922
0,08	0,080	0,33	0,331	0,58	0,594	0,83	0,940
0,09	0,090	0,34	0,341	0,59	0,605	0,84	0,960
0,10	0,100	0,35	0,351	0,60	0,617	0,85	0,980
0,11	0,110	0,36	0,361	0,61	0,628	0,86	1,002
0,12	0,120	0,37	0,371	0,62	0,640	0,87	1,024
0,13	0,130	0,38	0,382	0,63	0,652	0,88	1,049
0,14	0,140	0,39	0,392	0,64	0,664	0,89	1,074
0,15	0,150	0,40	0,402	0,65	0,676	0,90	1,102
0,16	0,160	0,41	0,412	0,66	0,688	0,91	1,133
0,17	0,170	0,42	0,423	0,67	0,701	0,92	1,166
0,18	0,180	0,43	0,433	0,68	0,713	0,93	1,204
0,19	0,190	0,44	0,443	0,69	0,726	0,94	1,246
0,20	0,200	0,45	0,454	0,70	0,739	0,95	1,296
0,21	0,210	0,46	0,464	0,71	0,752	0,96	1,355
0,22	0,220	0,47	0,475	0,72	0,766	0,97	1,431
0,23	0,230	0,48	0,485	0,73	0,780	0,98	1,536
0,24	0,240	0,49	0,496	0,74	0,794	0,99	1,713

Тогда

$$W(X,F_0)\cdot D^4=\Theta_{\text{н}}-P_0/_3-2\Theta^3_{\text{н}}\,(S^2_{\text{к}_*}+P_0S_{\text{к}_*})\,F_0+$$

$$+\,(S_{\text{к}_*}+P_0)\left[F_0-\frac{1-3X^2}{6}\right]+$$

$$+S_{\text{к}_*}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{m+1}}{\mu^2_m}\cos\mu_m X\cdot\exp[-\mu^2_m\cdot F_0]. \qquad (16)$$

В области $W(X,\ F_0)\,D^3>0{,}6$ зависимость (14) можно аппроксимировать функцией

$$f(X)\cong f(0)+[f(1)-f(0)]\,X^2.$$

В этом случае

$$W(X,F_0)\cdot D^3=\frac{1}{6}\left(\mathrm{Arth}\frac{\Theta_{\text{н}}}{D}+\mathrm{arctq}\frac{\Theta_{\text{н}}}{D}\right)+$$

$$+\frac{1}{3}\left(\mathrm{Arth}\,\frac{\Theta_{\text{н}}-P_0/_2}{D}+\mathrm{arctq}\frac{\Theta_{\text{н}}-P_0/_2}{D}\right)-$$

$$-\,2\,(D\Theta_{\text{н}})^3S^2_{\text{к}_*}\cdot F_0+D^3S_{\text{к}_*}\left[F_0-\frac{1-3X^2}{6}\right]+$$

$$+\left[S_{\text{к}_*}D^3-\left(\mathrm{Arth}\frac{\Theta_{\text{н}}}{D}+\mathrm{arctq}\frac{\Theta_{\text{н}}}{D}\right)+\left(\mathrm{Arth}\frac{\Theta_{\text{н}}-P_0/_2}{D}\right)+\right.$$

$$\left.+\,\mathrm{arctq}\,\frac{\Theta_{\text{н}}-P_0/_2}{D}\right]\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{m+1}}{\mu^2_m}\cdot\cos\mu_m X\cdot\exp[-\mu^2_m F_0]. \qquad (17)$$

Определив $W(X,\ F_0)$ из (16) или (17), по таблице 1 находим $\vartheta(X,\ F_0)$.

Исследование погрешности предлагаемого метода проведено путем численного интегрирования системы (1)÷(4) [2] для $P_0\leqslant 2,\ 1$, $S_{\text{к}_*}\leqslant 0{,}15$. Как показали численные расчеты в указанной области изменения критериев P_0 и $S_{\text{к}_*}$, погрешность для всех точек пластины не превышает 7—8%. С уменьшением P_0 и $S_{\text{к}_*}$ точность расчета повышается.

В качестве примера рассмотрим разогрев лучеиспускающей пластины ($2R=0{,}5$ *м*, $\lambda=17{,}45$ *вт/м.град*, $\sigma_{\text{в}}=4{,}54$ *вт/м²° К⁴*, $q_V=$ $=183460$ *вт/м³*) в среде $T_c=313°K$.

В таблице 2 сделано сравнение величин $\Theta\ (X,\ F_0)$, полученных на основе предлагаемого способа расчета и численным интегрированием.

Сравнение результатов определения температуры различными методами.

Таблица 2

F_0	По методу конечных разностей		По предлагаемой методике	
	$\Theta_{X=1}$	$\Theta_{X=0}$	$\Theta_{X=1}$	$\Theta_{X=0}$
0,00	1,000	1,000	1,000	1,000
0,84	2,427	2,685	2.497	2,7064
1,32	2,819	3,373	2,942	3,490
1,80	3,016	3,791	3,114	3,995
2,16	3,093	3,974	3,175	4,132
∞	3,210	4,260	3,210	4,260

Результаты, полученные в работе, могут быть использованы для расчета температурных полей в тепловыделяющих элементах, охлаждаемых радиацией, а также для оценки времени прогрева отдельных частей до заданной температуры, что особенно важно для периода пуска и в прерывистом режиме работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Смирнов. К исследованию нестационарного теплообмена в хлебопекарных печах. Труды МТИПП, вып. 6. 78, 1956.
2. Л. Коллатц. Численные методы решения дифференциальных уравнений. ИЛ. Москва, 1953.