ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 152 1966

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

И. А. ГОНЧАР

Представлена научным семинаром кафедры автоматики и телемеханики Томского политехнического института

Широтно-импульсные системы (ШИС) автоматического регулирования относятся к классу нелинейных импульсных автоматических систем (НИАС). В работе Я. З. Цыпкина [1] сформулирован частотный критерий абсолютной устойчивости НИАС, характеристики нелинейных элементов которых принадлежат сектору (r, k). При этом предполагается, что нелинейная импульсная система состоит из нелинейного элемента (НЭ) и линейной импульсной части (ЛИЧ) (рис. 1а).

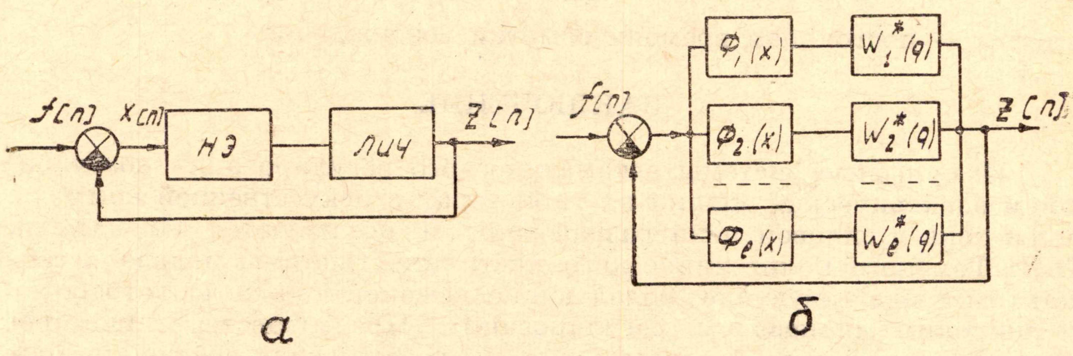

Рис. 1.

Рассмотрим ШИС с однотактной модуляцией первого рода. Зависимость изображения выходной величины системы $Z^*(q)$ от входной величины модулятора $X[n]$ может быть представлена в виде:

$$Z^*(q) = \sum_{\nu=1}^{l} c_{\nu 0} \frac{e^{q_\nu} - 1}{e^{q} - e^{q_\nu}} D \left\{ \frac{1 - e^{-q_\nu \gamma[n]}}{1 - e^{-q_\nu}} \right\}, \tag{1}$$

где относительная ширина импульсов $\gamma[n]$ на выходе широтного модулятора определяется соотношением:

$$\gamma[n] = \begin{cases} \varkappa x[n] & \text{при } 0 \leqslant x[n] \leqslant \dfrac{1}{\varkappa}; \\ 1 & \text{при } x[n] \geqslant \dfrac{1}{\varkappa}; \\ 0 & \text{при } x[n] \geqslant 0. \end{cases} \tag{2}$$

l — число корней непрерывной части ШИС.

Корни характеристического уравнения непрерывной части q_ν и коэффициенты c_{ν_0} ($\nu = 1, 2, \ldots l$) определяются по известным из теории импульсных систем формулам [2].

Уравнение (1) позволяет представить разомкнутую широтно-импульсную систему в виде l параллельно соединенных ветвей, каждая из которых в свою очередь состоит из последовательно соединенных линейной импульсной части и нелинейного элемента (рис. 1б).

Передаточная функция элементарной линейной импульсной части равна

$$W^*_\nu(q) = c_{\nu 0} \frac{e^{q_\nu} - 1}{e^{q} - e^{q_\nu}} ; \quad (\nu = 1, 2, \ldots l), \tag{3}$$

а характеристика каждого нелинейного элемента

$$\Phi_\nu(x) = \frac{1 - e^{-q_\nu \gamma[n]}}{1 - e^{-q_\nu}} ; \quad (\nu = 1, 2, \ldots l). \tag{4}$$

Следовательно, структурная схема широтно-импульсных систем отличается от схемы, изображенной на рис. 1а. Это затрудняет применение частотного критерия устойчивости Я. З. Цыпкина при анализе устойчивости ШИС второго порядка, третьего и выше.

Семейство нелинейных характеристик, построенных по формуле (4) для $\nu = 1, 2, \ldots l$, изображено на рис. 2а. Если на замкнутую ШИС было подано воздействие $f[n] = \text{const}$, то устойчивая система придет к какому-то положению равновесия x_0. Приняв это положение за начало координат (рис. 2б), получим в новой системе координат семейство нелинейных характеристик $\Phi'_\nu(x)$, определяемых формулой

$$\Phi'_\nu(x) = \frac{e^{-q_\nu \varkappa x_0}\left(1 - e^{-q_\nu \varkappa x}\right)}{1 - e^{-q_\nu}} ; \tag{5}$$

при

$$-x_0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{\varkappa} - x_0.$$

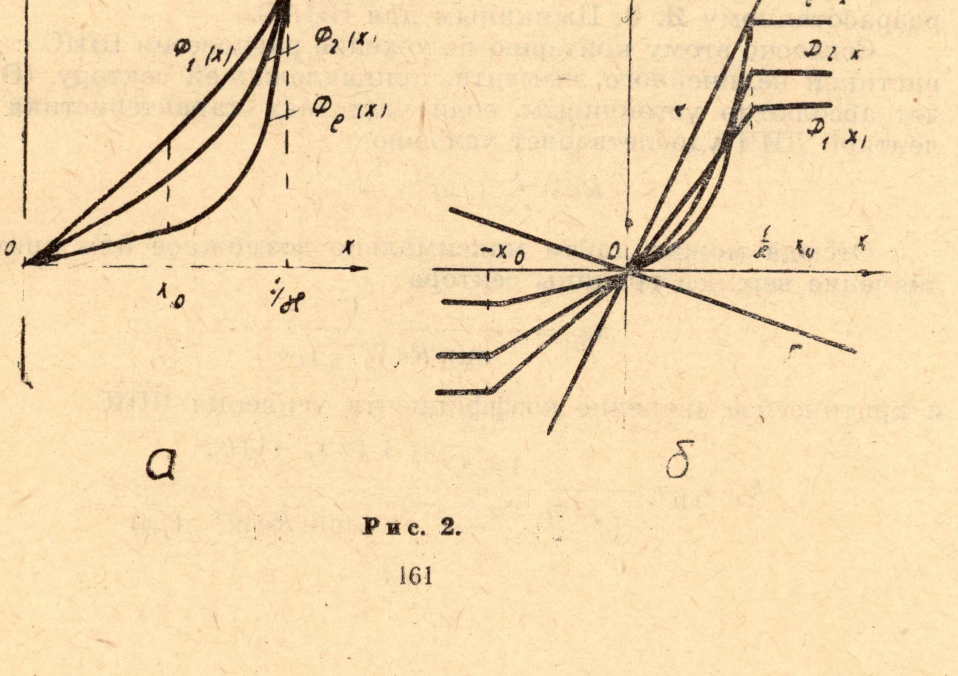

Рис. 2.

Кроме того, всегда можно найти такой сектор (r, k), который включал бы в себя все нелинейные характеристики $\Phi'_\nu(x)$, т. е. удовлетворялись бы условия

$$\Phi'_\nu(0)=0; \quad r<\frac{\Phi'_\nu(x)}{x}<k. \tag{6}$$

При исследовании устойчивости НИАС по частотному критерию Я. З. Цыпкина не имеет значения конкретный вид характеристики нелинейного элемента, достаточно только выполнения условий (6). Поэтому все элементарные нелинейные элементы ШИС с характеристикой $\Phi'_\nu(x)$ можно заменить одним эквивалентным нелинейным элементом с характеристикой $\Phi_э(x)$, принадлежащей тому же сектору (r, k), которому принадлежат характеристики $\Phi'_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots l)$.

Верхняя граница k этого сектора может быть определена по нелинейной характеристике $\Phi'_l(x)$, соответствующей наименьшему корню, т. е.

$$k=\frac{e^{-q_l \varkappa x_0}-e^{-q_l}}{(1-e^{-q_l})(1-\varkappa x_0)}\varkappa; \tag{7}$$

$$\text{при } q_l \leqslant q_\nu; \quad (\nu=1,2,\ldots l-1).$$

При определении критического коэффициента усиления ШИС нижнюю границу r сектора можно принять равной нулю.

Уравнение разомкнутой ШИС может быть теперь записано

$$Z^*(q)=W^*_э(q)\,D\{\Phi_э(x)\}, \tag{8}$$

где эквивалентная передаточная функция ЛИЧ широтно-импульсной системы $W^*_э(q)$ определяется соотношением:

$$W^*_э(q)=\sum_{\nu=1}^{l} c_{\nu 0}\frac{e^{q_\nu}-1}{e^{q}-e^{q_\nu}}; \quad (\nu=1,2,\ldots l). \tag{9}$$

Структурная схема полученной эквивалентной ШИС теперь соответствует схеме, изображенной на рис. 1а. Следует подчеркнуть, что принятое преобразование широтно-импульсной системы допустимо лишь при исследовании устойчивости ШИС по частотному критерию, разработанному Я. З. Цыпкиным для НИАС.

Согласно этому критерию положение равновесия ШИС с характеристикой нелинейного элемента, принадлежащей сектору (О, К), будет абсолютно устойчивым, если частотная характеристика эквивалентной ЛИЧ удовлетворяет условию

$$Re\,W^*_э(j\bar{\omega})>-\frac{1}{k}. \tag{10}$$

Отсюда можно найти максимально возможное или критическое значение верхней границы сектора

$$k_{кр}=\frac{-1}{\min Re\,W^*_э(j\bar{\omega})}, \tag{11}$$

и критическое значение коэффициента усиления ШИС

$$k_и\,\varkappa_{кр}=\frac{(1-e^{-q_l})(\varkappa x_0-1)k_и}{(e^{-q_l \varkappa x_0}-e^{-q_l})\min Re\,W^*_э(j\bar{\omega})}, \tag{12}$$

где $k_И$ — высота импульсов на выходе широтного модулятора.

Частотный критерий (10) дает сравнительно небольшую величину верхней границы сектора k. Для повышения величины k в работах [3, 4] на производную характеристики нелинейного элемента налагаются ограничения, т. е. должны выполняться условия

$$\Phi_э(0)=0; \quad 0<\frac{\Phi_э(x)}{x}<k; \tag{13}$$

$$\sup \Phi'_э(x)=k'.$$

При этом верхняя граница сектора может быть увеличена, если

$$\left|1-k'(e^{j\bar{\omega}}-1)W^*_э(j\bar{\omega})\right|<1. \tag{14}$$

Найдя из неравенства (14) максимальное значение k', можно определить и коэффициент усиления широтно-импульсной системы

$$k_и \varkappa_{кр} = k'\frac{e^{q_l}-1}{q_l}. \tag{15}$$

В качестве примера рассмотрим широтно-импульсную систему второго порядка, передаточная функция непрерывной части которой равна:

$$k_н(q)=\frac{\beta^2}{q^2+2\xi\beta q+\beta^2}; \quad \beta=\frac{T}{T_0}. \tag{16}$$

Частотная характеристика эквивалентной ЛИЧ этой системы может быть представлена:

$$W^*_э(j\bar{\omega})=\frac{c_1}{e^{j\bar{\omega}}-e^{q_1}}+\frac{c_2}{e^{j\bar{\omega}}-e^{q_2}}, \tag{17}$$

где $c_1 = c_{10}(e^{q_1}-1)$; $c_2=c_{20}(e^{q_2}-1)$.

Минимальное значение вещественной части частотной характеристики может быть определено аналитически:

$$\min ReW^*_l(j\bar{\omega})=\frac{\left[\sqrt{c_2(1-e^{2q_1})}+\sqrt{c_1(e^{2q_2}-1)}\right]^2}{2(e^{q_1}-e^{q_2})(e^{q_1+q_2}-1)}+$$

$$+\frac{c_1-c_2}{e^{q_2}-e^{q_1}}. \tag{18}$$

Подставляя значения $\min Re W^*_э(j\bar{\omega})$ в формулу (10), можно получить зависимость критического коэффициента усиления от параметров системы. Этот коэффициент усиления существенно зависит от положения равновесия x_0.

В таблице 1 приведены значения $k_И \varkappa_{кр}$ системы, вычисленные по частотному критерию Я. З. Цыпкина (формулы 12, 18), по критерию с ограничением производной характеристики НЭ (формулы 14, 15) для $\beta=0{,}3$ и $x_0 \approx 1$. Здесь же приведены значения $k_И \varkappa_{кр}$, полученные при моделировании системы на машине МНБ-1.

Таблица 1

	Коэффициент затухания ξ	2	1,33	1,11
$k_И \varkappa_{кр}$	по частотному критерию Я. З. Цыпкина	8,2	6,25	5,1
$k_И \varkappa_{кр}$	по критерию с ограничением производной	14,5	9,0	8
$k_И \varkappa_{кр}$	по модели	17	11	9

При сравнении полученных результатов можно сделать вывод, что рассмотренные критерии абсолютной устойчивости НИАС позволяют оценить устойчивость широтно-импульсных систем с достаточной степенью точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. З. Цыпкин. Об устойчивости в большом нелинейных импульсных автоматических систем. Докл. АН СССР, т. 145, № 1, 1962.
2. Я. З. Цыпкин. Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, 1963.
3. Я. З. Цыпкин. Об абсолютной устойчивости одного класса нелинейных импульсных автоматических систем. Автоматика и телемеханика, т. 25, № 7, 1964.
4. E. I. Jury, B. W. Lee. On the stability of a certain class of nonlinear sampled-data systems. «IEEE Trans. Automat. Control», 1964, 9, № 1, 51—61.