

О ЧИСЛЕ НЕВЫПУКЛЫХ И ВЫПУКЛЫХ ЧЕТВЕРОК В ПЛОСКОЙ ТОЧЕЧНОЙ СИСТЕМЕ

Г. Г. ПЕСТОВ

(Представлена кафедрой инженерной и вычислительной математики)

Лемма 1. Дана $S_4 = \{a, b, c, d\}$. Величина

$$\varsigma(a, b, c) \varsigma(a, b, d) \varsigma(c, d, a) \varsigma(c, d, b)$$

равна $+1$ или -1 , в зависимости от того, будет ли $C(S_4) = 1$ или 0 .

Доказательство. Заметим, что функция

$$\varphi(a, b, c, d) = \varsigma(a, b, c) \varsigma(a, b, d) \varsigma(c, d, a) \varsigma(c, d, b)$$

не меняется при перестановке аргументов.

В самом деле:

$$\begin{aligned} \varphi(b, a, c, d) &= \varsigma(b, a, c) \varsigma(b, a, d) \varsigma(c, d, b) \varsigma(c, d, a) = \\ &= \varsigma(a, b, c) \varsigma(a, b, d) \varsigma(c, d, a) \varsigma(c, d, b) = \varphi(a, b, c, d). \end{aligned}$$

Так же

$$\varphi(a, c, b, d) = \varphi(a, b, d, c) = \varphi(a, b, c, d).$$

а) Пусть S_4 — выпуклая. В силу предыдущего можно считать, что точки a, b, c, d расположены в естественном порядке [1]. Тогда

$$\varsigma(a, b, c) = \varsigma(a, b, d) = \varsigma(c, d, a) = \varsigma(c, d, b) = +1.$$

Следовательно,

$$\varphi(a, b, c, d) = +1.$$

в) Пусть S_4 — невыпуклая. Пусть a, b, c — внешние точки, расположенные в естественном порядке, и точка d — внутренняя. Тогда

$$\varsigma(a, b, c) = \varsigma(a, b, d) = +1,$$

$$\varsigma(c, d, a) \varsigma(c, d, b) = -1.$$

Следовательно,

$$\varphi(a, b, c, d) = -1.$$

Лемма 2. Пусть $S_5 = \{a, b, x_1, x_2, x_3\}$. Тогда

$$C(S_5 \setminus \{a\}) - C(S_5 \setminus \{b\}) = \frac{1}{2} \sum_{x, y, z \in S_5} \varsigma(x, y, z) \varsigma(x, y, b) \varsigma(a, b, x) \varsigma(a, b, y).$$

$$x, y \mid \varsigma(x, y, a) \varsigma(x, y, b) < 0.$$

Доказательство: В силу леммы 1.4 из [2]:

$$\varsigma(b, x_1, x_2) \varsigma(b, x_2, x_3) \varsigma(b, x_3, x_1) + \varsigma(b, x_1, x_2) \varsigma(a, b, x_1) \varsigma(a, b, x_2) +$$

$$\begin{aligned}
& + \varsigma(b, x_2, x_3) \varsigma(a, b, x_2) \varsigma(a, b, x_3) + \varsigma(b, x_3, x_1) \varsigma(a, b, x_3) \varsigma(a, b, x_1) = \\
& = \varsigma(a, x_1, x_2) \varsigma(a, x_2, x_3) \varsigma(a, x_3, x_1) + \varsigma(a, x_1, x_2) \varsigma(a, b, x_1) \varsigma(a, b, x_2) + \\
& + \varsigma(a, x_2, x_3) \varsigma(a, b, x_2) \varsigma(a, b, x_3) + \varsigma(a, x_3, x_1) \varsigma(a, b, x_3) \varsigma(a, b, x_1).
\end{aligned}$$

Произведем перегруппировку слагаемых:

$$\begin{aligned}
& - \varsigma(b, x_1, x_2) \varsigma(b, x_2, x_3) \varsigma(b, x_3, x_1) + \varsigma(a, x_1, x_2) \varsigma(a, x_2, x_3) \varsigma(a, x_3, x_1) = \\
& = \varsigma(b, x_1, x_2) \varsigma(a, b, x_1) \varsigma(a, b, x_2) - \varsigma(a, x_1, x_2) \varsigma(a, b, x_1) \varsigma(a, b, x_2) + \\
& + \varsigma(b, x_2, x_3) \varsigma(a, b, x_2) \varsigma(a, b, x_3) - \varsigma(a, x_2, x_3) \varsigma(a, b, x_2) \varsigma(a, b, x_3) + \\
& + \varsigma(b, x_3, x_1) \varsigma(a, b, x_3) \varsigma(a, b, x_1) - \varsigma(a, x_3, x_1) \varsigma(a, b, x_3) \varsigma(a, b, x_1).
\end{aligned}$$

Умножая все слагаемые на $\varsigma(x_1, x_2, x_3)$ и производя простые преобразования:

$$\begin{aligned}
& \varsigma(b, x_1, x_2) \varsigma(b, x_1, x_3) \varsigma(x_2, x_3, b) \varsigma(x_2, x_3, x_1) - \\
& - \varsigma(a, x_1, x_2) \varsigma(a, x_1, x_3) \varsigma(x_2, x_3, a) \varsigma(x_2, x_3, x_1) = \\
& = [1 - \varsigma(x_1, x_2, a) \varsigma(x_1, x_2, b)] \varsigma(x_1, x_2, x_3) \varsigma(x_1, x_2, b) \varsigma(a, b, x_1) \varsigma(a, b, x_2) + \\
& + [1 - \varsigma(x_2, x_3, a) \varsigma(x_2, x_3, b)] \varsigma(x_2, x_3, x_1) \varsigma(x_2, x_3, b) \varsigma(a, b, x_2) \varsigma(a, b, x_3) + \\
& + [1 - \varsigma(x_3, x_1, a) \varsigma(x_3, x_1, b)] \varsigma(x_3, x_1, x_2) \varsigma(x_3, x_1, b) \varsigma(a, b, x_3) \varsigma(a, b, x_1) = \\
& = \frac{1}{2} \left\{ [1 - \varsigma(x_1, x_2, a) \varsigma(x_1, x_2, b)] \varsigma(x_1, x_2, x_3) \varsigma(x_1, x_2, b) \varsigma(a, b, x_1) \varsigma(a, b, x_2) + \right. \\
& + [1 - \varsigma(x_2, x_1, a) \varsigma(x_2, x_1, b)] \varsigma(x_2, x_1, x_3) \varsigma(x_2, x_1, b) \varsigma(a, b, x_2) \varsigma(a, b, x_1) + \\
& + [1 - \varsigma(x_2, x_3, a) \varsigma(x_2, x_3, b)] \varsigma(x_2, x_3, x_1) \varsigma(x_2, x_3, b) \varsigma(a, b, x_2) \varsigma(a, b, x_3) + \\
& + [1 - \varsigma(x_3, x_2, a) \varsigma(x_3, x_2, b)] \varsigma(x_3, x_2, x_1) \varsigma(x_3, x_2, b) \varsigma(a, b, x_3) \varsigma(a, b, x_2) + \\
& + [1 - \varsigma(x_3, x_1, a) \varsigma(x_3, x_1, b)] \varsigma(x_3, x_1, x_2) \varsigma(x_3, x_1, b) \varsigma(a, b, x_3) \varsigma(a, b, x_1) + \\
& + [1 - \varsigma(x_1, x_3, a) \varsigma(x_1, x_3, b)] \varsigma(x_1, x_3, x_2) \varsigma(x_1, x_3, b) \varsigma(a, b, x_1) \varsigma(a, b, x_3) \left. \right\} = \\
& = \frac{1}{2} \sum_{x, y, z \in S_5 \setminus \{a, b\}} [1 - \varsigma(x, y, a) \varsigma(x, y, b)] \varsigma(x, y, z) \varsigma(x, y, b) \varsigma(a, b, x) \varsigma(a, b, y) = \\
& = \sum_{x, y, z \in S_5 \setminus \{a, b\}} \varsigma(x, y, z) \varsigma(x, y, b) \varsigma(a, b, x) \varsigma(a, b, y).
\end{aligned}$$

$$x, y | \varsigma(x, y, a) \varsigma(x, y, b) < 0.$$

Но выражение в левой части предыдущего равенства, в силу леммы 1, есть

$$2 [C(S_5 \setminus \{a\}) - C(S_5 \setminus \{b\})].$$

Поэтому

$$C(S_5 \setminus \{a\}) - C(S_5 \setminus \{b\}) = \frac{1}{2} \sum_{x, y, z \in S_5} \varsigma(x, y, z) \varsigma(x, y, b) \varsigma(a, b, x) \varsigma(a, b, y).$$

$$x, y | \varsigma(x, y, a) \varsigma(x, y, b) < 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. Пусть $a, b \in S$. Тогда

$$C(S \setminus \{a\}) - C(S \setminus \{b\}) = \sum_{i < j} \gamma_{ij} \varsigma(b, x_i, x_j) \varsigma(a, b, x_i) \varsigma(a, b, x_j).$$

$$x_i, x_j | \varsigma(x_i, x_j, a) \varsigma(x_i, x_j, b) < 0.$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}
 C(S \setminus \{a\}) - C(S \setminus \{b\}) &= \sum_{\substack{S_5 \subset S \\ a, b \in S_5}} C(S_5 \setminus \{a\}) - C(S_5 \setminus \{b\}) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{x, y | \zeta(x, y, a) \zeta(x, y, b) < 0} \zeta(x, y, z) \zeta(x, y, b) \zeta(a, b, x) \zeta(a, b, y) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{x, y | \zeta(x, y, a) \zeta(x, y, b) < 0} \zeta(x, y, b) \zeta(a, b, x) \zeta(a, b, y) \sum_{z \neq x, y} \zeta(x, y, z) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{x, y | \zeta(x, y, a) \zeta(x, y, b) < 0} \gamma_{xy} \zeta(x, y, b) \zeta(a, b, x) \zeta(a, b, y) = \\
 &= \sum_{i < j} \gamma_{ij} \zeta(x_i, x_j, b) \zeta(a, b, x_i) \zeta(a, b, x_j), \\
 &\quad x_i x_j | \zeta(x_i, x_j, a) \zeta(x_i, x_j, b) < 0,
 \end{aligned}$$

где $\gamma_{ij} = |L(x_i, x_j)| - |R(x_i, x_j)|$,
что и требовалось доказать.

Некоторые следствия

Пусть

$$S_{n+r} \setminus S_n = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}.$$

Тогда, по теореме 3:

$$\begin{aligned}
 C(S_n \cup \{a_{i+1}\}) - C(S_n \cup \{a_i\}) &= \\
 &= \sum_{\kappa < l} \gamma_{\kappa l} \zeta(x_\kappa, x_l, a_{i+1}) \zeta(a_{i+1}, a_i, x_\kappa) \zeta(a_{i+1}, a_i, x_l). \\
 &\quad x_\kappa, x_l | \zeta(x_\kappa, x_l, a_i) \zeta(x_\kappa, x_l, a_{i+1}) < 0.
 \end{aligned}$$

Суммируя по i , имеем:

$$\begin{aligned}
 C(S_n \cup \{a_r\}) - C(S_n \cup \{a_1\}) &= \\
 &= \sum_{l=1}^{r-1} \sum_{x_\kappa, x_l | \zeta(x_\kappa, x_l, a_l) \zeta(x_\kappa, x_l, a_{l+1}) < 0} \gamma_{\kappa l} \zeta(x_\kappa, x_l, a_{l+1}) \zeta(a_{l+1}, a_l, x_\kappa) \zeta(a_{l+1}, a_l, x_l).
 \end{aligned}$$

В частности, если $a_r = a_1$, получим:

$$\sum_{l=1}^{r-1} \sum_{x_\kappa, x_l | \zeta(x_\kappa, x_l, a_l) \zeta(x_\kappa, x_l, a_{l+1}) < 0} \gamma_{\kappa l} \zeta(x_\kappa, x_l, a_{l+1}) \zeta(a_{l+1}, a_l, x_\kappa) \zeta(a_{l+1}, a_l, x_l) = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Г. Пестов. Теоремы о внешних точках и гранях n -мерной точечной системы, Геометрический сборник ТГУ, 1966.
2. Г. Г. Пестов. n -мерные точечные системы, там же.