

## ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ БИНОМОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЯДА КУММЕРА

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена научным семинаром кафедры высшей математики)

Приближения асимптотического ряда Куммера в виде произведения биномов получены на основе теории цепных дробей и могут быть применены для вычисления указанного ряда при больших значениях аргумента по модулю.

Ряд Куммера содержит параметры  $\alpha$  и  $\beta$ , которые в этой статье изучены при изменении в следующих интервалах:  $-1 < \beta \leq \alpha$ ,  $0 < \alpha < 2$ . Оценка остаточного члена получена для комплексного переменного  $z$  в области  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2}$ .

1. Если ввести сокращенное обозначение произведения

$$(a)_\kappa = a(a+1)\dots(a+\kappa-1) = \frac{\Gamma(a+\kappa)}{\Gamma(a)}, \quad (a)_0 = 1,$$

то асимптотический ряд функции Куммера ([1], стр. 341) следующий:

$$F\left(\alpha, \beta; ; -\frac{1}{z}\right) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_\kappa (\beta)_\kappa}{(1)_\kappa} \left(-\frac{1}{z}\right)^\kappa, \quad |z| \gg 1, \quad |\arg z| < \pi. \quad (1)$$

Ряд (1) преобразуется таким путем:

$$\begin{aligned} F\left(\alpha, \beta; ; -\frac{1}{z}\right) &= e^{\ln F\left(\alpha, \beta; ; -\frac{1}{z}\right)} = e^{\ln F\left(-\frac{1}{z}\right)} = \\ &= \exp\left\{\int_{\infty}^z \left[F\left(-\frac{1}{z}\right)\right]^{-1} d\left[F\left(-\frac{1}{z}\right)\right]\right\}, \end{aligned}$$

то есть

$$F\left(\alpha, \beta; ; -\frac{1}{z}\right) = \exp\left[\int_{\infty}^z \frac{\alpha\beta F\left(\alpha+1, \beta+1; ; -\frac{1}{t}\right) dt}{F\left(\alpha, \beta; ; -\frac{1}{t}\right) t^2}\right]. \quad (2)$$

Далее к числителю подынтегральной функции (2) применим рекуррентное соотношение

$$\beta F\left(\alpha+1, \beta+1; ; -\frac{1}{t}\right) = tF\left(\alpha, \beta; ; -\frac{1}{t}\right) - tF\left(\alpha+1, \beta; ; -\frac{1}{t}\right) \quad (3)$$

и заменим отношение двух рядов известным разложением его в цепную дробь ([2], стр. 137), тогда ряд (1) выразится числом  $e$ , имеющим показателем степени интеграл и под знаком интеграла цепную дробь, а именно:

$$F\left(\alpha, \beta; ; -\frac{1}{z}\right) = \exp\left\{\int_{\infty}^z \left[\frac{\alpha}{t} - \frac{\alpha P_{2n+1}(t)}{t Q_{2n+1}(t)}\right] dt\right\} \times \exp\left[\alpha \int_{\infty}^z R_{2n+1}(t) \frac{dt}{t}\right], \quad (4)$$

где

$$p_{2n+1}(z) = \alpha \int_{\infty}^z R_{2n+1}(t) \frac{dt}{t}; \quad (5)$$

$$\frac{P_{\kappa}(t)}{Q_{\kappa}(t)} = \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3 + \frac{1}{\alpha_4 + \dots + \frac{1}{\alpha_{\kappa}}}}}}$$

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_{2m} = \frac{(\alpha+1)_{m-1} t}{(\beta)_m}, \quad \alpha_{2m+1} = \frac{(\beta)_m}{(\alpha+1)_m}; \quad (6)$$

$$R_{2n+1}(t) = \sum_{\kappa=n+1}^{\infty} \frac{(\beta)_{\kappa}}{(\alpha+1)_{\kappa} Q_{2\kappa-1}(t) Q_{2\kappa+1}(t)} \quad ([13], \text{ стр. 34}). \quad (7)$$

Для числителя и знаменателя подходящей дроби (6) известны равенства и соотношение ([3], стр. 13, 14):

$$P_{2n+1}(t) = 1 + \dots + \frac{t^n}{(\alpha+1)_n} = \frac{t^n}{(\alpha+1)_n} p_{2n+1}(t), \quad (8)$$

$$Q_{2n+1}(t) = \sum_{m=0}^n \alpha_{2m+1} + \dots + \frac{n(\alpha+\beta+n)}{(\alpha+1)_n} t^{n-1} + \frac{t^n}{(\alpha+1)_n} = \frac{t^n}{(\alpha+1)_n} q_{2n+1}(t), \quad (9)$$

где

$$D_n = \sum_{m=0}^n \alpha_{2m+1} = \sum_{m=0}^n \frac{(\beta)_m}{(\alpha+1)_m}. \quad (10)$$

$$Q_{2n+1}(t) = \left(\alpha_{2n} \alpha_{2n+1} + 1 + \frac{\alpha_{2n+1}}{\alpha_{2n-1}}\right) Q_{2n-1}(t) - \frac{\alpha_{2n+1}}{\alpha_{2n-1}} Q_{2n-3}(t). \quad (11)$$

2. Корни многочлена  $Q_{2n+1}(t)$  вещественные отрицательные и разделяются корнями  $Q_{2n-1}(t)$  ([3], стр. 14). Ввиду равенства (9) трудно установить, что крайний корень  $Q_{2n+1}(t)$  расположен в интервале  $(-\alpha-\beta-n, -n\alpha-n\beta-n^2)$ , поэтому относительно смежных знаменателей справедливо неравенство:

$$\left|1 + \frac{t}{n(\alpha+\beta+n)}\right| \frac{D_n}{D_{n-1}} |Q_{2n-1}(t)| < |Q_{2n+1}(t)|, \quad |\arg t| \leq \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Неравенство (12) имеет место и для  $-1 < \beta < 0$ , так как  $Q_{2n+1}(t)$  содержит параметры  $\alpha$  и  $\beta$  в симметричном виде и при перестановке

интервалов изменения этих параметров все неполные частные цепной дроби (6) положительны.

Академик В. И. Смирнов доказал формулу для гипергеометрического ряда ([4], стр. 374):

$$F(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)}. \quad (13)$$

Согласно равенства (10)

$$D_n = F(1, \beta; \alpha + 1; 1) - F(1, \beta + n + 1; \alpha + n + 2; 1) \cdot \frac{(\beta)_{n+1}}{(\alpha + 1)_{n+1}} \quad (14)$$

и ввиду формулы (13) получим:

$$D_n = \sum_{m=0}^n \frac{(\beta)_m}{(\alpha + 1)_m} = \frac{(\alpha)_{n+1} - (\beta)_{n+1}}{(\alpha + 1)_n (\alpha - \beta)}; \quad \alpha \neq \beta. \quad (15)$$

Применяя формулы (13), (15) и неравенство (12) к бесконечному функциональному ряду (7) с учетом того, что

$$\frac{\alpha}{\alpha - \beta} < D_n < 1, \quad n = 1, 2, \dots; \quad -1 < \beta < 0. \quad D_n < D_{n+1} \text{ для } \beta > 0;$$

$$D_n > \frac{1}{2} [C + \ln(n + 1)] + \ln 2 > \frac{1}{2} \ln 7 (n + 1) \quad ([5], \text{ стр. 244}),$$

$$\beta = \alpha \geq \frac{1}{2}, \quad (16)$$

получим

$$|R_{2n+1}(t)| < S_n \frac{|(\beta)_{n+1}| D_{n-1} D_n^{-1}}{(\alpha + 1)_{n+1} |Q_{2n+1}(t)| |Q_{2n+3}(t)|}, \quad |\arg t| \leq \frac{\pi}{2}, \quad (17)$$

где

$$S_n = \begin{cases} D_n^2 \frac{(\alpha + n + 1)(\alpha - \beta)}{\alpha^2} & \text{для } -1 < \beta < 0; \\ \frac{D_n(\alpha + n + 1)}{D_{n+1}(\alpha - \beta)} & \text{для } 0 < \beta < \alpha; \\ \frac{4D_n^2 [1 + (\alpha + n + 1) \ln 7 (n + 2)]}{\ln 7 (n + 1) \ln 7 (n + 2)} & \text{для } \beta = \alpha \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (18)$$

Далее при помощи неравенств (12) и (17) получим оценку модуля интеграла (5), где интегрирование совершается вдоль радиуса точки  $z$  ([6], стр. 430), а именно:

$$\begin{aligned} |\rho_{2n+1}(z)| &< \frac{\alpha S_n |(\beta)_{n+1}| (n + 1)(\alpha + \beta + n + 1)}{(\alpha + 1)_{n+1}} \int_{\infty}^z \frac{|dt|}{|Q_{2n+1}(t)|^2 |t|^2} < \\ &< \frac{\alpha S_n |(\beta)_{n+1}| (n + 1)(\alpha + \beta + n + 1)}{(\alpha + 1)_{n+1} |Q_{2n+1}(z)|^2} \int_{\infty}^{|z|} \frac{d|t|}{|t|^2} = \\ &= \frac{\alpha S_n |(\beta)_{n+1}| (n + 1)(\alpha + \beta + n + 1)}{(\alpha + 1)_{n+1} |Q_{2n+1}(z)|^2 |z|}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство справедливо потому, что для  $|\arg t| \leq \frac{\pi}{2}$  множители знаменателей подынтегральных выражений могут быть пред-

ставлены произведением двучленов вида  $\left(1 + \frac{t}{a_m}\right)$ ,  $a_m > 0$  и модуль каждого из них принимает минимальное значение при верхнем пределе интеграла. Таким образом получена оценка интеграла (5) по модулю:

$$|\rho_{2n+1}(z)| < \frac{\alpha S_n |(\beta)_{n+1}| (n+1)(\alpha + \beta + n + 1)}{(\alpha + 1)_{n+1} |Q_{2n+1}(z)|^2 |z|}, \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{2}, \quad (19)$$

где  $S_n$  принимает значения согласно равенства (18).

3. При  $n = 1$  получаем оценку функции (4):

$$\left| F\left(\alpha, \beta; ; -\frac{1}{z}\right) \right| \leq \left| 1 + \frac{\alpha + \beta + 1}{z} \right|^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta+1}} \exp |\rho_3(z)|. \quad (20)$$

Равенство (4) с учетом (8) и (9) можно записать в виде следующей суммы:

$$F\left(\alpha, \beta; ; -\frac{1}{z}\right) = \exp \left\{ \int_{\infty}^z \left[ \frac{\alpha}{t} - \frac{\alpha p_{2n+1}(t)}{t q_{2n+1}(t)} \right] dt \right\} + r_{2n+1}(z) = F_{2n+1}(z) + r_{2n+1}(z), \quad (21)$$

где

$$r_{2n+1}(z) = F_{2n+1}(z) \{ \exp [\rho_{2n+1}(z)] - 1 \}. \quad (22)$$

Ввиду (20) и (22) получим

$$|r_{2n+1}(z)| < \left| 1 + \frac{\alpha + \beta + 1}{z} \right|^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta+1}} \exp |\rho_3(z)| [ \exp |\rho_{2n+1}(z)| - 1 ]. \quad (23)$$

Теорема. Ряд (1) представляется следующим произведением биномов ( $n = 1, 2, \dots$ ):

$$F\left(\alpha, \beta; ; -\frac{1}{z}\right) = \prod_{m=1}^n \left( 1 + \frac{a_m}{z} \right)^{b_m} + r_{2n+1}(z), \quad (24)$$

где

$$\prod_{m=1}^n \left( 1 + \frac{a_m}{z} \right) = q_{2n+1}(z), \quad b_m = \frac{\alpha\beta A_{2n+1}(-a_m)}{a_m^2 \frac{d}{dz} [q_{2n+1}(-a_m)]}. \quad (25)$$

Многочлены  $A_{2n+1}(z)$  и  $q_{2n+1}(z)$  следующие:

$$A_1(z) = 0, \quad A_3(z) = q_1(z) = 1; \quad q_3(z) = 1 + \frac{\alpha + \beta + 1}{z}, \quad (26)$$

они для  $n = 2, 3, \dots$  определяются последовательно с помощью соотношения:

$$q_{2n+1}(z) = \left[ 1 + (\alpha + \beta + 2n - 1) \frac{1}{z} \right] q_{2n-1}(z) - (\alpha + n - 1)(\beta + n - 1) \frac{1}{z^2} q_{2n-3}(z). \quad (27)$$

Верхняя граница  $|r_{2n+1}(z)|$  в области  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2}$  устанавливается при помощи неравенств (23), (19).

Доказательство. Прежде всего вводим соотношение

$$\beta A_{2n+1}(z) = z [q_{2n+1}(z) - p_{2n+1}(z)]; \quad n = 1, 2, \dots \quad (28)$$

и ввиду равенств (8), (9), (11) и (28) многочлены  $q_{2n+1}(z)$ ,  $p_{2n+1}(z)$  и  $A_{2n+1}(z)$  удовлетворяют соотношению (27).

Применяя равенство (28), преобразуем равенство (21):

$$\begin{aligned} F\left(\alpha, \beta; ; -\frac{1}{z}\right) &= \exp\left[-\int_{\infty}^z \frac{\alpha\beta A_{2n+1}(t)}{q_{2n+1}(t)} d\left(\frac{1}{t}\right)\right] + r_{2n+1}(z) = \\ &= \exp\left[\sum_{m=1}^n a_m b_m \int_{\infty}^z \frac{1}{\left(1 + \frac{a_m}{t}\right)} d\left(\frac{1}{t}\right)\right] + r_{2n+1}(z) = \\ &= \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{a_m}{z}\right)^{b_m} + r_{2n+1}(z), \end{aligned}$$

где

$$b_m = \frac{\alpha\beta A_{2n+1}(-a_m)}{\alpha_m^2 \frac{d}{dz} [q_{2n+1}(-a_m)]},$$

к тому же на основании (24) и (21)  $|r_{2n+1}(z)|$  оценивается неравенствами (23), (19).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. М., Гостехиздат, 1953.
2. А. Н. Хованский. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., ГИТТЛ, 1956.
3. Т. И. Стилтъес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1936.
4. В. И. Смирнов. Курс высшей математики. том 3, часть вторая, М., ГИТТЛ, 1953.
5. И. М. Фыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.—Л., ГИТТЛ, 1948.
6. И. И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.—Л., Гостехиздат, 1948.