

**ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ ИЗГИБНЫХ
КОЛЕБАНИЙ БАЛОК ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ
ПРИ НАЛИЧИИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗОН**

Н. К. ВИТВИЦКИЙ

(Представлена научным семинаром кафедры высшей математики)

В работе автора [9], где даны теоретические обоснования метода, указывалось, что в современных конструкциях и сооружениях возможно возникновение зон пластичности, обусловленных появлением сверхкритических нагрузок.

Член-корреспондент Академии наук И. М. Рабинович [4] указывал, что продолжение динамического расчета за пределы упругости необходимо даже тогда, когда напряжения, возникающие при колебании сооружения, имеют умеренные значения и лежат ниже предела упругости. И особенно большая необходимость появляется в таких расчетах при проектировании защитных сооружений, предназначенных для восприятия удара снаряда, авиабомбы или воздушной волны взрыва. В таких случаях можно мириться с рабочими напряжениями, превосходящими предел упругости.

При определении частот допускается, что при наличии пластических зон в балке пластически деформированный материал оказывает свое влияние главным образом на изменение амплитуды колебания и весьма слабо на изменение частот. Это также согласуется с тем обстоятельством, что рассеяние энергии при колебаниях для некоторого диапазона частот можно считать не зависящим от частоты колебаний, а зависящим от амплитуды деформации и температуры.

С целью популяризировать метод вычисления частот за пределом упругости среди инженерно-технических работников, которым по роду своей деятельности приходится встречаться с такими или аналогичными им расчетами, автор дает схему последовательности вычислений.

Рассмотрим такой случай, когда взрывная волна или другие подобные факторы вызывают (имитируют) действия, аналогичные равномерно распределенной нагрузке интенсивности p на балку длиной $2l$, лежащей на двух опорах шарнирно-закрепленной или свободно опертой концами. Так как рассматриваются частоты собственных колебаний, то здесь имеется в виду указанная нагрузка, как импульс, вызывающий колебания балки. Итак, мы наблюдаем и вычисляем частоты непосредственно — тотчас после имитации взрыва. Из сравнения изгибающих моментов внешних нагрузок p и внутренних сил

упругости материала балки для поперечного сечения ее упруго-пластической зоны [3], [5], находим уравнение в следующем виде:

$$\frac{2}{3} b \sigma_0 (3h^2 - z^2) = \frac{p}{2} (l^2 - y^2), \quad (1)$$

где h и b — размеры профиля балки (рис. 1), а σ_0 — предел текучести на растяжении (пластическая постоянная).

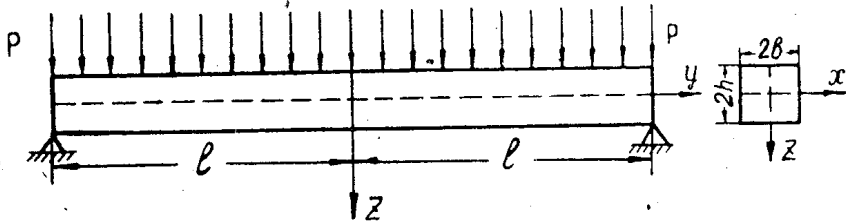


Рис. 1. Осевой разрез балки с указанием приложенной равномерно распределенной нагрузки.

Пластическая деформация впервые возникает в балке в крайних ее волокнах $z = \pm h$ опасного сечения $y = 0$ при критической нагрузке p_0 , которая выразится из формулы (1) и будет равной

$$p_0 = \frac{8}{3} \frac{bh^2}{l^2} \sigma_0. \quad (2)$$

Уравнение границ между упругими и пластическими зонами в сечении $y = 0$, то есть формула (1), преобразуется к каноническому виду

$$\frac{z^2}{3h^2(1-\rho)} - \frac{u^2}{1-\rho} = 1, \quad (3)$$

$$\text{где } u = \frac{y}{l} (-1 \leq u \leq +1), \rho = \frac{p}{4b\sigma_0} \left(\frac{l}{h}\right)^2.$$

Уравнение (3) выражает семейство гипербол с полуосями $h\sqrt{3(1-\rho)}$ и $\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}$, где ρ — параметр.

На рис. 2 пластические зоны заштрихованы. Так как $\frac{p}{p_0} = \frac{3}{2} \left[\frac{p}{4b\sigma_0} \left(\frac{l}{h}\right)^2 \right]$,

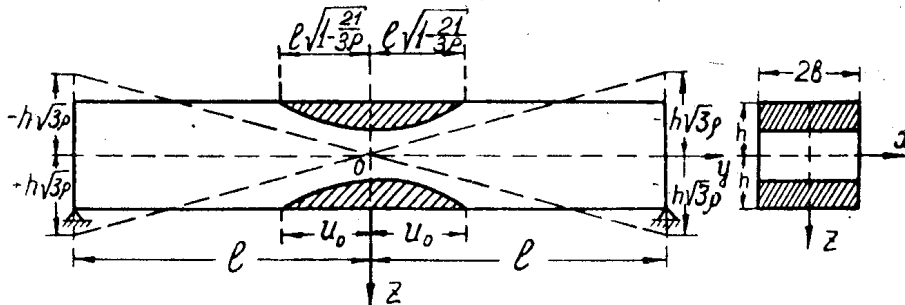


Рис. 2. Осевой разрез балки с указанием пластических зон.

а выражение в квадратных скобках есть ρ , то тогда $x = \frac{3}{2} \rho$, (4)

$$\text{где } x = \frac{p}{p_0}.$$

Для упруго-пластического состояния поперечного сечения балки интенсивность нагрузки p должна изменяться в некотором интервале от $p = p_{\min}$ до $p = p_{\max}$, т. е. $p_{\min} \leq p \leq p_{\max}$. Нетрудно определить эти крайние значения p_{\min} и p_{\max} . В самом деле, для опасного сечения $u = 0$ при $z = \pm h$ (начало текучести) из уравнения зон (3) следует, что $\rho = \frac{2}{3}$. Тогда из (4) $x = 1$, следовательно, $p_{\min} = p_0$ (рис. 3).

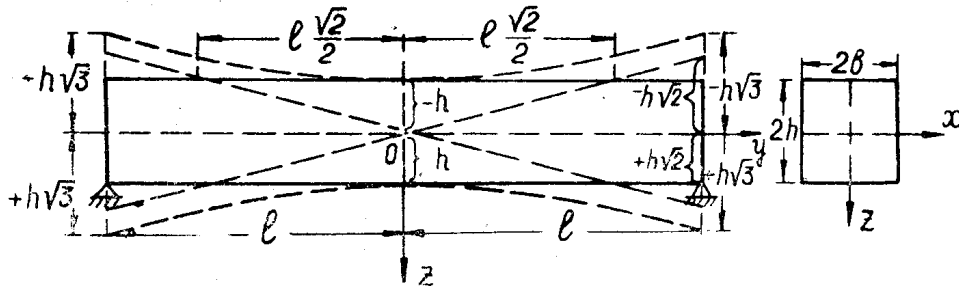


Рис. 3. Осевой разрез балки с указанием границ между упругой и упруго-пластической зонами.

Для определения p_{\max} в опасном сечении ($u = 0$) нужно положить $z = 0$, что будет соответствовать пластическому шарниру, а из уравнения зон (3) найдем $\rho = 1$. Затем из (4) $x = \frac{3}{2}$, следовательно, $p_{\max} = \frac{3}{2} p_0$. Итак, когда $\frac{2}{3} < \rho < 1$, тогда $1 < x < \frac{3}{2}$, т. е. p может принимать значения лишь от p_0 до $\frac{3}{2} p_0$. Для случая $\rho = 1$ или $x = \frac{3}{2}$, что соответствует $p_{\max} = \frac{3}{2} p_0$, т. е. когда в сечении $u = 0$ возникает пластический шарнир. В этом случае уравнение зон (3) превращается в уравнения асимптот гиперболы $z = \pm h \sqrt{3} u$. На рис. 4 зоны для пластического шарнира показаны штриховкой.

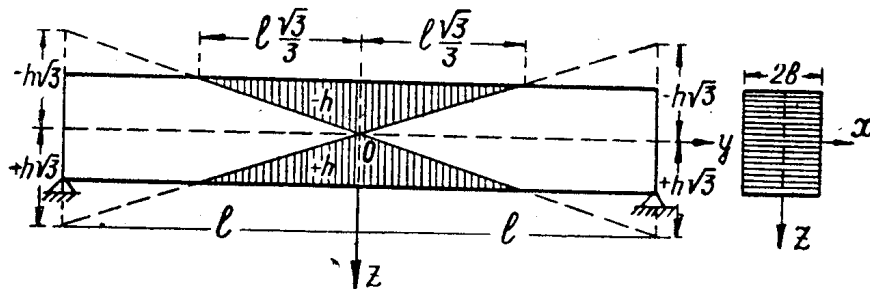


Рис. 4. Осевой разрез балки с указанием зоны при пластическом шарнире.

Уравнение (3) выражает две ветви гиперболы, которые являются границами между пластическими и упругими зонами в балке, причем внутри их содержится пластическая, а вне — упругая область (рис. 2).

Так как в дальнейшем будем пользоваться только параметром x , который будет выполнять роль независимого переменного при изменении значений его через интервал 0,05, то установим зависимость между x и u_0 , где u_0 — граница по пролету внешней части осевого сечения балки между упругой и упруго-пластической зонами.

Полагая в уравнение (3) $z = \pm h$, $u = u_0$, тогда будем иметь

$$|u_0| = \sqrt{1 - \frac{1}{x}}. \quad (5)$$

Уравнению зон (3) можно придать более удобную относительно z явную форму

$$z = h(2x)^{1/2} \left[\frac{3-2x}{2x} + u^2 \right]^{1/2}. \quad (6)$$

Как известно, для произвольного поперечного сечения балки упруго-пластической зоны жесткость на изгиб и погонная единичная масса выразятся так:

$$EI_x(u) = \frac{4}{3} E b z^3, \\ m(u) = 4b \gamma z, \quad (7)$$

где E — модуль Юнга,

а z — аппликата для упругой области поперечного сечения балки, причем $-h \leq z \leq +h$.

Формулы (7) с учетом уравнения зон (6) преобразуются к следующему виду:

$$EI_x(u) = (EI_x)_0 (2x)^{3/2} \left[\frac{3-2x}{2x} + u^2 \right]^{3/2}, \\ m(u) = m_0 (2x)^{1/2} \left[\frac{3-2x}{2x} + u^2 \right]^{1/2}, \quad (8)$$

где

$$(EI_x)_0 = \frac{4}{3} b h^3, \quad m_0 = \gamma S_0 = 4\gamma b h.$$

Пользуясь аппроксимирующей функцией¹⁾

$$Z(u) = u^4 - 6u^2 + 5,$$

которая ранее была вычислена [9], и при наличии (8), формула для собственных частот изгибных колебаний преобразуется к следующему виду:

$$\nu = \frac{48}{l^2} \sqrt{\frac{EI_x(x)}{m(x)}} \sqrt{\frac{(2x)^{3/2} \int_0^{u_0} (\lambda^2 + u^2)^{3/2} (u^2 - 1)^2 du + \int_{u_0}^1 (u^2 - 1)^2 du}{(2x)^{1/2} \int_0^{u_0} (\lambda^2 + u^2) P(u) du + \int_{u_0}^1 P(u) du}}, \quad (9)$$

где $P(u) = u^8 - 12u^6 + 46u^4 - 60u^2 + 25$, $\lambda^2 = \frac{3-2x}{2x}$.

Этой формуле (9) можно придать более удобный для вычислений частот вид

$$\nu = \frac{48}{l^2} \sqrt{\frac{EI_x(x)}{m(x)}} \sqrt{\frac{\Phi(x) + \varphi(u_0)}{F(x) + \psi(u_0)}}, \quad (10)$$

где

$$\varphi(u_0) = \int_{u_0}^1 (u^2 - 1)^2 du = \frac{8}{15} - u_0 + \frac{2}{3} u_0^3 - \frac{1}{5} u_0^5,$$

¹⁾ Метод вычисления аппроксимирующей функции и вывод формулы частот указан в [7] и [8].

$$\psi(u_0) = \int_{u_0}^1 P(u) du = \frac{3968}{315} - 25u_0 + 20u_0^3 - \frac{46}{5}u_0^5 + \frac{12}{7}u_0^7 - \frac{1}{9}u_0^9,$$

$$\Phi(x) = (2x)^{3/2} \int_0^{u_0} (\lambda^2 + u^2)^{3/2} (u^2 - 1)^2 du, \quad F(x) = (2x)^{1/2} \int_0^{u_0} (\lambda^2 + u^2)^{1/2} P(u) du.$$

Последние две квадратуры берутся заменой переменной $u = \lambda \operatorname{tg} t$. После взятия квадратур и других некоторых промежуточных вычислений составлены табл. 1 и 2 для

$$\sigma_1(x) = \Phi(x) + \varphi(u_0), \quad (11)$$

$$\sigma_2(x) = F(x) + \psi(u_0). \quad (12)$$

Т а б л и ц а 1

x	u_0	$\varphi(u_0)$	$\Phi(x)$	$\sigma_1(x)$
1,00	0	0,533333	0	0,533333
1,05	0,218218	0,321940	0,190421	0,512361
1,10	0,301511	0,249601	0,228012	0,477613
1,15	0,361158	0,202350	0,234691	0,437041
1,20	0,408248	0,168170	0,225660	0,393830
1,25	0,447215	0,143962	0,207672	0,351634
1,30	0,480386	0,121730	0,184681	0,306411
1,35	0,509175	0,105319	0,159285	0,264604
1,40	0,534523	0,091901	0,133501	0,225402
1,45	0,557086	0,080782	0,109072	0,189854
1,50	0,577350	0,071450	0,088210	0,159660

Т а б л и ц а 2

x	u_0	$\Psi(u_0)$	$F(x)$	$\sigma_2(x)$
1,00	0	12,59683	0	12,59683
1,05	0,218218	7,34464	5,07069	12,41533
1,10	0,301511	5,58474	6,5072	12,09446
1,15	0,361158	4,45488	7,23325	11,68808
1,20	0,408248	3,65032	7,56230	11,21292
1,25	0,447215	3,04690	7,62606	10,67296
1,30	0,480386	2,57888	7,48622	10,06510
1,35	0,509175	2,20771	7,1720	9,37991
1,40	0,534523	1,90787	6,68482	8,5269
1,45	0,557086	1,66189	5,98489	7,64678
1,50	0,577350	1,45777	4,79060	6,24837

Формула частот (10) при наличии (11) и (12) упростится и примет такой вид:

$$\nu = \frac{\nu_0}{l^2} \sqrt{\frac{EI_r(x)}{m(x)}}, \quad (13)$$

где

$$\nu_0 = 48 \sqrt{\frac{\sigma_1(x)}{\sigma_2(x)}}. \quad (14)$$

Для безразмерной величины ν_0 , согласно формуле (14), составлен график (рис. 5), а ее значения занесены в табл. 3. Так как в формуле (13) $EI_x(x) = \frac{4}{3} Ebz^3$ и $m(x) = 4\gamma bz$ соответ-

ствуют среднему поперечному сечению балки, то будет

$$\nu = \frac{\nu_0}{l^2} z \sqrt{\frac{E}{3\gamma}}, \quad (15)$$

где z также соответствует срединному поперечному сечению балки. Но тогда z из формулы (6) при $u = 0$, то есть для опасного сечения посередине балки, выразится в таком виде:

$$z = h \sqrt{3 - 2x}. \quad (16)$$

Если найденное значение (16) для z подставим в (15), то будем иметь следующее:

$$\nu = \frac{h}{l^2} \sqrt{\frac{E}{3\gamma}} \nu_x, \quad (17)$$

где

$$\nu_x = \nu_0 \sqrt{3 - 2x}. \quad (18)$$

В формуле (17) для данной балки множитель $\frac{h}{l^2} \sqrt{\frac{E}{3\gamma}} = \text{const}$,

а ν_x — безразмерная мажорирующая функция, производящая частоты за пределом упругости.

Согласно формуле (18) составлена табл. 3 и график (рис. 6).

Здесь погрешность первого приближения составляет 0,07%, а второго — 0,01%. Аналогично решается задача вычисления собственных частот, когда балка загружена равномерно распределенной нагрузкой лишь по некоторой части пролета.

В заключение следует отметить, что практически вычисление частот за пределом упру-

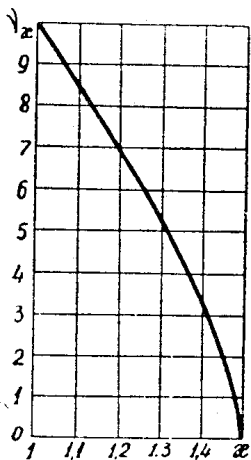


Рис. 6. График производящей мажорирующей функции $\nu_x = \nu_0 \sqrt{3 - 2x}$.

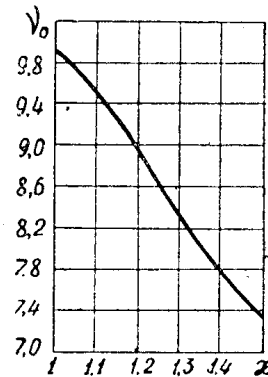


Рис. 5. График функции $\nu_0 = 48 \sqrt{\frac{\sigma_1(x)}{\sigma_2(x)}}$.

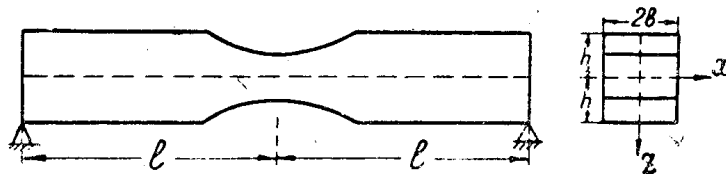


Рис. 7. Осевой разрез балки с выточками, соответствующими удалению пластической массы.

ги (согласно гипотезе) сводится к отысканию частот балки с выточками (рис. 7).

Таблица 3

x	$\frac{\sigma_1(x)}{\sigma_2(x)}$	$\sqrt{\frac{\sigma_1(x)}{\sigma_2(x)}}$	ν_0	$\sqrt{3-2x}$	ν_x	
					первое	второе
1,00	0,0423385	0,205763	9,8766	1	9,8766	9,8709
1,05	0,0412684	0,203146	9,7510	0,94868	9,2506	9,2461
1,10	0,0394899	0,198721	9,5386	0,89443	8,5316	8,5283
1,15	0,0373919	0,193370	9,2818	0,83666	7,7657	7,7647
1,20	0,0351229	0,187411	8,9957	0,77460	6,9681	6,9671
1,25	0,0329457	0,181510	8,7125	0,70711	6,1607	6,1599
1,30	0,0304428	0,174479	8,3750	0,63246	5,2969	5,2961
1,35	0,0282096	0,167957	8,0620	0,54772	4,4157	4,4150
1,40	0,0262316	0,161962	7,7742	0,44721	3,4767	3,4761
1,45	0,0248275	0,157567	7,5632	0,31623	2,3917	2,3912
1,50	0,0255523	0,159851	7,6728	0	0	0

ЛИТЕРАТУРА

1. И. В. А н а н ь е в. Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем. ОГИЗ Гостехиздат, М., 1946.
2. И. М. Б а б а к о в. Теория колебаний. Гос. изд-во ТТЛ, М., 1958.
3. А. Н а д а н. Пластичность (механика пластического состояния веществ). Перевод с английского. Изд-во иностр. лит-ры, М., 1936.
4. И. М. Р а б и н о в и ч. К динамическому расчету сооружений за пределом упругости. Исследования по динамике сооружений, Сборник статей. Стройиздат, Л., 1947.
5. В. В. С о к о л о в с к и й. Теория пластичности. Изд-во АН СССР, М., 1946.
6. А. П. Ф и л и п п о в. Колебания упругих систем. Изд-во АН УССР, Киев, 1956.
7. Н. К. В и т в и ц к и й. Приближенный метод определения частот собственных изгибных, крутильных и совместных колебаний балок переменного сечения. Труды ТЭМИИТ, т. XXV, изд-во ТГУ, Томск, 1958.
8. Н. К. В и т в и ц к и й. Определение собственных частот крутильных колебаний балок переменного сечения. Труды ТЭМИИТ, т. XXVIII, изд-во ТГУ, Томск, 1959.
9. Н. К. В и т в и ц к и й. Определение частот собственных изгибных колебаний балок за пределом упругости при наличии пластических зон. Труды ТЭМИИТ, т. XXXIV, изд-во ТГУ, Томск, 1962.