ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 154 1967

ДВА СПОСОБА РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЛУЧЕВОЙ ЗАСЕЧКИ НА ШАРЕ

Б. Ф. КРУТОЙ

(Представлена кафедрой инженерной и вычислительной математики)

Прямой лучевой засечкой на шаре назовем следующую задачу: даны широты φ_1, φ_2 и долготы λ_1, λ_2 исходных точек 1, 2 на шаре, а также даны азимуты $\alpha_{1.3}$, $\alpha_{2.3}$ засекающих лучей $\overset{\uparrow}{\odot}Л_{1.3}$, $\overset{\uparrow}{\odot}Л_{2.3}$ с точек 1, 2 на определяемую точку 3; найти широту φ_3 и долготу λ_3 точки 3, а также найти засекающие стороны $\sigma_{1.3}$, $\sigma_{2.3}$ (рис. 1).

Для решения указанной задачи может быть предложено два способа.

а) По исходным данным φ_1, λ_1, $\alpha_{1\cdot3}$ и φ_2, λ_2, $\alpha_{2.3}$ вычисляются непосредственно только координаты φ_3, λ_3 определяемой точки 3; засекающие же стороны $\sigma_{1.3}$, $\sigma_{2.3}$ находятся через исходные данные и полученные значения φ_3, λ_3.

б) По указанным исходным данным вычисляются в первую очередь засекающие стороны $\sigma_{1.3}$, $\sigma_{2.3}$, а затем уже координаты φ_3, λ_3 точки 3.

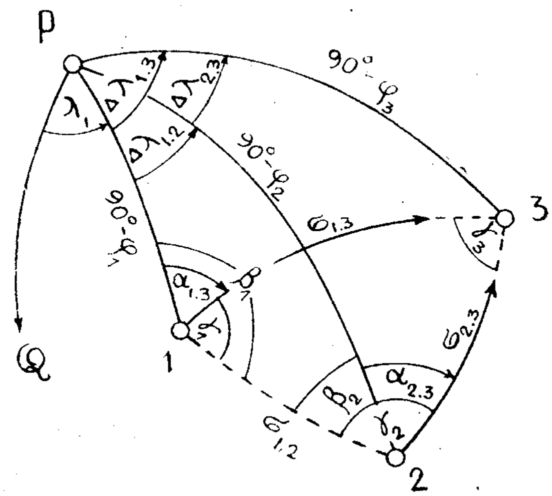

Рис. 1.

Ниже дается решение прямой лучевой засечки на шаре обоими способами. Отметим, что выведенные здесь конечные выражения были использованы в [1] при получении приближенных значений для геодезической широты B_3 определяемой точки 3 и расстояний $s_{1.3}$, $s_{2.3}$ в прямой лучевой засечке, заданной на земном сфероиде.

1. Первый способ

На рис. 1 точки 1, 2 — исходные, точка 3 — определяемая. Точка P — полюс для сферических координат φ, λ; PQ — начальный меридиан при счете долгот λ. Кроме того, введены обозначения:

$$1)\ \ \Theta_i = 90^\circ - \varphi_i; \quad 2)\ \ \Delta\lambda_{ij} = \lambda_j - \lambda_i. \tag{1}$$

Наша задача будет решена с поверкой, если для вычисления двух искомых величин φ_3, λ_3 мы возьмем следующие 3 исходные выражения, вытекающие из рассмотрения рис. 1:

$$\begin{aligned}
&1)\quad \operatorname{ctg}\Theta_3 \sin\Theta_1 - \operatorname{ctg}\alpha_{1.3}\sin\Delta\lambda_{1.3} = \cos\Theta_1\cos\Delta\lambda_{1.3},\\
&2)\quad \operatorname{ctg}\Theta_3 \sin\Theta_2 - \operatorname{ctg}\alpha_{2.3}\sin\Delta\lambda_{2.3} = \cos\Theta_2\cos\Delta\lambda_{2.3},\\
&3)\quad \Delta\lambda_{1.2} = \Delta\lambda_{1.3} - \Delta\lambda_{2.3}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Отсюда найдем двойное представление для $\operatorname{ctg}\Theta_3$:

$$\operatorname{ctg}\Theta_3 = \frac{\operatorname{ctg}\alpha_{1.3}\sin\Delta\lambda_{1.3} + \cos\Theta_1\cos\Delta\lambda_{1.3}}{\sin\Theta_1} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha_{2.3}\sin\Delta\lambda_{2.3} + \cos\Theta_2\cos\Delta\lambda_{2.3}}{\sin\Theta_2}. \tag{3}$$

Соотношение (3) не может быть, однако, использовано сразу для определения Θ_3, так как выражает Θ_3 или через неизвестное $\Delta\lambda_{1.3}$, или через неизвестное $\Delta\lambda_{2.3}$. Поэтому из последнего звена в цепи равенств (3) исключим предварительно $\Delta\lambda_{2.3}$, пользуясь соотношением (2.3). Мы будем иметь последовательно:

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha_{1.3}\sin\Delta\lambda_{1.3}}{\sin\Theta_1} + \operatorname{ctg}\Theta_1\cos\Delta\lambda_{1.3} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha_{2.3}}{\sin\Theta_2}(\sin\Delta\lambda_{1.3}\cos\Delta\lambda_{1.2} -$$

$$- \sin\Delta\lambda_{1.2}\cos\Delta\lambda_{1.3}) + \operatorname{ctg}\Theta_2(\cos\Delta\lambda_{1.3}\cos\Delta\lambda_{1.2} + \sin\Delta\lambda_{1.3}\sin\Delta\lambda_{1.2}) =$$

$$= \left(\frac{\operatorname{ctg}\alpha_{1.3}}{\sin\Theta_1} - \frac{\operatorname{ctg}\alpha_{2.3}}{\sin\Theta_2}\cos\Delta\lambda_{1.2} - \operatorname{ctg}\Theta_2\sin\Delta\lambda_{1.2}\right)\sin\Delta\lambda_{1.3} =$$

$$= \left(-\frac{\operatorname{ctg}\alpha_{2.3}}{\sin\Theta_2}\sin\Delta\lambda_{1.2} + \operatorname{ctg}\Theta_2\cos\Delta\lambda_{1.2} - \operatorname{ctg}\Theta_1\right)\cos\Delta\lambda_{1.3}.$$

Отсюда получаем следующее выражение для прямого вычисления неизвестного $\Delta\lambda_{1.3}$ через исходные данные:

$$\operatorname{tg}\Delta\lambda_{1.3} = \frac{\cos\Theta_2\cos\Delta\lambda_{1.2} - \operatorname{ctg}\alpha_{2.3}\sin\Delta\lambda_{1.2} - \operatorname{ctg}\Theta_1\sin\Theta_2}{\operatorname{ctg}\alpha_{1.3}\dfrac{\sin\Theta_2}{\sin\Theta_1} - \operatorname{ctg}\alpha_{2.3}\cos\Delta\lambda_{1.2} - \cos\Theta_2\sin\Delta\lambda_{1.2}}. \tag{4}$$

Определив неизвестное $\Delta\lambda_{1.3}$ согласно (4), находим затем из (2.3) второе неизвестное $\Delta\lambda_{2.3}$:

$$\Delta\lambda_{2.3} = \Delta\lambda_{1.3} - \Delta\lambda_{1.2}, \tag{2.3;5}$$

после чего дважды вычисляем последнее неизвестное Θ_3 из соотношения (3). Искомые φ_3, λ_3 получаем из соотношений (1)—также дважды:

$$1)\quad \varphi_3 = 90^\circ - \Theta_3^1 = 90^\circ - \Theta_3^2;\quad 2)\quad \lambda_3 = \lambda_1 + \Delta\lambda_{1.3} = \lambda_2 + \Delta\lambda_{2.3}, \tag{6}$$

где Θ_3^1, Θ_3^2 — значения Θ_3, найденные согласно (3) из решения треугольников 1 Р3 и 2Р3.

В заключение из тех же треугольников 1Р3 и 2Р3 вычисляем засекающие стороны $\sigma_{1.3}$ и $\sigma_{2.3}$:

$$1)\quad \sin\sigma_{1.3} = \frac{\sin\Theta_3}{\sin\Delta\lambda_{1.3}}\sin\alpha_{1.3};\qquad 2)\quad \sin\sigma_{2.3} = \frac{\sin\Theta_3}{\sin\Delta\lambda_{2.3}}\sin\alpha_{2.3}. \tag{7}$$

2. Второй способ

Зная широты φ_1, φ_2 и долготы λ_1, λ_2 опорных точек 1, 2, решим сперва треугольник 1 $P2$, в котором найдем углы β_1, β_2 при точках 1, 2 и сторону $\sigma_{1.2}$. В целях сокращения записи, кроме ранее использованных обозначений (1), введем еще следующие дополнительные обозначения:

$$1)\quad \frac{1}{2}(\Theta_1 + \Theta_2) = \Theta_{1.2};\quad 2)\quad \frac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta_2) = \delta\Theta_{1.2}; \tag{8}$$

$$3)\ \frac{1}{2}\Delta\lambda_{1.2} = \delta\lambda_{1.2}; \qquad 4)\ \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) = \beta_{1.2}; \qquad 5)\ \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2) = \delta\beta_{1.2}. \qquad (8)$$

Тогда искомые углы β_1, β_2 и сторона $\sigma_{1.2}$ в треугольнике $1P2$ могут быть получены из цепи соотношений:

$$1)\ \frac{\sin\delta\Theta_{1.2}\,\mathrm{ctg}\,\delta\lambda_{1.2}}{\sin\Theta_{1.2}} = \mathrm{tg}\,\delta\beta_{1.2}; \qquad 2)\ \frac{\cos\Theta_{1.2}\,\mathrm{ctg}\,\delta\lambda_{1.2}}{\cos\Theta_{1.2}} = \mathrm{tg}\beta_{1.2};$$

$$3)\ \beta_{1.2} + \delta\beta_{1.2} = \beta_1; \quad 4)\ \beta_{1.2} - \delta\beta_{1.2} = \beta_2; \qquad (9)$$

$$5)\ \frac{\sin\Theta_1}{\sin\beta_2}\sin\Delta\lambda_{1.2} = \frac{\sin\Theta_2}{\sin\beta_1}\sin\Delta\lambda_{1.2} = \sin\sigma_{1.2}.$$

Теперь вычислим остальные две стороны $\sigma_{1.3}$, $\sigma_{2.3}$ в треугольнике 123. С этой целью найдем предварительно углы γ_1, γ_2 при вершинах 1, 2 указанного треугольника. Из рис. 1 видно, что

$$1)\ \gamma_1 = \beta_1 - \alpha_{1.3}; \quad 2)\ \gamma_2 = \beta_2 + \alpha_{2.3}. \qquad (10)$$

Введя далее обозначения:

$$1)\ \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) = \gamma_{1.2}; \qquad 2)\ \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2) = \delta\gamma_{1.2}; \quad 3)\ \frac{1}{2}\sigma_{1.2} = \delta\sigma_{1.2}, \qquad (11)$$

последние две стороны $\sigma_{1.3}$, $\sigma_{2.3}$ и третий угол γ_3 при вершине 3 в треугольнике 123 определим из последовательности равенств:

$$1)\ \frac{\sin\delta\gamma_{1.2}\,\mathrm{tg}\,\delta\sigma_{1.2}}{\sin\gamma_{1.2}} = \mathrm{tg}\,\delta\sigma_0; \qquad 2)\ \frac{\cos\gamma_{1.2}\,\mathrm{tg}\,\delta\sigma_{1.2}}{\cos\gamma_{1.2}} = \mathrm{tg}\sigma_0.$$

$$3)\ \sigma_0 + \delta\sigma_{1.2} = \sigma_{1.3}; \qquad 4)\ \sigma_0 - \delta\sigma_{1.2} = \sigma_{2.3}; \qquad (12)$$

$$5)\ \frac{\sin\gamma_1}{\sin\sigma_{2.3}}\sin\sigma_{1.2} = \frac{\sin\gamma_2}{\sin\sigma_{1.3}}\sin\sigma_{1.2} = \sin\gamma_3.$$

Кроме того, вычислим сферический избыток ε треугольника 123:

$$\varepsilon = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3. \qquad (13)$$

Выполнив все предшествующие расчеты, мы можем наконец найти дважды широту φ_3 и долготу λ_3 определяемой точки 3:

$$1)\ \mathrm{ctg}\Delta\lambda_{1.3} = \frac{\mathrm{ctg}\sigma_{1.3}\sin\Theta_1 - \cos\alpha_{1.3}\cos\Theta_1}{\sin\alpha_{1.3}};$$

$$2)\ \mathrm{ctg}\,\Delta\lambda_{2.3} = \frac{\mathrm{ctg}\,\sigma_{2.3}\sin\Theta_2 - \cos\alpha_{2.3}\cos\Theta_2}{\sin\alpha_{2.3}};$$

$$3)\ \cos\varphi_3 = \sin\Theta_3^1 = \frac{\sin\Delta\lambda_{1.3}}{\sin\sigma_{1.3}}\sin\alpha_{1.3} = \frac{\sin\Delta\lambda_{2.3}}{\sin\sigma_{2.3}}\sin\alpha_{2.3} = \sin\Theta_3^2; \qquad (14)$$

$$4)\ \lambda_3 = \lambda_3^1 = \lambda_1 + \Delta\lambda_{1.3} = \lambda_2 + \Delta\lambda_{2.3} = \lambda_3^2.$$

Сходимость двух значений φ_3^1, φ_3^2 и λ_3^1, λ_3^2 широты φ_3 и долготы λ_3 для определяемой точки 3 служит хорошей общей поверкой правильности всех проведенных выше вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Ф. Крутой. Общие способы решения основных расчетных задач на земном сфероиде. Известия ТПИ, т. 131, 1965.
2. Н. Н. Степанов. Сферическая тригонометрия. Гостехиздат, 1948.