ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 154 1967

НОВЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ РАССТОЯНИЯ $s_{1.2}$ И РАЗНОСТИ ДОЛГОТ $\Delta L_{1.2}$ НА ЗЕМНОМ СФЕРОИДЕ

Б. Ф. КРУТОЙ

(Представлена в мае 1966 года математической секцией научно-технической конференции АВТФ, посвященной 70-летию ТПИ)

В статье [1] были указаны, а в статье [2] получены следующие замкнутые выражения применительно к земному сфероиду для расстояния $s_{1.2}$ между точками 1, 2 и для разности долгот $\Delta L_{1.2}$ тех же точек 1, 2:

$$1)\ \beta_{1.2} s_{1.2} = a\mu_{1.2} \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{(1-\kappa_{1.2}^2 \sin^2\varphi)^{3/2}};$$

$$2)\ \beta_{1.2}\, \Delta L_{1.2} = (\nu\mu)_{1.2} \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{(1-m_{1.2}^2 \sin^2\varphi)\sqrt{1-\kappa_{1.2}^2 \sin^2\varphi}};$$

$$3)\ s_{1.2} = a\nu_{1.2} \int\limits_{A_{1.2}}^{A'_{2.1}} \sqrt{\frac{\sin^2 A - e^2\nu_{1.2}^2}{\sin^2 A - \nu_{1.2}^2}} \operatorname{cosec}^2 A\, dA;$$

$$4)\ \Delta L'_{1.2} = \int\limits_{A_{1.2}}^{A'_{2.1}} \sqrt{\frac{\sin^2 A - e^2\nu_{1.2}^2}{\sin^2 A - \nu_{1.2}^2}}\, dA.$$

Здесь $A_{1.2}$, $A_{2.1}$ — азимуты выравненной кривой $\Gamma_{1.2}$ в точках 1, 2; a^2 и e^2 — большая полуось и эксцентриситет земного сфероида; $A'_{2.1} = A_{2.1} \pm 180°$. Что касается переменной интегрирования φ, пределов интегрирования φ_1, φ_2 и параметров $\nu_{1.2}$, $\mu_{1.2}$, $m_{1.2}^2$ и $\kappa_{1.2}^2$, то они являются функциями широты B, ее пределов B_1, B_2 и азимута $A_{1.2}$, выравненной кривой $\Gamma_{1.2}$ в точке 1 сфероида. Наконец, $\beta_{1.2} =$ знак $\cos A_{1.2} =$ знак $(B_2 - B_1) =$ знак $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pm 1$.

Путем разложения замкнутых выражений (1.1) — (1.2) в ряд по степеням малого параметра $\kappa^2 \leqslant e^2$ в статье [2] были получены рабочие выражения для решения прямой и обратной задач относительно выравненной кривой $\Gamma_{1.2}$ любой протяженности, даже если кривая $\Gamma_{1.2}$ описывает ряд витков вокруг земного сфероида. В этой же статье путем использования указанных разложений для (1.1) — (1.2) в ряд по степеням κ^2 были предложены 2 общих способа решения прямой сфероидической засечки определяемой точки 3 с заданных точек 1,2: 1) когда вычисляются только координаты B_3, L_3 точки 3; 2) когда одновременно с координатами B_3, L_3 находятся длины $s_{1.3}, s_{2.3}$ засекающих сторон 1.3, 2.3. Решение всех этих задач существенно облегчается, если использовать составленные асп. Лесняком А. Г. таблицы [3] вспомогательных величин, входящих в расчетные выражения. Впрочем сами расчетные выражения имеют такое строение, что они сравнительно просто могут быть запрограммированы для непосредственного решения на ЦВМ указанных задач без применения вообще каких бы то ни было таблиц.

В противоположность рассмотренным выше замкнутым выражениям (1.1) — (1.2) для $s_{1.2}$ и $\Delta L_{1.2}$ выражения (1.3) и (1.4) этих величин могут быть использованы при решении прямой и обратной задач только в качестве поверочных, так как их непосредственное применение для указанной цели оказывается неудобным. Более пригодными являются выражения (1.3) — (1.4) для решения прямой сфероидической засечки, так как эти выражения содержат только один легко вычисляемый параметр $\nu_{1.2}$, а верхний предел $A'_{2.1}$ может быть найден точно и просто по приближенной широте $B_3^{(0)}$ определяемой точки 3. Само же решение прямой сфероидической засечки производится, как обычно, путем последовательных приближений. Во всех этих случаях требуется разработка действенных способов вычисления $s_{1.2}$ и $\Delta L_{1.2}$ согласно (1.3) — (1.4), что и является целью данной статьи.

Рассматриваемые замкнутые выражения (1.3) — (1.4) для расстояния $s_{1.2}$ и разности долгот $\Delta L_{1.2}$ являются эллиптическими интегралами общего вида. Расчет этих интегралов может быть выполнен несколькими способами и в первую очередь — путем их представления через приведенные по Лежандру эллиптические интегралы F, E и Π, для которых имеются точные и достаточно подробные таблицы. Однако соответствующие выражения общих интегралов (1.3) — (1.4) через указанные приведенные интегралы F, E и Π оказываются довольно сложными. Кроме того, вычисление самих приведенных интегралов по таблицам является далеко не простым делом, особенно для интегралов Π, так как требует интерполирования с разностями 4—6 порядка, если получать значения интегралов F, E и Π с 8 десятичными знаками.

Более приемлемым является расчет эллиптических интегралов общего вида (1.3)—(1.4) с помощью одного из существующих способов численного интегрирования, например—по Гауссу. Однако и здесь вычисления оказываются довольно-таки сложными, если их вести с точностью до 8 десятичных знаков.

Поэтому, если учесть, что $e^2 = 0{,}0066934216$ для сфероида Красовского и что согласно [1]

$$\nu_{1.2} = \frac{r_1}{a} \sin A_{1.2} = \sqrt{1 + e'^2}\, \frac{\cos B_1 \sin A_{1.2}}{V_1} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + e'^2}}{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B_1}} \cos B_1 \sin A_{1.2} \leqslant 1, \tag{2}$$

то более выгодным будет вычисление интегралов (1.3) — (1.4) путем разложения их подынтегральных выражений в ряд по степеням $e^2\nu_{1.2}^2$. Выполняя такое разложение, получим:

$$1)\ s_{1.2} = a\nu_{1.2}\sum_{\varkappa=0}^{n}\binom{1/2}{\varkappa}(-e^2\nu_{1.2}^2)^{\varkappa}\int_{A_{1.2}}^{A'_{2.1}}\frac{\csc^{2\varkappa+1}A}{\sqrt{\sin^2 A-\nu_{1.2}^2}}\,dA,$$

$$2)\ \beta_{1.2}\Delta L_{1.2} = \sum_{\varkappa=0}^{n}\binom{1/2}{\varkappa}(-e^2\nu_{1.2}^2)^{\varkappa}\int_{A_{1.2}}^{A'_{2.1}}\frac{\csc^{2\varkappa-1}A}{\sqrt{\sin^2 A-\nu_{1.2}^2}}\,dA, \tag{3}$$

где согласно [1]

$$1)\ \binom{m}{\varkappa}=\frac{m(m-1)\dots[m-(\varkappa-1)]}{1.2\dots\varkappa},\qquad \binom{m}{0}=\binom{m}{m}=1;$$

$$2)\ \mu_{1.2}=\frac{1-e^2}{\sqrt{1-e^2\nu_{1.2}^2}}. \tag{4}$$

Вычислим интегралы, входящие в разложения (3).

Подсчитаем сначала первый член разложения (3.2), который получается при $\varkappa=0$. Вводя подстановку $x=\cos A$, найдем:

$$\Delta\lambda=\int_{A_{1.2}}^{A'_{2.1}}\frac{\csc^{-1}A\,dA}{\sqrt{\sin^2A-\nu_{1.2}^2}}=\arcsin\frac{\cos A_{1.2}}{\sqrt{1-\nu_{1.2}^2}}-\arcsin\frac{\cos A'_{2.1}}{\sqrt{1-\nu_{1.2}^2}}=$$

$$=\arcsin\frac{\cos A_{1.2}}{\cos A_{1.2}^{э}}-\arcsin\frac{\cos A'_{2.1}}{\cos A_{1.2}^{э}}, \tag{5}$$

где $A_{1.2}^{э}$ есть азимут выравненной кривой $\Gamma_{1.2}$ на экваторе, так как согласно (2) параметр $\nu_{1.2}=\sin A_{1.2}^{э}$ при $B_1=0$.

Подсчитаем теперь другие интегралы, входящие в (3). Вводя в эти интегралы подстановку $\sin^2 A=x$ и обозначая $2\varkappa-1$, $2\varkappa+1$ через $2s+1$, где $s=0,1,2,\dots$, получим прежде всего:

$$I_s=\int_{A_{1.2}}^{A'_{2.1}}\frac{\csc^{2s+1}A\,dA}{\sqrt{\sin^2A-\nu_{1.2}^2}}=\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x^{s+1}\sqrt{(1+x)(x-\nu_{1.2}^2)}}, \tag{6}$$

где $x_1=\sin^2A_{1.2}$, $x_2=\sin^2A'_{2.1}$. Выполним теперь вторую подстановку $x=t^{-1}$; тогда

$$I_s=-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{t^s dt}{\sqrt{-\nu_{1.2}^2\,t^2+(1+\nu_{1.2}^2)\,t-1}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{t^s dt}{\sqrt{at^2+bt+c}}=-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{t^s dt}{\sqrt{R(t)}}, \tag{7}$$

где

$$1)\ t = x^{-1} = \csc^2 A,\ 2)\ t_1 = \csc^2 A_{1.2},\ 3)\ t_2 = \csc^2 A'_{2.1},$$
$$4)\ a = -\nu_{1.2}^2,\ 5)\ b = 1 + \nu_{1.2}^2,\ 6)\ c = -1,\ 7)\ R(t) = at^2 + bt + c. \tag{8}$$

Согласно [4] для интегралов I_s будем иметь следуюшие выражения:

$$1)\ I_0 = \int\limits_{A_{1.2}}^{A'_{2.1}} \frac{\csc A\,dA}{\sqrt{\sin^2 A - \nu_{1.2}^2}} = S(t)\Big|_{t_1}^{t_2},\quad S(t) = \frac{1}{2\nu_{1.2}^2}\arcsin\frac{(1+\nu_{1.2}^2) - 2\nu_{1.2}^2 t}{1-\nu_{1.2}^2};$$

$$2)\ I_1 = \int\limits_{A_{1.2}}^{A'_{2.1}} \frac{\csc^3 A\,dA}{\sqrt{\sin^2 A - \nu_{1.2}^2}} = \frac{1}{2\nu_{1.2}^2}\left[\sqrt{R(t)} + (1+\nu_{1.2}^2)\,S(t)\right]\Big|_{t_1}^{t_2}.$$

$$3)\ I_2 = \int\limits_{A_{1.2}}^{A'_{2.1}} \frac{\csc^5 A\,dA}{\sqrt{\sin^2 A - \nu_{1.2}^2}} = \frac{1}{4\nu_{1.2}^2}\left\{\left[t + \frac{3(1+\nu_{1.2}^2)}{2\nu_{1.2}^2}\right]\sqrt{R(t)} + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{3(1+\nu_{1.2}^2)^2}{2\nu_{1.2}^2} - 2\right] S(t)\right\}\Big|_{t_1}^{t_2}. \tag{9}$$

$$4)\ I_3 = \int\limits_{A_{1.2}}^{A'_{2.1}} \frac{\csc^7 A\,dA}{\sqrt{\sin^2 A - \nu_{2.1}^2}} = \frac{1}{2\nu_{1.2}^2}\left\{\left[\frac{t^2}{3} + \frac{5(1+\nu_{1.2}^2)\,t}{12\nu_{1.2}^2} + \frac{5(1+\nu_{1.2}^2)^2}{8\nu_{1.2}^4} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{2}{3\nu_{1.2}^2}\right]\sqrt{R(t)} - \frac{(1+\nu_{1.2}^2)}{2\nu_{1.2}^2}\left[3 - \frac{5(1+\nu_{1.2}^2)^2}{4\nu_{1.2}^2}\right] S(t)\right\}\Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Заметим еще, что интеграл $\Delta\lambda$, определяемый согласно (5), может быть представлен также в виде (8), если в $\Delta\lambda$ ввести подстановку $\sin^2 A = x$ и затем в (6) положить $s = -1$. Тогда мы получим:

$$\Delta\lambda = \int\limits_{A_{1.2}}^{A'_{2.1}} \frac{\csc^{-1} A\,dA}{\sqrt{\sin^2 A - \nu_{1.2}^2}} = \frac{1}{2}\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(x-\nu_{1.2}^2)}} = \frac{S(x)}{2}\Big|_{x_1}^{x_2} = I_{-1}, \tag{10}$$

где

$$1)\ x_1 = \sin^2 A_{1.2},\ 2)\ x_2 = \sin^2 A'_{2.1}. \tag{11}$$

Опираясь на полученные выше рабочие выражения (5), (9), мы можем теперь представить в следующем окончательном виде разложения (3) для расстояния $s_{1.2}$ и разности долгот $\Delta L_{1.2}$ точек 1, 2 сфероида:

$$1)\ s_{1.2} = a\nu_{1.2}\sum_{\varkappa=0}^{n}\binom{1/2}{\varkappa}(-e^2\nu_{1.2}^2)^{\varkappa} I_{\varkappa} \doteq a\nu_{1.2}\left[I_0 - \frac{e^2\nu_{1.2}^2}{2} I_1 - \frac{e^4\nu_{1.2}^4}{8} I_2 - \right.$$
$$\left. - \frac{e^6\nu_{1.2}^6}{16} I_3 - \ldots\right]; \tag{12}$$

$$2)\ \beta_{1.2}\Delta L_{1.2} = \Delta\lambda + \sum_{\varkappa=0}^{n} \binom{1/2}{\varkappa+1} (-e^2\nu_{1.2}^2)^{\varkappa+1} I_\varkappa = \Delta\lambda - \frac{e^2\nu_{1.2}^2}{2} I_0 - \frac{e^4\nu_{1.2}^4}{8} I_1 - - \frac{e^6\nu_{1.2}^6}{16} I_2 - \ldots \Big]. \qquad (13)$$

Разложения (12) являются новыми, и они с успехом могут быть использованы для проверки значений $s_{1.2}$ и $\Delta L_{1.2}$, найденных согласно (1.1) — (1.2). Следует однако заметить, что выражение (12.) не пригодно для подсчета $s_{1.2}$ вдоль меридиана, т. е. при $A_{1.2} = A_{2.1} = 0$, а выражения (12) и (13) не годятся для подсчета $s_{1.2}$ и $\Delta L_{1.2}$ вдоль экватора, т. е. при $A_{1.2} = A'_{2.1} = 90°$. Естественно, что и для коротких дуг $\Delta\Gamma_{1.2}$, близких по направлению к меридиану или экватору, разложения (12) дают также недостаточную точность.

Что касается применения разложений (12) для решения прямой сфероидической засечки, то оно ничем существенным не отличается от использования для этой цели разложений, полученных на основании замкнутых выражений (1.1) — (1.2). Можно лишь отметить, что вычисление по засекающим сторонам i_3 значений s_{i3} и ΔL_{i3} согласно (12) требует меньше работы, чем при использовании разложений, полученных из (1.1) — (1.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Ф. Крутой. Общие способы решения основных расчетных задач на поверхности земного сфероида. Томск, известия ТПИ, том 118, 1963.

2. Б. Ф. Крутой. Общие способы решения основных расчетных задач на земном сфероиде. Томск, Известия ТПИ, том 131, 1965.

3. А. Г. Лесняк. Вспомогательные таблицы для решения основных геодезических задач на земном сфероиде по способу Б. Ф. Крутого. Томск, Известия ТПИ, том 154, 1966.

4. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва, Физматгиз, 1963.