ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 154 1967

НОМОГРАММЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОПРАВКИ ЗА УКЛОНЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИНИИ ОТ ПРЯМОГО НОРМАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

А. Г. ЛЕСНЯК

(Представлена математической секцией научно-технической конференции АВТФ в мае 1966 года, посвященной 70-летию ТПИ)

Формула поправки уклонения геодезической линии от прямого нормального сечения в той форме, в какой ее дал Ф. Н. Красовский, выглядит так:

$$\delta'' = \frac{\eta^2 \rho''}{6}\left(\frac{S}{N}\right)^2 \sin A_{1.2}\left[\cos A_{1.2} - \frac{S}{4N}\operatorname{tg} B_1 + \frac{S^2}{6N^2}\cos A_{1.2} + \eta^2 \cos^3 A_{1.2}\right], \tag{1}$$

где $\eta^2 = e'^2 \cos^2 B_1$, $N = \dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}}$, S — расстояние, $\rho'' = 206264{,}8$, $A_{1.2}$ — азимут геодезической линии в точке с широтой B_1.

Эта формула имеет высокую точность порядка 1000 *км*.

Вычисление δ'', как видно из (1), требует значительного объема вычислений. Номографирование этой формулы позволяет полностью устранить вычислительный процесс. Номографирование (1) будем вести по частям, для чего формулу (1) представим в виде:

$$\delta'' = \frac{e'^2 \rho''}{12}\sigma^2 \sin 2A_{1.2}\cos^2 B_1 - \frac{e'^2 \rho''}{48}\sigma^3 \sin A_{1.2}\cos 2B_1 + \frac{e'^2 \rho''}{72}\sigma^4 \sin 2A_{1.2}\cos^2 B_1 + \frac{e'^4 \rho''}{6}\sigma^2 \sin A_{1.2}\cos^3 A_{1.2}\cos^4 B_1, \tag{2}$$

где σ—новая переменная $\sigma = \dfrac{S}{N}$.

Обозначим

$$\left.\begin{aligned}
&(3') && \frac{e'^2 \rho''}{12}\sigma^2 \sin 2A_{1.2}\cos^2 B_1 = \delta_1\\
&(3'') && \frac{e'^2 \rho''}{48}\sigma^3 \sin A_{1.2}\cos 2B_1 = \delta_2\\
&(3''') && \frac{e'^2 \rho''}{72}\sigma^4 \sin 2A_{1.2}\cos^2 B_1 = \delta_3\\
&(3^{IV}) && \frac{e'^4 \rho''}{6}\sigma^2 \sin A_{1.2}\cos^3 A_{1.2}\cos^4 B_1 = \delta_4
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Тогда формула примет вид: $\delta'' = \delta_1 - \delta_2 + \delta_3 + \delta_4$.

Каждое δ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ содержит четыре переменных: σ, $A_{1.2}$, B_1, δ_i.

Номографирование каждого из уравнений (3) будем вести методом исключения переменных. Рассмотрим подробно построение номограммы для (3′), построение номограмм для (3″), (3‴), (3^{IV}) производится аналогично.

Представим (3′) в виде двух уравнений, введя новую переменную γ:

$$\sin 2A_{1.2}\cos^2 B_1 = \gamma \quad (4) \qquad \frac{e'^2\rho''}{12}\sigma^2\gamma = \delta_1. \quad (5)$$

(4) и (5) содержат теперь по три переменных и являются уравнениями 3-го номографического порядка, номографирование которых не представляет особых затруднений, коль скоро они будут приведены к одной из 3-х канонических форм:

$$f_1 f_2 = f_3, \tag{6}$$

$$f_1 + f_2 = f_3, \tag{7}$$

$$f_1 + f_2 + f_3 = f_1 f_2 f_3. \tag{8}$$

Наши уравнения (4) и (5) приведены, очевидно, к первой канонической форме вида (6).

Для соединения 2-х номограмм уравнения (4) и (5) в одну необходимо, чтобы шкала γ была общей. Для этого (5) перепишем в виде:

$$\delta_1 \frac{12}{\sigma^2 e'^2 \rho''} = \gamma. \tag{9}$$

Чтобы сделать номограмму приспособленной, преобразуем (9), введя множитель μ_1

$$\mu_1 \delta_1 \frac{12}{\mu_1 \sigma^2 e'^2 \rho''} = \gamma, \tag{10}$$

после чего напишем (4) и (10) в виде уравнений Соро:

$$\begin{vmatrix} \cos^4 B_1 & \cos^2 B_1 & 1 \\ \sin^2 2A_{1.2} & -\sin 2A_{1.2} & 1 \\ \gamma & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} \left(\frac{12}{\mu_1 \sigma^2 e'^2 \rho''}\right)^2 & \frac{12}{\mu_1 \sigma^2 e'^2 \rho''} & 1 \\ (\mu_1 \delta_1)^2 & -\mu_1 \delta_1 & 1 \\ \gamma & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Отсюда имеем уравнения шкал:

1) для переменной B_1: $x = \cos^4 B_1$, $y = \cos^2 B_1$;

2) для переменной $A_{1.2}$: $x = \sin^2 2A_{1.2}$, $y = -\sin 2A_{1.2}$;

3) для переменной γ: $x = \gamma$, $y = 0$;

4) для переменной σ: $x = \left(\frac{12}{\sigma^2 e'^2 \rho'' \mu_1}\right)^2$, $y = \frac{12}{\sigma^2 e'^2 \rho'' \mu_1}$;

5) для переменной δ_1: $x = \delta_1^2 \mu_1^2$, $y = -\delta_1 \mu_1$.

Для каждой номограммы существует свое μ_l ($l = 1, \dots, 11$). Уравнение опор для шкал переменных $A_{1.2}$, B_1, σ, δ_1 совпадают и лежат на кривой 2-го порядка, (параболе), уравнение которой

$$x = y^2.$$

Шкалы переменных B_1 и σ лежат на одной ветви параболы, причем шкала B_1 лежит на внутренней стороне, а шкалы переменных $A_{1.2}$ и δ_1 лежат на другой ветви параболы, причем шкала $A_{1.2}$ лежит на внутренней стороне. Шкала γ немая и потому не требует градуировки.

Но изобразить всю область номографирования на одном чертеже для δ_i не удается ввиду того, что пределы изменения расстояния S велики:

$$0 \leqslant S \leqslant 1300 \text{ км}.$$

А потому для каждого δ_i выполнен комплекс номограмм, разделенных по аргументу σ. Способ пользования номограммой весьма прост: соединяем прямой заданные значения $A_{1.2}$ и B_1 и находим точку γ_1 пересечения этой прямой со шкалой γ. Соединяем прямой заданное значение σ_1 и точку γ_1, δ_1 читаем на шкале δ_1 в точке пересечения последней прямой с ветвью параболы.

Номограмма № 1 обеспечивает точность определения поправки δ_1, в $0'',01$—$0'',02$, номограммы №№ 2, 3, 4—с точностью до $0'',005$—$0'',01$, номограмма № 5—с точностью до $0'',005$, номограммы №№ 6, 7, 8, 9, 10, 11—с точностью до $0'',001$.

При небольших расстояниях порядка 20—150 *км* такой вид номограммы становится непригодным. Для δ_1, δ_2, δ_3 выполнено по одной номограмме, при малых расстояниях. Уравнения шкал—прямые линии. Всего шкал 5 соответственно количеству переменных. Шкала γ—немая. Способ пользования такими номограммами следующий: соединяем прямой заданные значения σ и $A_{1.2}$ (в номограмме 7—σ и B_1). Находим точку γ_1 пересечения этой прямой со шкалой γ. Соединяем точку γ_1 с заданным значением B_1 (в номограмме № 7 с заданным значением $A_{1.2}$). Пересечение этой прямой со шкалой δ_i даст ответ.

Для параметра σ составлена таблица с двумя входами. Отыскание σ по таблице ведется с точностью до 3-х, 4-х знаков после запятой по аргументам S и B_1, где S—расстояние, B_1—геодезическая широта начальной точки.

Ниже приведены пределы изменения σ в каждой номограмме, а также значения μ_l;

номограмма № 1 для δ_1

$$\mu_1 = 0.600 \qquad 0,122 \leqslant \sigma \leqslant 0.157,$$

номограмма № 2 для δ_1

$$\mu_2 = 1.000 \qquad 0,071 \leqslant \sigma \leqslant 0,122,$$

номограмма № 3 для δ_1

$$\mu_3 = 2,854 \qquad 0,042 \leqslant \sigma \leqslant 0,071,$$

номограмма № 4 для δ_1

$$0,004 \leqslant \sigma \leqslant 0,042,$$

номограмма № 5 для δ_2

$$\mu_5 = 6.907 \qquad 0.143 \leqslant \sigma \leqslant 0,204,$$

номограмма № 6 для δ_2

$$\mu_6 = 20.721 \qquad 0,100 \leqslant \sigma \leqslant 0,143,$$

Таблица значений σ

S км \ B_1	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1300	0,2038	0,2038	0,2037	0,2036	0,2035	0,2034	0,2033	0,2032	0,2032	0,2031
1250	0,1960	0,1960	0,1959	0,1958	0,1957	0,1956	0,1955	0,1954	0,1953	0,1953
1200	0,1881	0,1881	0,1880	0,1880	0,1879	0,1878	0,1877	0,1876	0,1875	0,1875
1150	0,1803	0,1803	0,1802	0,1801	0,1800	0,1799	0,1798	0,1798	0,1797	0,1797
1100	0,1725	0,1724	0,1724	0,1723	0,1722	0,1721	0,1720	0,1720	0,1719	0,1719
1050	0,1646	0,1646	0,1646	0,1644	0,1644	0,1643	0,1642	0,1641	0,1641	0,1641
1000	0,1568	0,1568	0,1567	0,1566	0,1566	0,1565	0,1564	0,1563	0,1563	0,1562
950	0,1489	0,1489	0,1489	0,1488	0,1487	0,1486	0,1486	0,1485	0,1485	0,1484
900	0,1411	0,1411	0,1411	0,1410	0,1409	0,1408	0,1408	0,1407	0,1406	0,1406
850	0,1333	0,1333	0,1332	0,1331	0,1331	0,1330	0,1329	0,1329	0,1328	0,1328
800	0,1255	0,1255	0,1254	0,1253	0,1253	0,1252	0,1251	0,1251	0,1250	0,1250
750	0,1177	0,1177	0,1176	0,1175	0,1175	0,1174	0,1173	0,1172	0,1172	0,1172
700	0,1098	0,1098	0,1097	0,1096	0,1096	0,1095	0,1095	0,1094	0,1094	0,1094
650	0,1019	0,1019	0,1019	0,1018	0,1018	0,1017	0,1017	0,1016	0,1016	0,1016
600	0,0941	0,0941	0,0940	0,0940	0,0939	0,0939	0,0939	0,0938	0,0938	0,0938
550	0,0862	0,0862	0,0862	0,0861	0,0861	0,0860	0,0860	0,0860	0,0860	0,0859
500	0,0784	0,0784	0,0784	0,0783	0,0783	0,0782	0,0782	0,0782	0,0781	0,0781
450	0,0706	0,0705	0,0705	0,0705	0,0704	0,0704	0,0704	0,0703	0,0703	0,0703
400	0,0627	0,0627	0,0627	0,0627	0,0626	0,0626	0,0626	0,0625	0,0625	0,0625
350	0,0549	0,0549	0,0548	0,0548	0,0548	0,0548	0,0547	0,0547	0,0547	0,0547
300	0,0470	0,0470	0,0470	0,0470	0,0470	0,0469	0,0469	0,0469	0,0469	0,0469
250	0,0392	0,0392	0,0392	0,0392	0,0391	0,0391	0,0391	0,0391	0,0391	0,0391

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
200	0,0314	0,0314	0,0313	0,0313	0,0313	0,0313	0,0313	0,0313	0,0312	0,0312
150	0,0235	0,0235	0,0235	0,0235	0,0235	0,0235	0,0235	0,0234	0,0234	0,0234
100	0,0157	0,0157	0,0157	0,0157	0,0157	0,0156	0,0156	0,0156	0,0156	0,0156
50	0,0078	0,0078	0,0078	0,0078	0,0078	0,0078	0.0078	0,0078	0,0078	0,0078

	78
1	7,8
2	15,6
3	23,4
4	31,2
5	39,0
6	46,8
7	54,6
8	62,4
9	70,2

номограмма №7 для δ_2

$$0{,}004 \leqslant \sigma \leqslant 0{,}100,$$

номограмма №8 для δ_3

$$\mu_8 = 51.791 \qquad 0{,}155 \leqslant \sigma \leqslant 0{,}204,$$

номограмма №9 для δ_3

$$0{,}050 \leqslant \sigma \leqslant 0{,}155,$$

номограмма №10 для δ_4

$$\mu_{10} = 51.250 \qquad 0{,}100 \leqslant \sigma \leqslant 0{,}190,$$

номограмма №11 для δ_4

$$\mu_{11} = 200 \qquad 0{,}043 \leqslant \sigma \leqslant 0{,}100.$$

При указанных выше значениях μ_i размеры чертежа 300×340 мм.

В номограмме №10 и №11 шкала переменной $A_{1,2}$ расположена как на внутренней стороне параболы от 0° до 32°, так и на внешней стороне от 34° до 90°, при этом наложения со шкалой σ не происходит.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. М. Герсеванов. Теория и построение инженерных номограмм. М.—Л., ОНТИ, 1937.

2. Н. А. Глаголев. Курс номографии. М., Высш. школа, 1961.

3. М. В. Пентковский. Скелеты номограмм уравнений третьего номографического порядка. М., Изд. АН СССР, 1953.

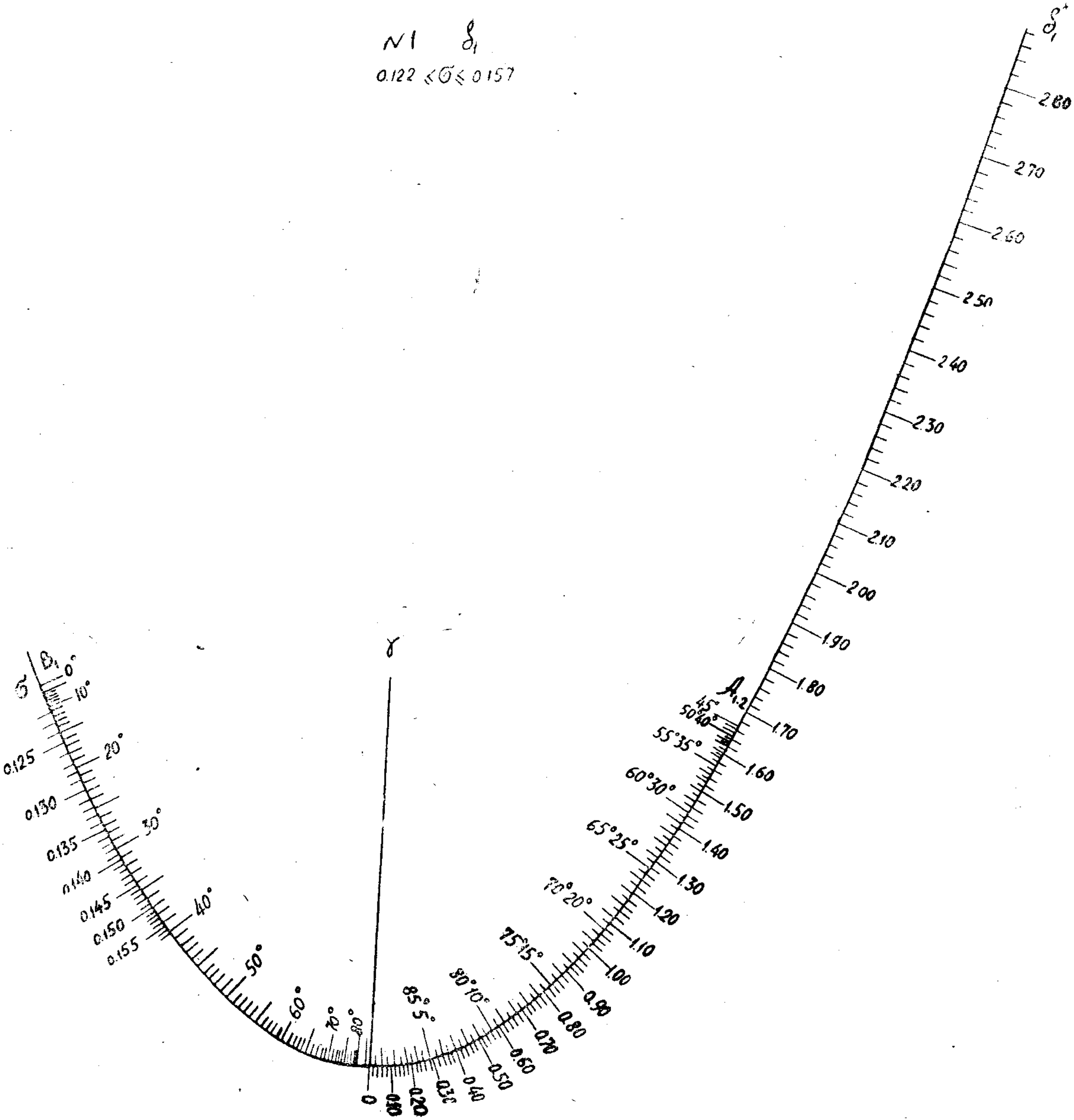
N1 δ_1
$0.122 \leqslant \sigma \leqslant 0.157$
δ_1
γ
σ
B_1
$A_{1,2}$

Рис. 1.

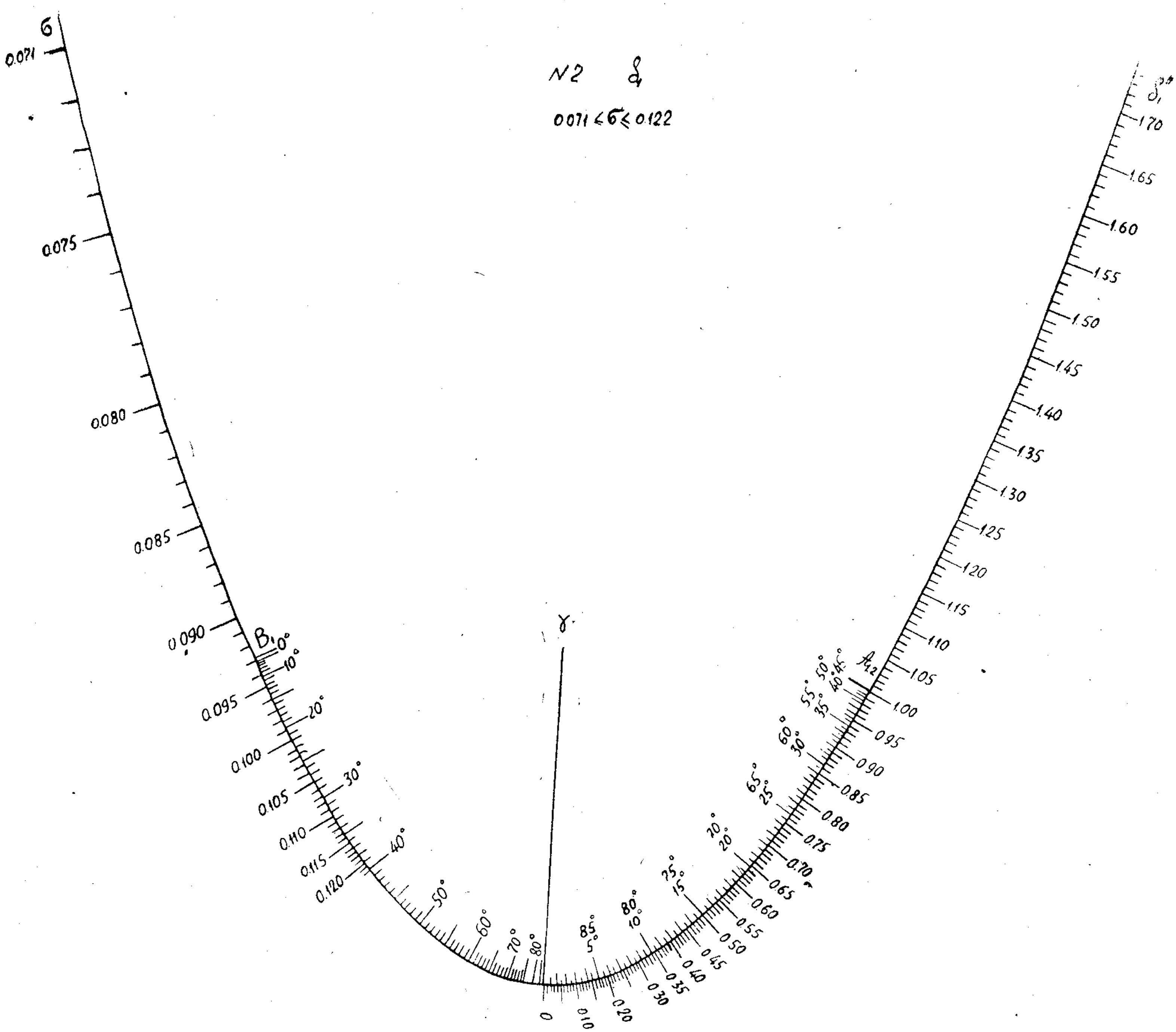
N2 δ_1
$0.071 \leq \sigma \leq 0.122$
σ
0.071
0.075
0.080
0.085
0.090
0.095
0.100
0.105
0.110
0.115
0.120
B_1
γ
$A_{1,2}$
δ_1
1.70
1.65
1.60
1.55
1.50
1.45
1.40
1.35
1.30
1.25
1.20
1.15
1.10
1.05
1.00
0.95
0.90
0.85
0.80
0.75
0.70
0.65
0.60
0.55
0.50
0.45
0.40
0.35
0.30
0.20
0.10
0

Рис. 2.

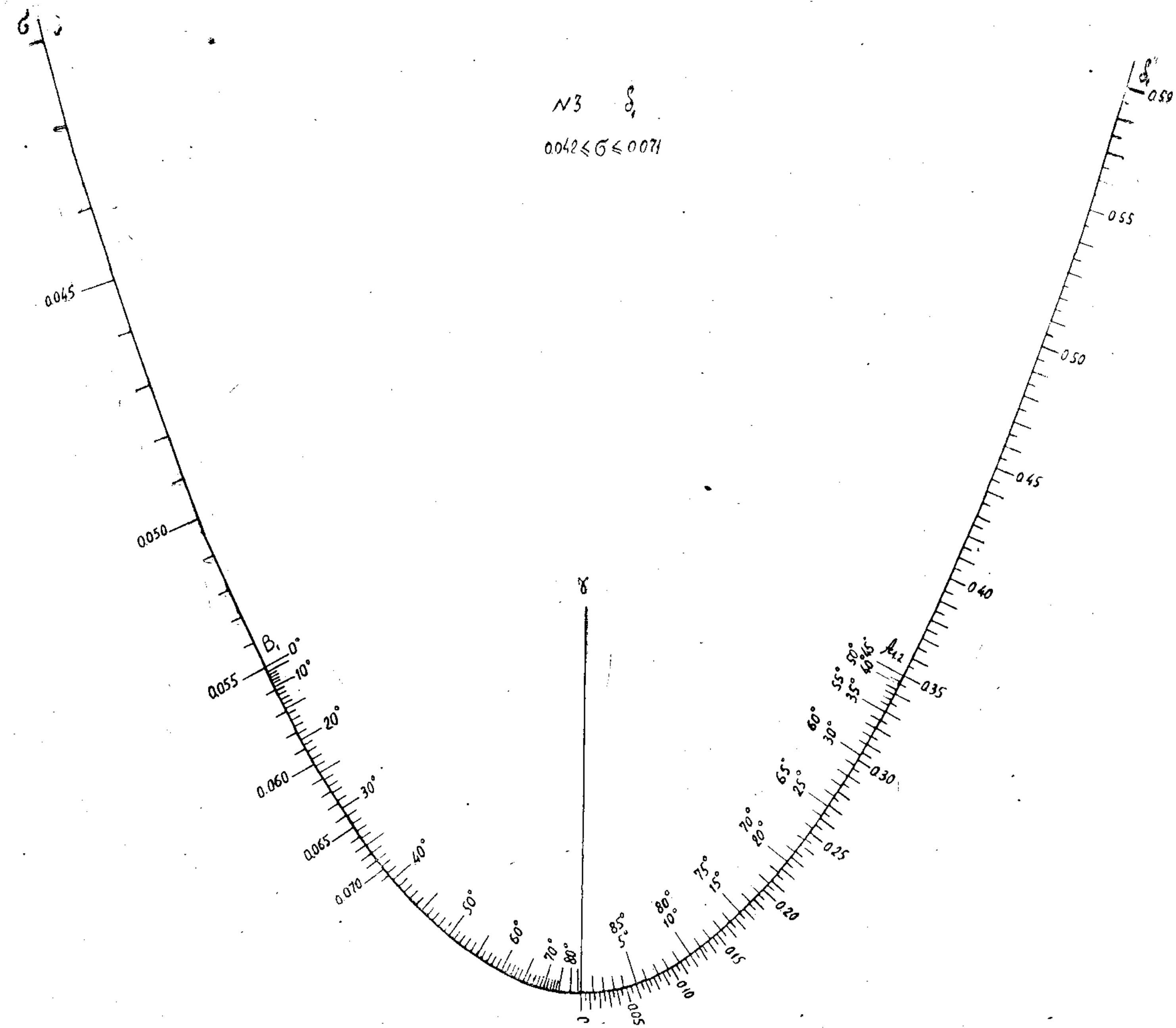

Рис. 3.

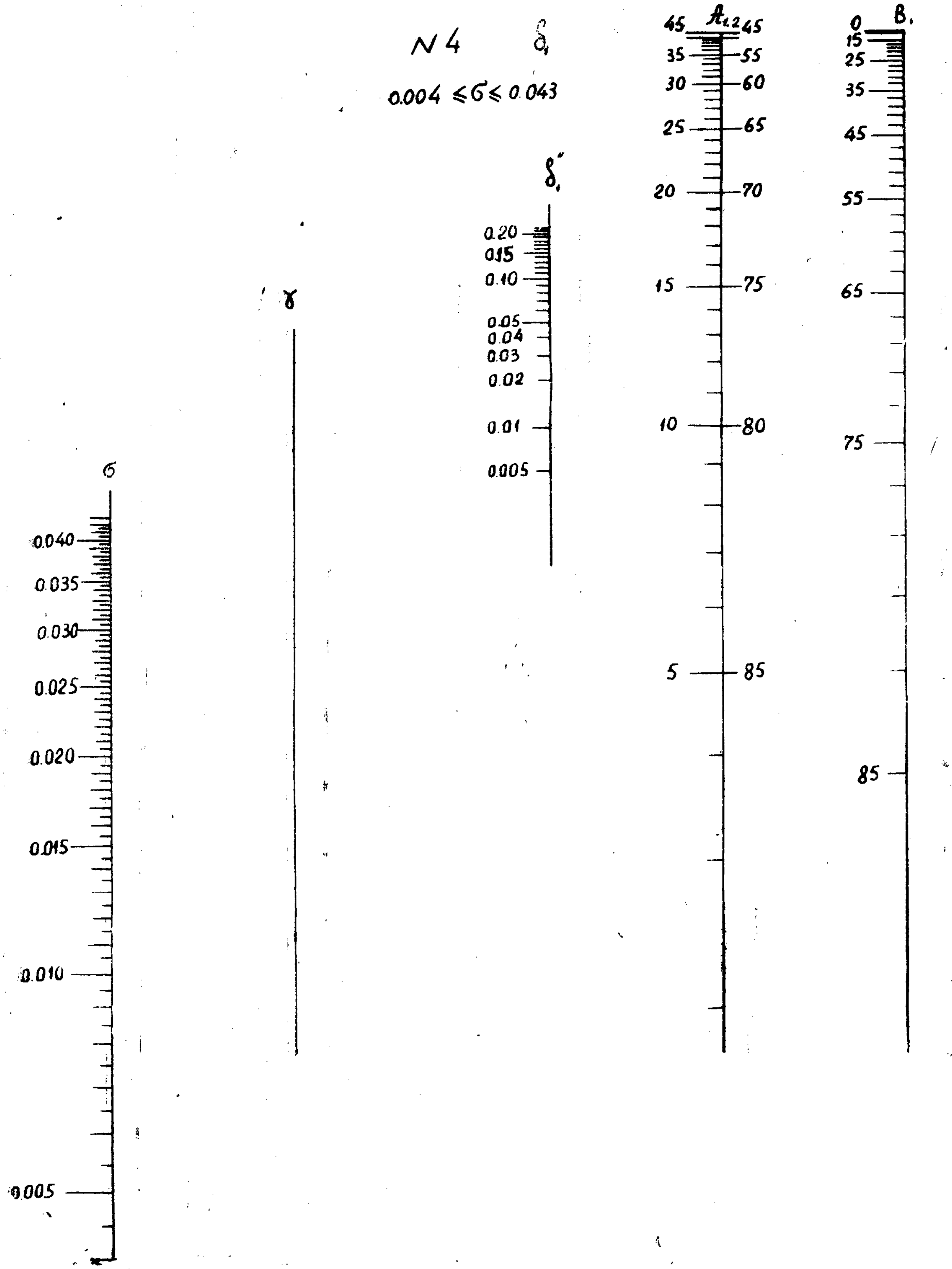
N 4
$0.004 \leqslant \sigma \leqslant 0.043$
σ
γ
δ_1''
$A_{1,2}$
B_1
0.040
0.035
0.030
0.025
0.020
0.015
0.010
0.005
0.20
0.15
0.10
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.005
45
35
30
25
20
15
10
5
55
60
65
70
75
80
85
0
15
25
35
45
55
65
75
85

Рис. 4.

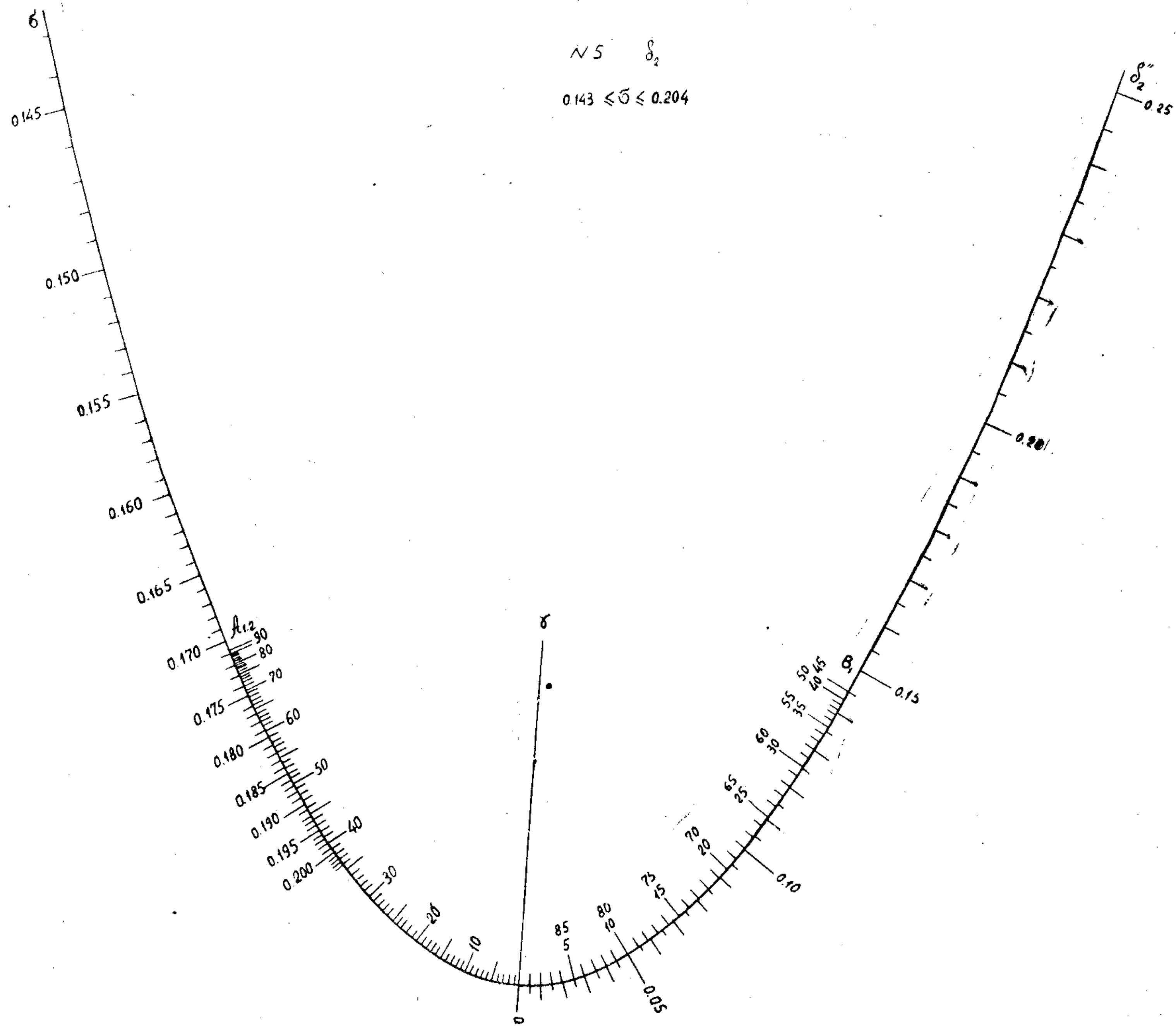

Рис. 5.

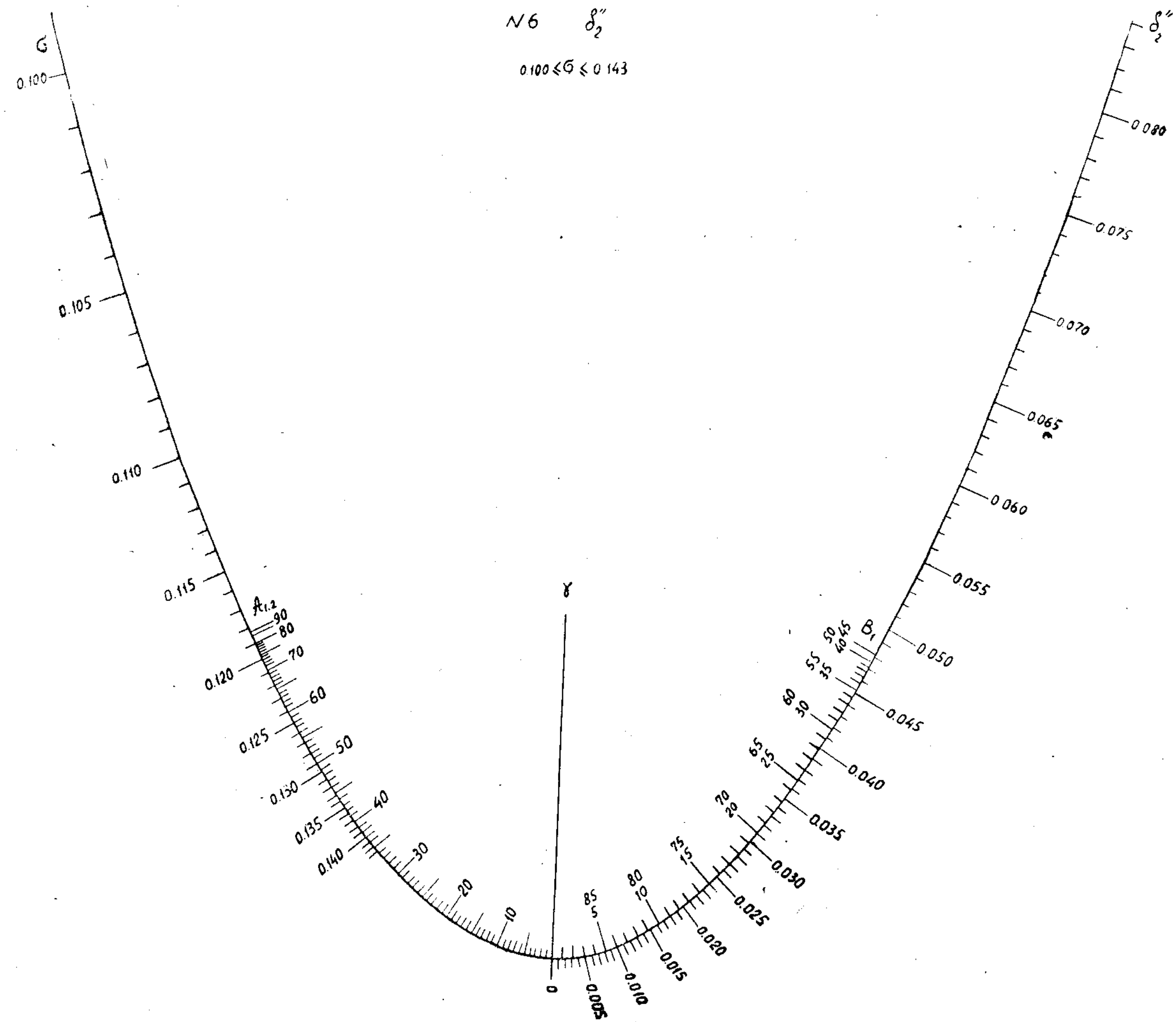

Рис. 6.

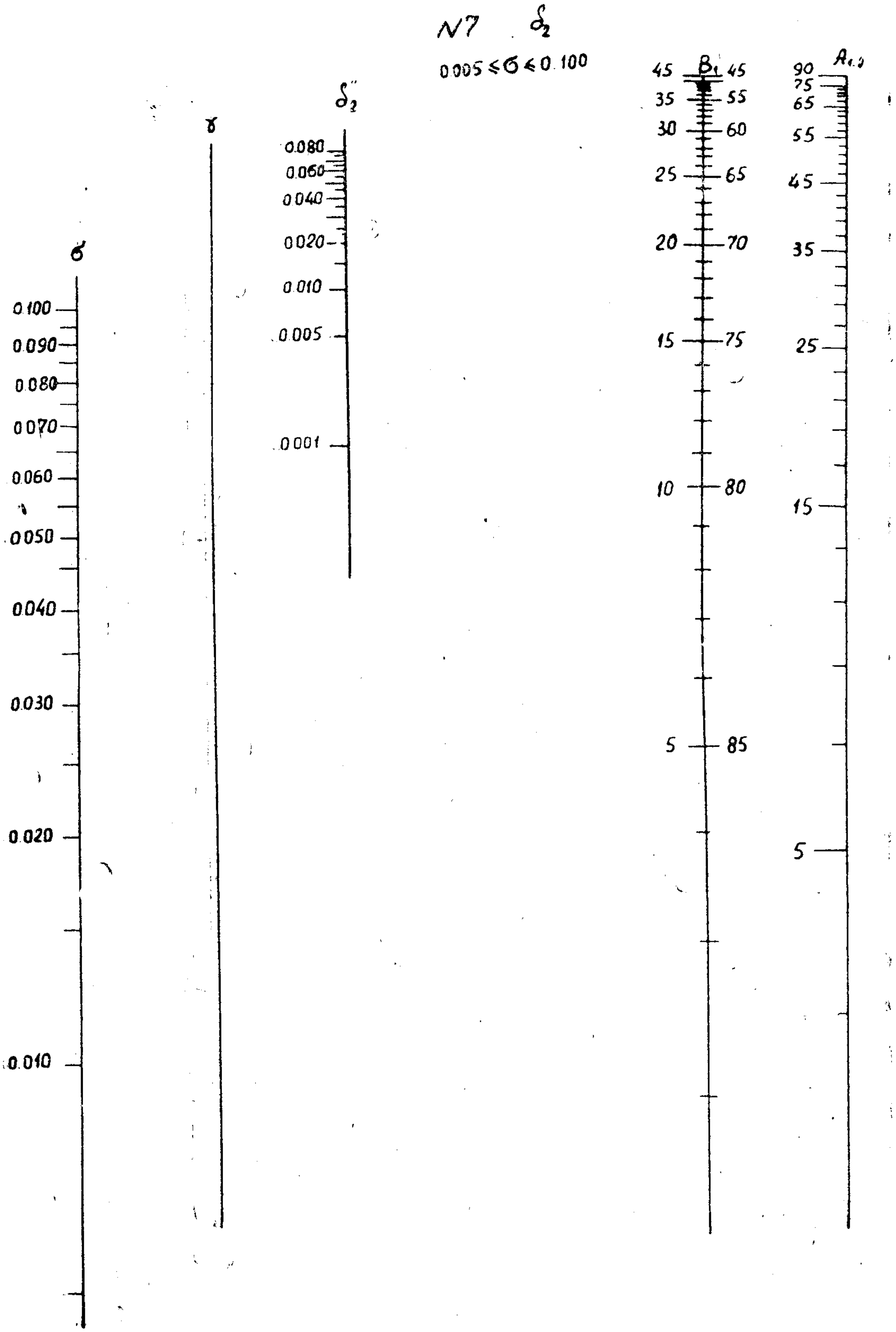
N7 δ2
0.005 ≤ σ ≤ 0.100
σ
γ
δ2''
B1
0.100
0.090
0.080
0.070
0.060
0.050
0.040
0.030
0.020
0.010
0.080
0.060
0.040
0.020
0.010
0.005
0.001
45 45
35 55
30 60
25 65
20 70
15 75
10 80
5 85
90
75
65
55
45
35
25
15
5

Рис. 7.

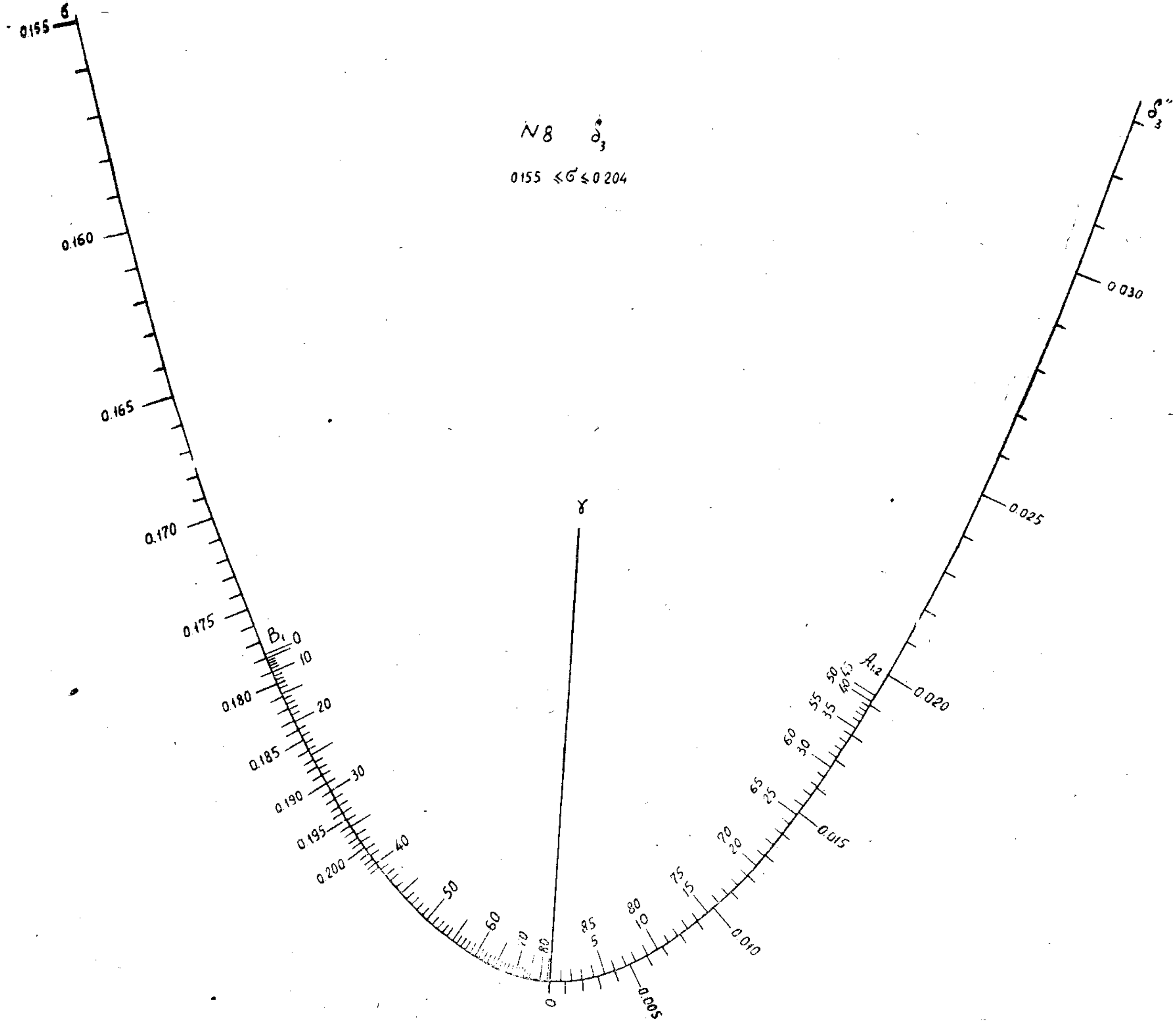
N8 δ_3^*
0.155 ≤ σ ≤ 0.204
σ
0.155
0.160
0.165
0.170
0.175
0.180
0.185
0.190
0.195
0.200
B_1
γ
$A_{1,2}$
0.005
0.010
0.015
0.020
0.025
0.030
δ_3''

Рис. 8.

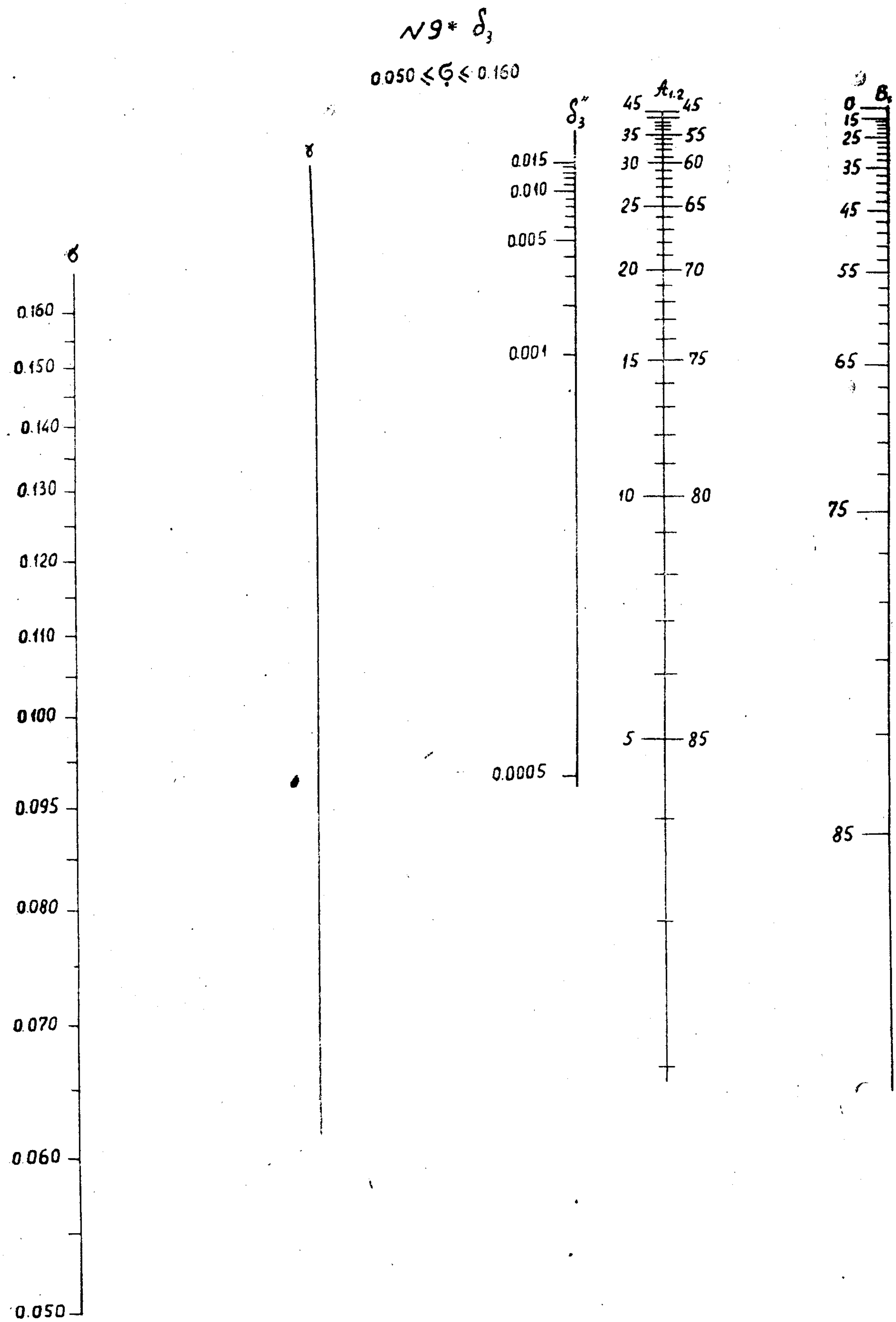

Рис. 9.

* Расстояние между шкалами σ и γ должно быть 33 мм.

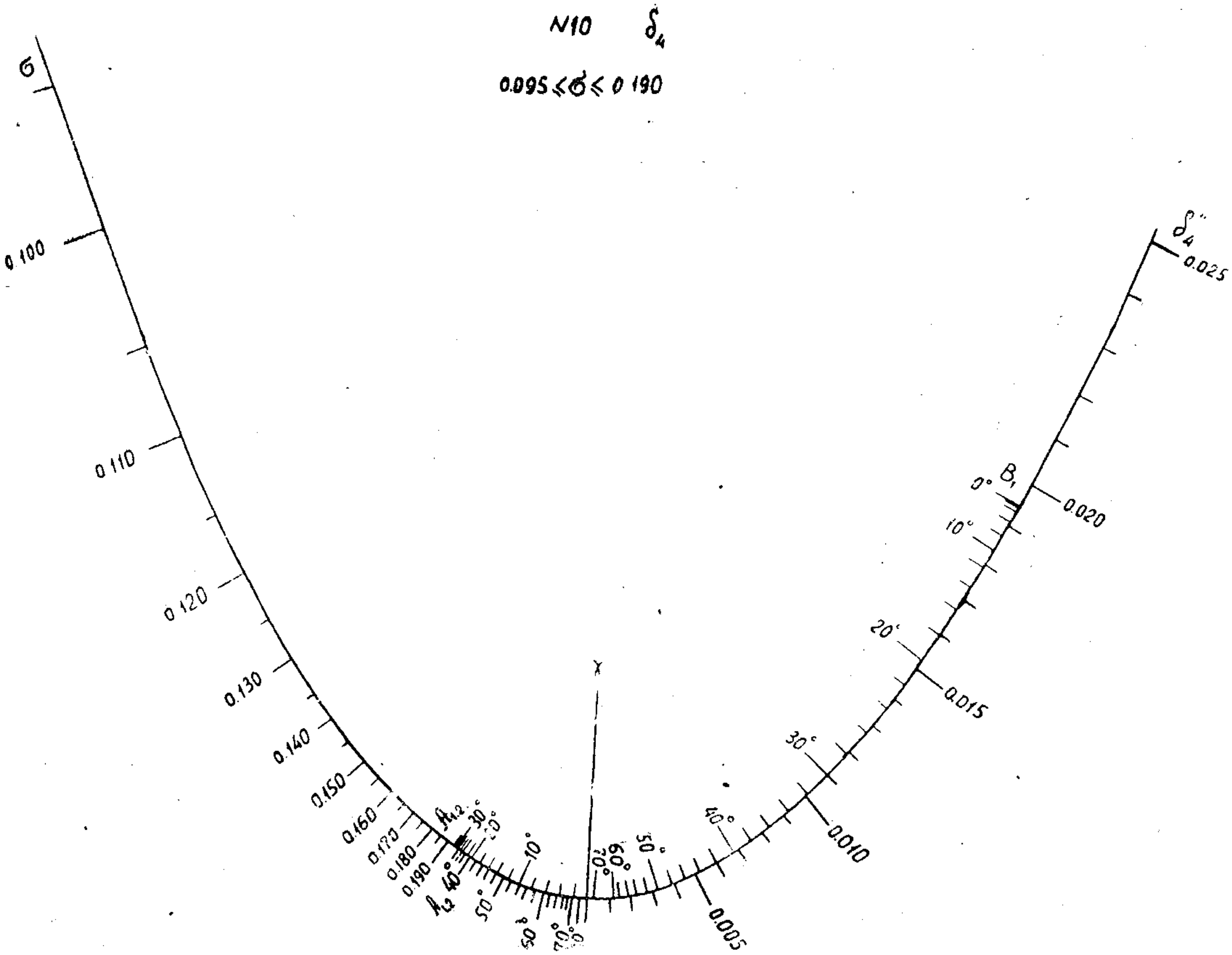
N10 δ_4
$0.095 \leqslant \sigma \leqslant 0.190$
σ
0.100
0.110
0.120
0.130
0.140
0.150
0.160
0.170
0.180
0.190
δ_4''
0.025
0.020
0.015
0.010
0.005
B_1
A_{12}
x

Рис. 10.

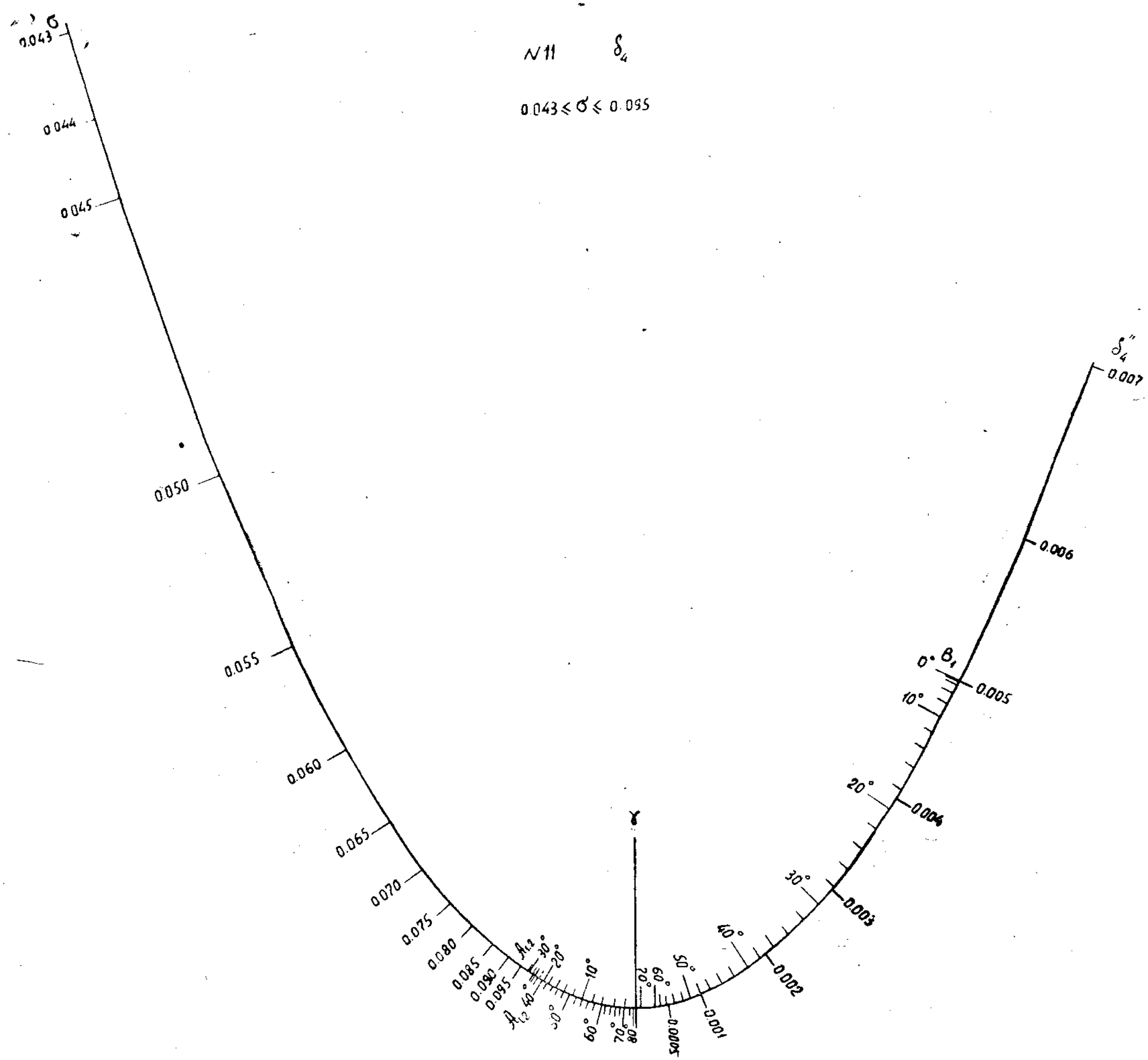
N 11 δ4
0.043 ≤ σ ≤ 0.095
σ
0.043
0.044
0.045
0.050
0.055
0.060
0.065
0.070
0.075
0.080
0.085
0.090
0.095
γ
δ4''
0.007
0.006
0.005
0.004
0.003
0.002
0.001
0.0005
B1
A12

Рис. 11.